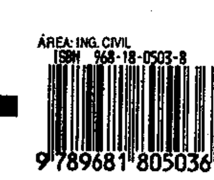


Este es el volumen I de una obra que consta de dos tomos, destinados como libros de texto para los cursos de hidráulica a nivel profesional. Abarca desde los fundamentos y métodos de análisis de la mecánica de fluidas que tienen aplicación directa a los problemas del ingeniero civil, hasta la información de tipo práctica necesaria para el ejercicio de su profesión.

Los cuatro primeros capítulos tratan esencialmente de los principios fundamentales de la estática cinemática y dinámica de líquidos. El principio de continuidad, la ecuación de la energía y la ley de la cantidad de movimiento se desarrollan ampliamente en la solución de numerosos problemas del flujo de líquidos, a fin de señalar con claridad sus bases y limitaciones. En el siguiente capítulo se presentan las leyes de similitud más importantes para la experimentación con modelos hidráulicos. A continuación, los métodos analíticos se aplican directamente al cálculo de orificios, compuertas y vertedores y, después de examinar los aspectos prácticos de la resistencia al flujo en conductos a presión, se analizan los diversos sistemas de tubos, que comprenden tanto los conductos sencillos como las redes complejas. También se presenta la teoría del flujo con potencial y los diferentes métodos para su aplicación en problemas prácticos. Finalmente, se incluye una introducción a los aspectos más importantes del empuje de un flujo sobre un cuerpo, que son de interés en problemas de pilas de puente, rejillas, obturadores y arrastre de sedimentos y sirven como base para entender el empuje de viento sobre estructuras. En los apéndices se presentan el análisis dimensional y la teoría semiempírica de la resistencia a un flujo viscoso.

Con objeto de aclarar los aspectos teóricos, se incluyen aproximadamente 140 problemas completamente resueltos y se proponen cerca de 430 problemas para que los resuelva el estudiante. Además, se proporcionan soluciones numéricas apropiadas para programación en computadoras, teniendo en cuenta su gran importancia y que cada vez es más fácil disponer de dichas máquinas.

En efecto, el material presentado es tan amplio y completo que la obra también es muy adecuada como libro de consulta para todo estudiante o ingeniero interesado en el flujo de líquidos.


ÁREA: ING. CIVIL
ISBN 968-18-0503-8
9 789681 805036

SOTELO

HIDRÁULICA GENERAL

VOLUMEN





Acerca del autor:

Gilberto Sotelo Avila, obtuvo en 1959 el título de Ingeniero Civil y en 1961 el grado de Maestro en Ingeniería (Hidráulica) en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. En 1961 y 1962, trabajó como Investigador Asistente por un período de seis meses en el laboratorio de Investigaciones Hidráulica y Mecánica de Suelos en la Universidad Técnica Federal de Zurich y por el mismo período en el Laboratorio Federal de obras Hidráulicas de Karlsruhe. Posteriormente, durante diez años fue proyectista de obras hidráulicas en la Secretaría de Recursos Hidráulicos y en la Comisión del Río Balsas.

Desde 1959 ha impartido diferentes cátedras de hidráulica, tanto a nivel profesional como de posgrado en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México y desde 1967 es profesor e investigador de tiempo completo en dicho centro de estudios. Ha publicado más de 36 trabajos sobre diferentes temas de investigación y ha colaborado en otras obras originales relacionadas con su especialidad. Actualmente es jefe del Departamento de Ingeniería Civil Topográfica y Geodésica en la División Profesional de la propia Facultad.

HIDRÁULICA GENERAL

Francisco Ramírez

Chillán Marzo 79

HIDRÁULICA GENERAL

VOLUMEN 1 · FUNDAMENTOS

GILBERTO SOTELO ÁVILA

Profesor Titular de la Universidad Nacional Autónoma de México

LIMUSA
NORIEGA EDITORES
MÉXICO • España • Venezuela • Colombia

GRUPO NORIEGA EDITORES
BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C.P. 06040
☎ 521-21-05
91(800) 7-06-91
📠 512-29-03
E-MAIL:
cnoriega@mail.internet.com.mx

CANIEM NÚM. 121

DECIMAOCTAVA REIMPRESIÓN

HECHO EN MÉXICO
ISBN 968-18-0503-8

A Rosario,
Gilberto
y Lucía Ingrid

Prólogo

Los libros de mecánica de fluidos, usados actualmente como textos en los cursos del mismo nombre y en los cursos introductorios de hidráulica, forman una larga lista. Sin embargo, la mayoría no son obras originales escritas en español, difícilmente se adaptan a los programas de estudio vigentes en las facultades y escuelas de ingenieros de nuestros países, y además, casi invariablemente, ofrecen un tratamiento muy amplio, con la idea de que el material presentado pueda adaptarse a los cursos de cualquier rama de ingeniería a nivel profesional y, a veces, de posgrado. El objeto de esta obra es proporcionar al estudiante de habla castellana el grado de especialización que se requiere hoy día y, por ello, he tratado de incorporar en un texto de hidráulica de nivel profesional los fundamentos de la mecánica de fluidos que tienen aplicación directa a los problemas que atañen al ingeniero civil.

Los métodos de análisis de la mecánica de fluidos se basan en los postulados fundamentales de la física, en las técnicas del análisis matemático y en resultados experimentales. Esto permite establecer ecuaciones de naturaleza general, en contraste con la hidráulica empírica, cuyas fórmulas corresponden a un área limitada de experimentación y, por tanto, requieren extrapolaciones que deben tomarse con cierta reserva. Durante muchos años los métodos de análisis se basaron en el estudio del equilibrio dinámico de volúmenes de control infinitesimales y en el movimiento individual de las partículas. Las ecuaciones obtenidas de esta forma de análisis son de tipo diferencial y permiten obtener soluciones para casos particulares, sin importar la complejidad ni la diversidad de condiciones de frontera que se encuentren en la práctica.

En la última década ha sido importante el nuevo enfoque de la mecánica de fluidos basado en el análisis de volúmenes finitos de control. Esto ha fundamentado y sistematizado los métodos de análisis ya tradicionales en la hidráulica, la cual se ha ocupado principalmente del flujo unidimensional.

En este libro no se presentan desarrollos y ecuaciones diferenciales

que se consideran tradicionales en esta especialidad (por ejemplo, la ecuación de Navier-Stokes), sino aquellos conceptos, métodos y ecuaciones que me parecen importantes para el ingeniero civil. Con este fin, he hecho énfasis en diferenciar las bases y las limitaciones que tienen las ecuaciones derivadas.

El texto fue preparado para impartir el primer curso semestral de hidráulica para estudiantes de ingeniería civil. Los temas y el orden de los mismos se adaptan al programa actualmente vigente en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

El principio de continuidad, las ecuaciones del movimiento, la ecuación de la energía para el flujo permanente y la ley de la cantidad de movimiento se desarrollan ampliamente en la solución de problemas del flujo de líquidos. De esta manera, se trata de que el estudiante comprenda claramente las propiedades de los líquidos, las leyes que rigen su movimiento y adquiera la habilidad necesaria para resolver problemas prácticos.

Los cinco primeros capítulos se dedican a la presentación de los principios fundamentales que abarcan la estática, cinemática y dinámica de líquidos. Se obtienen las ecuaciones fundamentales del tipo más general para flujo no permanente y se particularizan para el permanente. En el capítulo 5 se presentan las leyes de similitud más importantes en la experimentación. Con el fin de hacer una rápida aplicación de la teoría y como antecedentes del flujo en tubos y canales, los capítulos 6 y 7 tratan principalmente de orificios, compuertas y vertedores de pared delgada. Después, en el capítulo 8, se presenta la resistencia al flujo en conductos a presión como introducción al análisis de sistemas de tubos, tratado en el capítulo 9. El capítulo 10 expone la teoría del flujo con potencial como un modelo matemático para la solución de numerosos problemas de ingeniería civil. Finalmente, en el capítulo 11 se proporciona una introducción a los aspectos importantes del empuje de un flujo sobre un cuerpo, de interés no sólo en la hidráulica, sino también como base para entender el empuje de viento sobre estructuras.

En hidráulica, la presentación tradicional de las leyes de similitud suele hacerse con base en el análisis dimensional. Sin embargo, considero que de esta manera el estudiante se preocupa más por entender el procedimiento matemático que la esencia de la teoría de la semejanza. Por esta razón he incluido la metodología del análisis dimensional en un apéndice al final del libro, tratándolo como una herramienta matemática básica para el investigador que desea sistematizar un nuevo experimento.

En el Apéndice B se trata la teoría semiempírica de Prandtl-von Kármán para flujos viscosos turbulentos a fin de complementar los aspectos teóricos de la resistencia al flujo tratados en el capítulo 8. Además, en la presentación de los temas de cada capítulo, he tratado de dar preferencia a los aspectos básicos, dejando en segundo término los aspectos puramente informativos. De esta manera, no será necesario que el profesor abarque todo el contenido, sino los puntos que son fundamentales, dejando que el estudiante, por sí solo, aprenda a manejar la información en la solución de nuevos problemas. Considero que el propósito principal de este volumen es sentar las bases de la hidráulica, haciendo énfasis en el flujo permanente en estructuras hidráulicas, para poder continuar, en un segundo volumen, las aplicaciones a problemas de flujo permanente a superficie libre.

La presente obra es el producto de un largo proceso de adaptaciones y cambios. Éstos se deben, por una parte, a la experiencia adquirida en quince años de enseñanza de la materia a nivel profesional así como de posgrado, y en la práctica simultánea de la ingeniería hidráulica tanto en sus aspectos aplicativos como de investigación. Por otra parte, son la consecuencia de las distintas reformas hechas en años recientes en los planes de estudio de las carreras de ingeniería.

He tratado que la obra sea la continuación lógica de los primeros cursos de mecánica, es decir, estática, dinámica y posiblemente de la mecánica del medio continuo. Se supone que el lector también ha estudiado el álgebra, cálculo vectorial y las ecuaciones diferenciales elementales. Los operadores de campos vectoriales se tratan como parte del texto. Además, se proporcionan soluciones numéricas apropiadas para su programación en computadoras, teniendo en cuenta la gran importancia de dichas máquinas y que cada vez es más fácil disponer de ellas.

Se presentan numerosos ejemplos, completamente resueltos, para aclarar los conceptos y mostrar su aplicación a problemas específicos. Al final de cada capítulo se incluyen problemas para que los resuelva el estudiante. Se ha tenido cuidado de evitar problemas que tienen soluciones estereotipadas, a fin de propiciar el desarrollo de esa habilidad analítica que debe poseer el ingeniero para resolver los diversos problemas encontrados en la práctica. De este modo, sin demérito en la presentación de fundamentos, se intenta cerrar la brecha existente entre teoría y práctica. Por ello se espera que el libro sea también útil al ingeniero que ejerce su profesión, ya que encontrará en él los fundamentos de la hidráulica, así como información de tipo práctico.

En un libro de este tipo, es difícil hacer el reconocimiento de todas las fuentes originales usadas pero, hasta donde ha sido posible, éstas se citan en la Bibliografía de acuerdo con el orden en que aparecen en el texto. Pido disculpas por las omisiones que, obviamente, son involuntarias.

No quisiera terminar sin dejar constancia de mi profundo reconocimiento al Prof. José Luis Sánchez Bribiesca, pionero en enseñanza de la hidráulica moderna en México, quién ha trazado el sendero a seguir mediante sus investigaciones en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México.

También doy gracias al Dr. Enzo Levi por su calidad humana, sabias enseñanzas y por los valiosos consejos que me ofreció durante la preparación del manuscrito.

Finalmente, expreso mi agradecimiento al Instituto de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México por el interés mostrado en la publicación preliminar de esta obra en forma de apuntes, que permitió usarla de inmediato en la docencia; y también a aquellos profesores de la asignatura en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México que me han hecho diferentes observaciones y comentarios respecto a la versión final de la misma.

PROLOGO A LA SEGUNDA REIMPRESION

El autor agradece la aceptación que ha tenido el libro, tanto en México como en los países de Latinoamérica, al grado de agotar las impresiones anteriores. He recibido muchas cartas y observaciones personales de colegas nacionales y extranjeros, de estímulo y apoyo por el trabajo realizado, lo que agradezco profundamente.

En esta nueva reimpresión se han corregido, hasta donde fue posible, los errores tipográficos de las anteriores. Asimismo, al final del libro, se han incluido los resultados obtenidos en la solución de los problemas de número impar de cada capítulo.

Extiendo mi agradecimiento a los ingenieros Juan José Muciño y Arturo Manuel Monforte por el esfuerzo realizado en las soluciones de los problemas incluidas en esta reimpresión.

El autor

Ciudad de México

Contenido

1

PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS

1.1 Introducción

1.1.1 Características de los fluidos

De acuerdo con el aspecto físico que tiene en la naturaleza, la materia se puede clasificar en tres estados: sólido, líquido y gaseoso, de los cuales los dos últimos se conocen como fluidos.

A diferencia de los sólidos, por su constitución molecular los fluidos pueden cambiar continuamente las posiciones relativas de sus moléculas, sin ofrecer gran resistencia al desplazamiento entre ellas, aun cuando éste sea muy grande.

La definición anterior implica que si el fluido se encuentra en reposo en su interior no pueden existir fuerzas tangenciales a superficie alguna, cualquiera que sea su orientación, y que dichas fuerzas se presentan sólo cuando el fluido está en movimiento. Por el contrario, un sólido en reposo sí admite fuerzas tangenciales a las superficies —en igualdad de condiciones—, las cuales producen desplazamientos relativos entre sus partículas con una magnitud perfectamente definida. Si el sólido es elástico y la fuerza no rebasa una magnitud llamada de *fluencia* del material, aquél recupera su forma original en el momento en que cesa la fuerza aplicada. Otra característica peculiar del fluido es que, como no tiene forma propia, adquiere la del recipiente que lo contiene.

Con las consideraciones anteriores aparentemente resultaría claro distinguir los sólidos de los fluidos; sin embargo, hay substancias cuya clasificación no es fácil, como por ejemplo el alquitrán, que a pesar de tener aspecto de sólido su comportamiento corresponde al de un fluido. En efecto, si se coloca sobre el piso un bloque de dicha substancia, después de un período largo se notará que el material sufre lentamente un cambio en su forma. Por otra parte, ciertos sólidos llamados plásticos *fluyen* cuando la fuerza tangencial que se aplica rebasa cierta magnitud.

Los fluidos poseen una propiedad característica de resistencia a la *rapidez* de deformación, cuando se someten a un esfuerzo tangencial, que explica su fluidez. Esta resistencia llamada *viscosidad* no sigue las mismas leyes de deformación de los sólidos, es decir, los esfuerzos tangenciales que se producen en un fluido no dependen de las deformaciones que experimenta, sino de la *rapidez* con que éstas se producen. Todavía más, la ley

de variación entre los esfuerzos tangenciales y la rapidez con que ocurren las deformaciones es distinta según el tipo de fluido que se trate; por ejemplo, en los llamados *newtonianos* el esfuerzo tangencial es directamente proporcional a la rapidez de la deformación angular a partir de valores cero iniciales, siendo los casos más comunes el agua, el aire y algunos aceites minerales. Por el contrario, en los fluidos llamados *no newtonianos* la variación entre esfuerzo tangencial y rapidez de deformación angular no es lineal, pues depende del tiempo de exposición al esfuerzo (su agitación) y de la magnitud del mismo. Es el caso del betún, los compuestos de celulosa, las colas y grasas, pinturas de aceite, jabones, gomas, alquitrán, etcétera.

Otras substancias como las mezclas empleadas en la inyección de suelos (limo, bentonita, arcillas, etc.) presentan un comportamiento que corresponde a los sólidos, en tanto el esfuerzo no alcanza un cierto valor inicial, pues a partir de éste se comportan como fluidos. Dichas substancias se consideran dentro del tipo de *fluidos de Bingham* (también conocido como *plástico ideal*). Otros cuerpos (medios pulverulentos, suelos, asfalto, plásticos, etc.) poseen propiedades intermedias entre las de un sólido y un fluido.

Fuera de la clasificación general los fluidos pueden dividirse en *líquidos y gases*. Considerando que un líquido cualquiera tiene un volumen definido que varía ligeramente con la presión y la temperatura, al colocar cierta cantidad de aquél en un recipiente de mayor volumen, adopta la forma del mismo y deja una superficie libre o de contacto entre el líquido y su propio vapor, la atmósfera u otro gas presente. No sucede lo mismo si una cantidad igual de gas se coloca en el recipiente, pues este fluido se expande hasta ocupar el máximo volumen que se le permita sin presentar una superficie libre. Sólo en estas condiciones el gas logra su equilibrio estático.

La clasificación anterior se basa en la propiedad llamada *compresibilidad*, es decir, en su comportamiento bajo la acción de esfuerzos de compresión (presiones). En general, los líquidos se pueden clasificar como *incompresibles*. Por ejemplo, en el caso del agua la reducción media del volumen por cada kg/cm² de presión es aproximadamente del 0.005 % del volumen original. Por el contrario, los gases son muy compresibles bajo la acción de grandes presiones, pero si los incrementos de presión y temperatura en el flujo son pequeños, los gases se pueden considerar también incompresibles; tal es el caso del aire en movimiento cuando no existen cambios importantes en su temperatura y cuando las velocidades son inferiores al 40 % de la velocidad del sonido.

1.1.2 El fluido como un medio continuo

A pesar de las diferencias señaladas, una buena parte del estudio del comportamiento de sólidos y fluidos, sometidos a un sistema de fuerzas, es común a ambos, ya que si en el análisis de su comportamiento se omite la naturaleza aleatoria de su distribución molecular, los sólidos y los fluidos se pueden considerar medios que poseen continuidad en todas sus propiedades y ser estudiados bajo esta suposición.

El análisis riguroso del comportamiento de un fluido debería considerar la acción individual de cada molécula; sin embargo, en las aplicaciones propias de la ingeniería el centro de interés reside sobre las condiciones medias de *velocidad, presión, temperatura, densidad, etc.*, de ahí que en lugar de estudiar por separado la conglomeración real de moléculas, se supone que el flujo es un *medio continuo*, es decir, una distribución continua de materia sin espacios vacíos. Tal suposición es normalmente justificable debido a que el número de moléculas consideradas en esta situación es muy grande y la distancia entre ellas muy pequeña. Por esta razón en el desarrollo de los siguientes capítulos a veces será necesario proponer la existencia de un elemento pequeño o partícula del fluido, la cual tendrá que ser suficientemente grande para contener muchas moléculas.

1.1.3 Mecánica de fluidos

Es la ciencia en la cual los principios fundamentales de la mecánica general se aplican en el estudio del comportamiento de los fluidos, tanto en reposo como en movimiento. Dichos principios son los de la conservación de la materia y de la energía, y las leyes del movimiento de Newton. Debe aclararse que dentro del estudio de fluidos compresibles se aplican también algunas leyes de la termodinámica.

Con las leyes que resultan del estudio de la mecánica de fluidos, mediante el análisis matemático y la experimentación, se está en posibilidad de explicar los fenómenos observados y predecir, por lo menos de manera aproximada, el comportamiento de los fluidos bajo una serie de condiciones especificadas.

Desde los primeros intentos para llevar agua de un lugar a otro sin emplear recipientes, el hombre se interesó en la mecánica de fluidos. Sin embargo, por siglos sus conocimientos los obtuvo a base de observaciones, tediosos tanteos y empirismo, con soluciones muy restringidas. A partir del siglo XVIII los matemáticos y fisicomatemáticos intentaron dar respuestas analíticas a muchos problemas del movimiento de los fluidos, que lograron gracias a una serie de suposiciones simplificatorias; sin embargo, esto condujo al caso extremo de que los resultados tuvieran poca identidad con el fenómeno real. La omisión de algunas propiedades de los fluidos —como la viscosidad— dio lugar al llamado *flujo ideal*, que formó una rama de la mecánica de fluidos la cual hoy en día se conoce como *hidrodinámica*.

El avance técnico en los últimos años y la ampliación de los campos de interés del hombre en nuevos problemas han dado lugar a la creación de un gran número de ramas de la mecánica de fluidos, a tal grado que resulta difícil definir una convención que establezca los límites de aplicación de cada una de ellas. Sin embargo, el campo de interés de un ingeniero civil restringe el número de temas de esta ciencia principalmente al estudio del movimiento de los líquidos.

De ahí que la *hidromecánica* se pueda establecer como una rama importante que estudia las leyes del equilibrio y movimiento de los fluidos incompresibles, especialmente los líquidos. Cuando las leyes y principios de la hidromecánica se aplican al estudio del flujo de agua en estructuras que interesan directamente al ingeniero civil, surge entonces la disciplina conocida como *hidromecánica técnica* o *hidráulica*.

El objeto de este libro es presentar, desde un punto de vista moderno, los aspectos más importantes de la hidráulica, así como también los puntos comunes de la mecánica de fluidos en cuanto a líquidos se refiere.

Además de describir en este capítulo las propiedades más importantes de los fluidos newtonianos, se presentan los valores numéricos que cuantifican dichas propiedades usando como ejemplos el agua y el aire. Se recomienda la lectura del Apéndice A en la parte correspondiente a sistemas de unidades.

1.2 Fuerzas que actúan en el interior de un fluido

Si en un fluido en movimiento se aísla idealmente un volumen *VC* (limitado por la superficie cerrada *SC*, como se indica en la Fig. 1.1a), por la acción del medio que rodea al volumen *VC* se generan fuerzas de diferente magnitud y dirección distribuidas sobre toda la superficie *SC*, las cuales se designan como *fuerzas de superficie*.

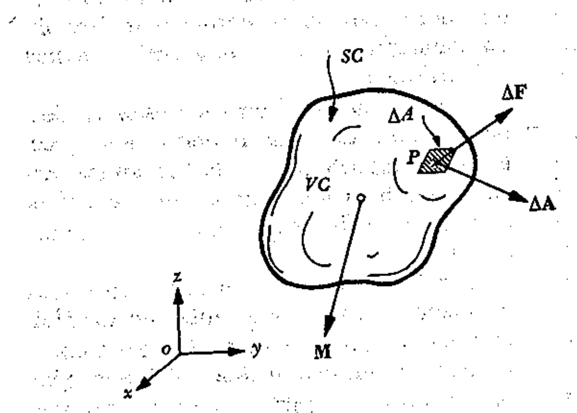
Se considera sobre la superficie *SC* un elemento de área ΔA, que encierra al punto *P* y sobre el cual actúa la fuerza de superficie $\Delta\mathbf{F}$. La magnitud y orientación del elemento ΔA se pueden representar por $\Delta\mathbf{A}$, vector normal a dicho elemento que, por convención, es de dirección positiva hacia afuera del volumen *VC*. Evidentemente, la fuerza $\Delta\mathbf{F}$ será tanto más pequeña como reducida sea el área ΔA. Si el elemento ΔA se reduce indefinidamente en su magnitud, siempre alrededor del punto *P*, la relación $\Delta\mathbf{F}/\Delta\mathbf{A}$ entre la fuerza y el elemento de área se aproxima a un valor límite que se designa esfuerzo específico o unitario o simplemente *esfuerzo* en el punto *P*; esto es, se define como esfuerzo en el punto *P*, al límite siguiente:

$$S = \lim_{\Delta\mathbf{A}\to 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta\mathbf{A}} = \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{A}}$$

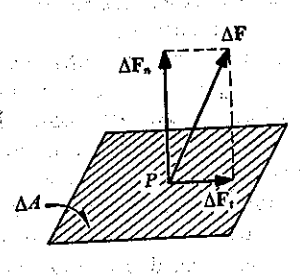
Sus dimensiones son: $[S] = [F L^{-2}]$, generalmente kg/m² o kg/cm².

En general, además de la fuerza $\Delta\mathbf{F}$, actuará un par transmitido desde los alrededores al elemento superficial. Sin embargo, en el límite, el par debe desaparecer haciendo igualmente válida la definición anterior.

El esfuerzo no sólo depende de la posición del punto *P* sino también de la orientación de $\Delta\mathbf{A}$ en dicho punto. En general, la fuerza $\Delta\mathbf{F}$ en *P* podrá descomponerse en dos componentes: una normal $\Delta\mathbf{F}_n$ y otra tangencial $\Delta\mathbf{F}_t$ (Fig. 1.1b) que siguiendo la definición, generarán un *esfuerzo normal* σ y otro *tangencial* τ (o *cortante*), respectivamente. Los esfuerzos σ y τ a su vez, se pueden representar por sus componentes según tres direcciones coordenadas



a) Fuerzas de superficie y de cuerpo.



b) Componentes normal y tangencial de la fuerza de superficie.

Figura 1.1

elegidas y, a menudo, se considera que el esfuerzo normal es positivo cuando se trata de una *tensión* y negativo cuando es *compresión*.

Además de las fuerzas de superficie, en cada punto del volumen *VC* actúan las *fuerzas de cuerpo* que pueden ser de diferentes tipos: de peso, electromagnéticas, etcétera.

Estas fuerzas se refieren a la unidad de masa y se expresan por el vector $\mathbf{M} = X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{j} + Z\,\mathbf{k}$, referido a un sistema de coordenadas cartesianas. Por ejemplo, si actúa exclusivamente la fuerza de peso y el eje *z* coincide con la vertical del lugar, las componentes de la fuerza de cuerpo son:

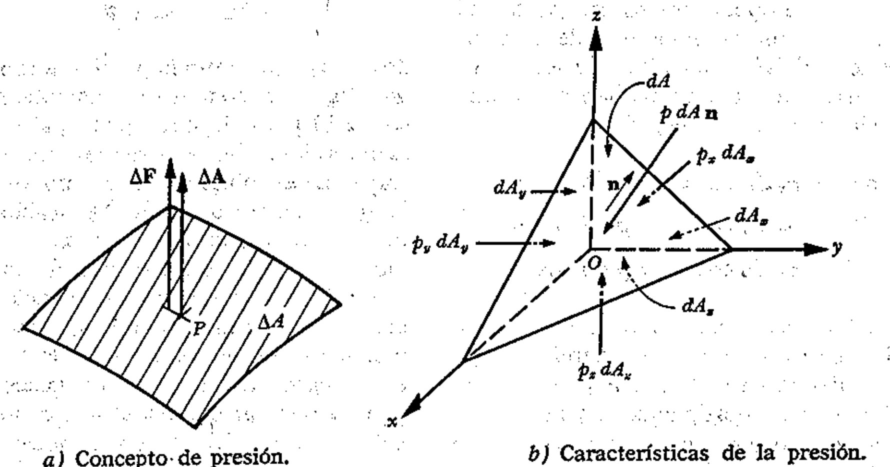
$$X = 0; \qquad Y = 0; \qquad Z = -\frac{Mg}{M} = -g$$

donde *g* es la aceleración local de la gravedad.

Se considera nuevamente el elemento de área ΔA que encierra al punto *P*, de la Fig. 1.2a. Si se acepta *a priori* que dentro de un fluido en reposo (o de un fluido ideal o no viscoso, en movimiento) no actúan fuerzas tangenciales sobre el elemento de superficie considerado, en el punto *P* actúa exclusivamente una fuerza $\Delta\mathbf{F}$ normal al elemento de superficie y paralela al vector $\Delta\mathbf{A}$. Es claro que dicha fuerza será tanto más pequeña como reducida sea el área ΔA del elemento considerado. Si ΔA se reduce de magnitud indefinidamente (siempre alrededor del punto *P* y con las restricciones de continuidad en el fluido), la relación $\Delta F/\Delta A$ entre la magnitud de la fuerza y del área se aproxima a un valor límite que se designa como *intensidad de presión* o, simplemente, *presión*; esto es, se define como presión en el punto *P* al límite siguiente:

$$-p = \lim_{\Delta A\to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

donde el signo negativo implica que la fuerza ΔF produce un esfuerzo de compresión. Las dimensiones de la presión



a) Concepto de presión.

b) Características de la presión.

Figura 1.2

corresponden también a las de un esfuerzo $[F L^{-2}]$.

Aparentemente la presión no sólo depende de la posición del punto sino también de la orientación del vector diferencial de superficie que se considere. Sin embargo, la presión en un punto es una magnitud escalar y, por lo tanto, es invariante cualquiera que sea la orientación del elemento de superficie para definirla (se observa que ha quedado definida como el cociente entre dos escalares).

En efecto, considerando cualquier elemento de superficie dA representado por el vector $d\mathbf{A}$ y definido a través del vector unitario $\mathbf{n} = \cos\alpha_x \mathbf{i} + \cos\alpha_y \mathbf{j} + \cos\alpha_z \mathbf{k}$, referido a un marco cartesiano de coordenadas; la dirección es normal al elemento dA, de tal modo que $d\mathbf{A} = dA\,\mathbf{n}$ ($\cos\alpha_x$, $\cos\alpha_y$, $\cos\alpha_z$, son los cosenos directores respecto de x,y,z, del vector $\mathbf{n}$) (Fig. 1.2b). En ausencia de fuerzas tangenciales, la fuerza de compresión normal al elemento dA quedará definida como sigue:

$$d\mathbf{F} = p\,dA\,\mathbf{n}$$

Si p fuera una magnitud vectorial tendría como componentes p_x, p_y, p_z, de tal manera que las componentes de la fuerza $d\mathbf{F}$ se podrían determinar de igual modo a partir de estas componentes, o también con la ecuación anterior:

$$dF_x = p_x\,dA\cos\alpha_x = p\,dA\cos\alpha_x$$
$$dF_y = p_y\,dA\cos\alpha_y = p\,dA\cos\alpha_y$$
$$dF_z = p_z\,dA\cos\alpha_z = p\,dA\cos\alpha_z$$

por lo cual $p_x = p_y = p_z = p$; esto es, la presión en un punto es independiente del área utilizada para definirla y es función escalar de las coordenadas de tal punto.

Conviene insistir que la presión en un punto no debe confundirse con la fuerza resultante de su intensidad; asimismo, carece de sentido decir que la presión actúa en cualquier dirección o en todas direcciones, pues se trata de una magnitud escalar. La magnitud, dirección y sentido de la fuerza que la presión genera quedan definidos a partir del elemento de superficie que se emplee; es una medida de distribución de la fuerza sobre cualquier superficie asociada a ella.

Aun cuando existen diferentes instrumentos para medir la presión, en realidad sólo sirven para determinar la diferencia que hay entre la presión de un punto del fluido y la atmosférica, de ahí que ésta se emplee comúnmente como presión de referencia, esto es, como cero arbitrario de la escala de medida. La diferencia de presiones registrada por el instrumento de medición se llama presión relativa o manométrica, p_m.

La condición de presión absoluta —cero— existe sólo en el vacío, ya que al no haber moléculas del fluido tampoco hay colisiones moleculares. Cuando el cero de la escala de presiones corresponde a estas condiciones la presión medida se llama absoluta, p_{ab}, o sea

$$p_{ab} = p_a + p_m$$

donde p_a representa la presión atmosférica del lugar, la cual no es constante (inciso 2.2.1) pues depende principalmente de la elevación sobre el nivel del mar y de factores meteorológicos. Sin embargo, para la gran mayoría de las aplicaciones en ingeniería no son de importancia los cambios de presión atmosférica de un lugar a otro y, por lo mismo, la variación de la presión absoluta para una de tipo manométrico o viceversa. No sucede lo mismo en el caso de un flujo de gases donde resulta necesario considerar presiones absolutas y, por lo mismo, conocer la presión atmosférica local.

La unidad más utilizada para la presión es el kg/cm². Las presiones de gran magnitud se expresan en atmósferas, atm (1 atm = 1.013 kg/cm²), o bien en kg/m².

1.3 Temperatura

La magnitud de la temperatura se puede relacionar con la actividad molecular que resulta de la transferencia de calor. Las escalas de medida se definen en términos de la expansión volumétrica de ciertos líquidos, comúnmente el mercurio; como un ejemplo se puede tomar la escala de temperatura Celsius o de grados centígrados, la cual se estableció de modo que el punto de congelación del agua corresponda al cero de la escala, y el de ebullición, en condiciones estándar a 100°C. El cero absoluto de cualquier escala de temperatura se fija por la condición de que cese la actividad molecular, producto de la transferencia de calor. En la escala de grados centígrados el cero absoluto corresponde a −273°C, pero por conveniencia se ideó una segunda escala de temperatura absoluta asociada a la primera, que se conoce como escala Kelvin; de este modo, °K = 273 + °C. Como ciertas magnitudes físicas dependen de los efectos termostáticos y termodinámicos, además de la temperatura y calor equivalentes en energía mecánica, su energía calorífica usualmente se mide en joules dentro del sistema métrico absoluto y en BTU para el sistema inglés absoluto.

1.4 Densidad y peso específico

La *densidad* ρ representa la masa de fluido contenida en la unidad de volumen; en los sistemas absoluto y gravitacional sus dimensiones son $[M L^{-3}]$ y $[F T^2 L^{-4}]$, respectivamente.

Desde un punto de vista matemático la densidad en un punto queda definida como:

$$\rho = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta v}$$

donde ΔM es la masa de fluido contenida en el elemento de volumen Δv que rodea al punto. Nuevamente aquí, Δv se reduce de tamaño alrededor de un punto, hasta aquel valor en que todavía el fluido se considere un medio continuo (ver 1.1.2).

Estrechamente asociado con la densidad está el *peso específico* γ que representa el peso de fluido por unidad de volumen; son sus dimensiones $[F L^{-3}]$.

Ambas propiedades ρ y γ se relacionan mediante la ley $\gamma = g\rho$, en que g designa la aceleración local de la gravedad, que resulta de aplicar la segunda ley de Newton a la unidad de volumen de fluido.

Otra forma de cuantificar la densidad o el peso específico de un líquido se hace refiriéndolos a los correspondientes al agua, esto es

$$\delta = \frac{\rho}{\rho_{agua}} = \frac{\gamma}{\gamma_{agua}};$$

se conoce como *densidad relativa* y no tiene dimensiones.

También se utiliza el concepto de *volumen específico* o volumen ocupado por la unidad de masa; esto es, queda definido como el recíproco de la densidad

$$v_s = \frac{1}{\rho}$$

y tiene como dimensiones $[L^3 M^{-1}]$.

La densidad de los líquidos depende de la temperatura y es prácticamente independiente de la presión, por lo que se pue-

den considerar incompresibles; en cambio, en los gases, varía con la temperatura y la presión que actúa, de acuerdo con la llamada *ecuación de estado de los gases perfectos* (ver 1.9). En ambos casos el peso específico depende, además, de la aceleración de la gravedad local.

En la Fig. 1.3 se muestra la variación de ρ y γ del agua con la temperatura, a la presión atmosférica a nivel del mar y la aceleración estándar de la gravedad. Los valores estándar para ρ y γ son:

$$\rho = 101.97 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4; \quad \gamma = 1\,000 \text{ kg/m}^3$$

que corresponden al agua pura a 4°C. (Los datos para dibujar la Fig. 1.3 fueron tomados de la referencia 1). Debe señalarse que las propiedades varían por el contenido de sal o de sedimento; por ejemplo, el agua de mar con el contenido normal de sal, de 3.5 % a 4°C, tiene una densidad $\rho = 104.76 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$ y un peso específico $\gamma = 1\,028 \text{ kg/m}^3$.

En la Fig. 1.4 se muestra la variación de ρ y γ del aire con la temperatura para la presión atmosférica a nivel del mar y la aceleración estándar de la gravedad. Los valores estándar para el aire corresponden a 15°C; valen $\rho = 0.125 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$ y $\gamma = 1.225 \text{ kg/m}^3$, es decir, el aire es, aproximadamente, 815 veces más ligero que el agua. (Los datos utilizados para dibujar la Fig. 1.4 fueron tomados de la referencia 2).

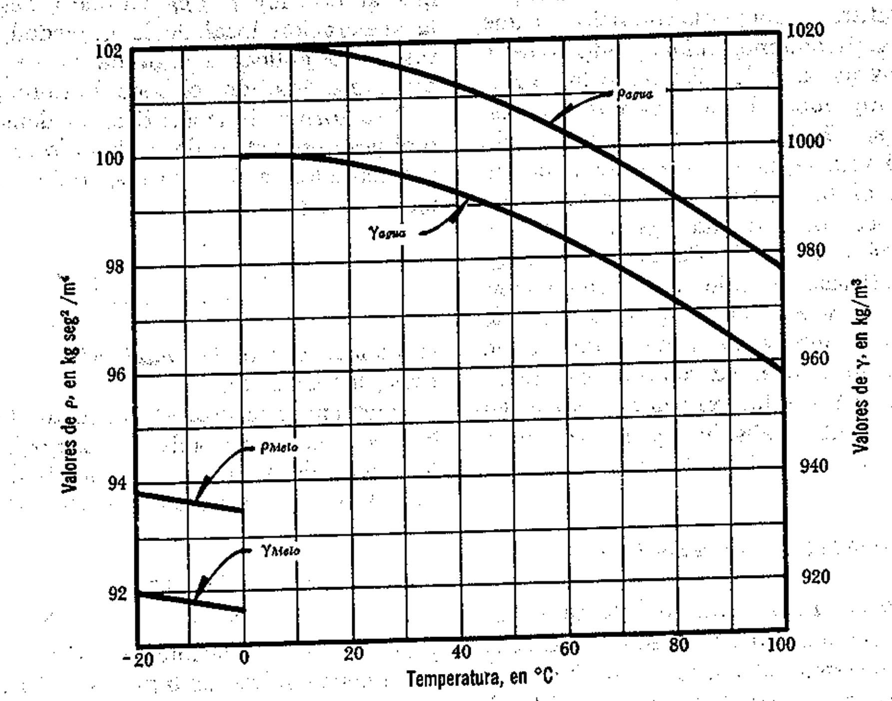


Figura 1.3. Densidad y peso específico del agua para temperaturas que se hallan entre —20 y 100°C, a la presión atmosférica al nivel del mar.

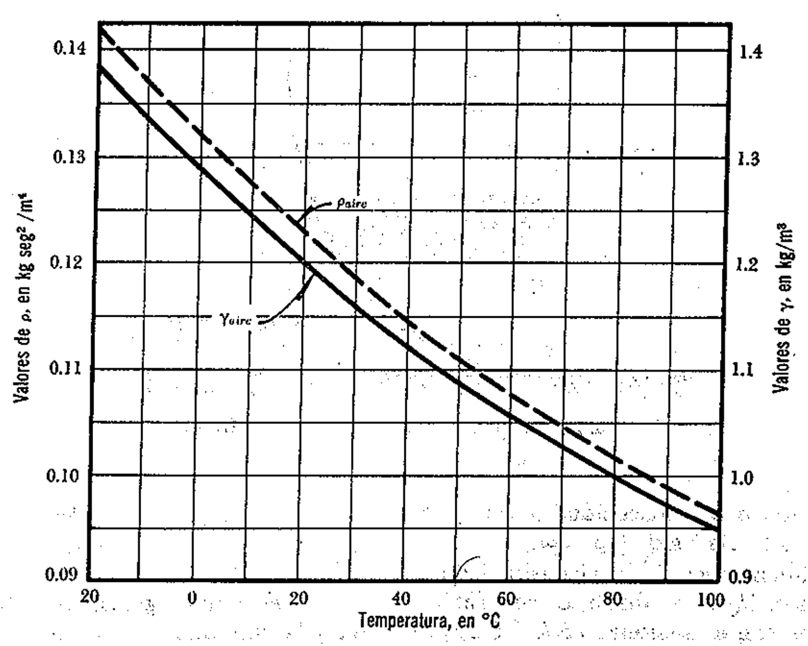


Figura 1.4. Densidad y peso específico del aire para temperaturas que se hallan entre —20 y 100°C, a la presión atmosférica al nivel del mar.

1.5 Viscosidad

La *viscosidad* de un fluido es una medida de su resistencia a fluir, como resultado de la interacción y cohesión de sus moléculas.

Si se considera el movimiento de un flujo sobre una frontera sólida fija, donde las partículas se mueven en líneas rectas paralelas, se puede suponer que el flujo se produce en forma de capas o láminas de espesor diferencial cuyas velocidades varían con la distancia y, normal a dicha frontera (Fig. 1.5).

Según Newton, el esfuerzo tangencial que se produce entre dos láminas separadas una distancia dy, y que se desplazan con velocidades (v) y $[v + (\partial v/\partial y)\, dy]$, vale

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.1}$$

De acuerdo con dicha ley, el esfuerzo tangencial es proporcional al gradiente transversal de velocidades $\partial v/\partial y$. La constante de proporcionalidad μ es una magnitud característica de la viscosidad del fluido y se conoce como viscosidad dinámica o simplemente, viscosidad.

De acuerdo con el perfil de velocidades, mostrado en la Fig. 1.5, es claro que el esfuerzo cortante generado entre el fluido y la pared es mayor al que hay entre las capas de fluido adyacente. Los llamados *newtonianos* se comportan conforme esta ley; en cambio, en los *no newtonianos* es distinto, pues en este grupo quedan comprendidos diferentes tipos (Fig. 1.6). En los casos extremos se encuentran: el *flui-*

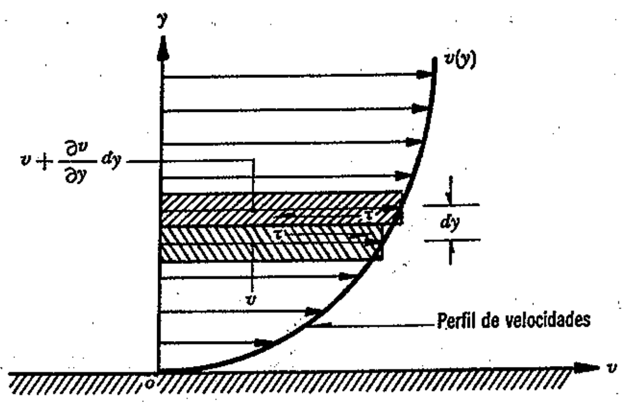


Figura 1.5 Sobre la viscosidad de un fluido.

do no viscoso con viscosidad $\mu = 0$ y, el *elástico*, con viscosidad $\mu = \infty$.

Las dimensiones de la viscosidad dinámica, en el sistema absoluto, son $[ML^{-1}T^{-1}]$ y, en el gravitacional, $[FL^{-2}T]$. Para el sistema absoluto centímetro-gramo masa-segundo, la equivalencia es g_m/cm seg, que es utilizada como unidad de viscosidad cinemática en este sistema y es conocida como *poise* en honor de Poiseuille:

$$1\,poise = 1\,\frac{g_m}{\text{cm seg}}$$

Para el sistema gravitacional es más común la unidad:

$$1\,\frac{\text{kg seg}}{\text{m}^2} = 98.0665\,\frac{g_m}{\text{cm seg}}$$

La viscosidad dinámica es función, principalmente, de la temperatura y la presión. La dependencia respecto de la presión es prácticamente despreciable para los líquidos y pequeña o despreciable para la mayoría de los gases y vapores, a menos que la presión resulte muy grande. En tanto que la viscosidad de los líquidos disminuye con la temperatura, la de los gases aumenta.

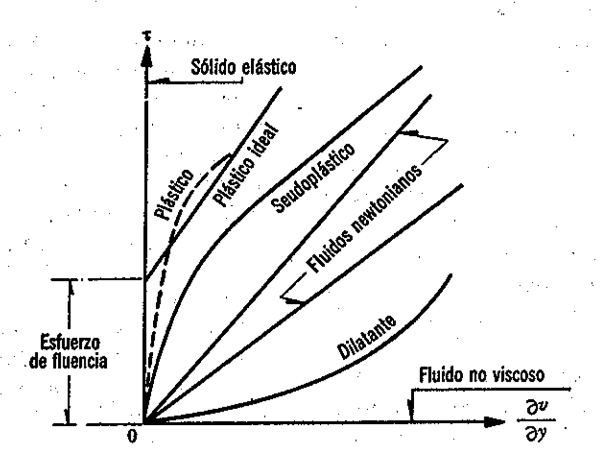


Figura 1.6 Tipos de comportamiento reológico de un fluido.

En la Fig. 1.7 se muestra la variación de μ del agua y del aire, con la temperatura. (Se ha dibujado con datos tomados de la referencia 3).

Para los cálculos prácticos es más conveniente relacionar la viscosidad dinámica del fluido y su densidad, con la fórmula

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \qquad (1.2)$$

donde ν es la *viscosidad cinemática.*

La ventaja de usar esta nueva propiedad es evidente, ya que sus dimensiones son $[L^2T^{-1}]$, esto es, independientes de los conceptos de masa y fuerza. En el sistema CGS se emplea comúnmente la unidad

$$1\,stokes = 1\,\frac{\text{cm}^2}{\text{seg}} = 0.0001\,\frac{\text{m}^2}{\text{seg}}$$

El coeficiente ν presenta características semejantes a las de μ.

En la Fig. 1.8 se muestran los valores de ν para el agua y el aire, en función de la temperatura y a la presión atmosférica al nivel del mar, con datos tomados de la referencia 3.

De acuerdo con la Ec. (1.1), el esfuerzo tangencial en cualquier punto de un fluido puede desaparecer en alguno de los casos siguientes:

a) Si se desprecia la acción de viscosidad (fluido *no viscoso*).

b) Si la distribución de velocidades es uniforme (v = constante) y por tanto $\partial v/\partial y = 0$; sucede cuando el flujo es turbulento y el efecto viscoso es despreciable.

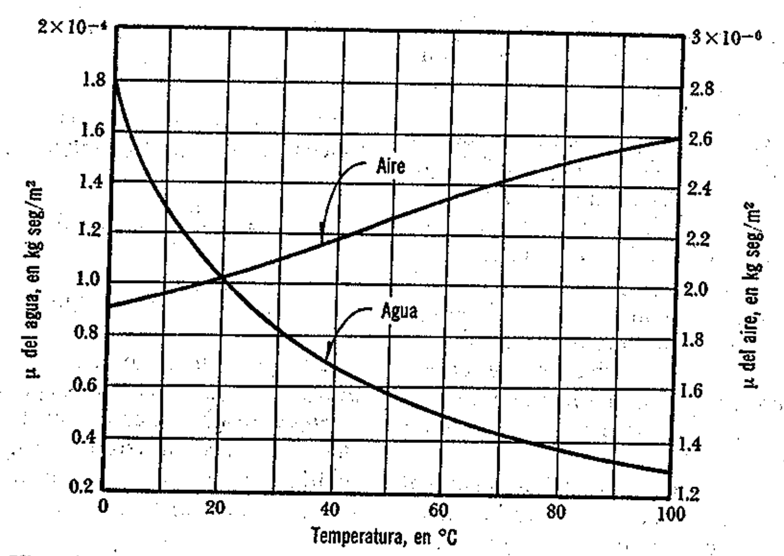


Figura 1.7. Viscosidad dinámica del agua y del aire a la presión atmosférica al nivel del mar.

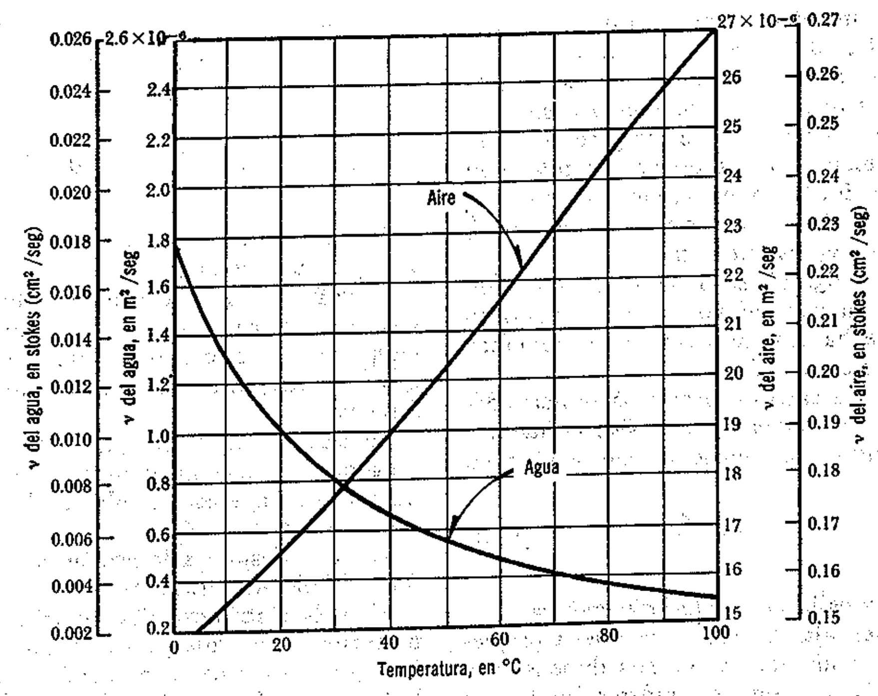


Figura 1.8. Viscosidad cinemática del agua y del aire a la presión atmosférica del nivel del mar.

c) En un líquido en reposo donde la velocidad en cada punto (y como consecuencia $\partial v/\partial y$) vale cero.

Problema 1.1. Un líquido con viscosidad dinámica de 1.5×10^{-3} kg seg/m² fluye sobre una pared horizontal. Calcular el gradiente de velocidades y la intensidad del esfuerzo tangencial en la frontera y en puntos situados a uno, dos y tres centímetros desde la misma (Fig. 1.9), suponiendo: **a)** una distribución lineal de velocidades, y **b)** una distribución parabólica de velocidades. La parábola tiene su vértice en el punto A y el origen del sistema de ejes está en B.

Solución a). Para la distribución lineal de velocidades, la relación entre la velocidad y la distancia y, es $v = 15\,y$; el gradiente de velocidades es

$$\frac{dv}{dy} = 15$$

Para $y = 0$, $v = 0$; $dv/dy = 15$ seg⁻¹ entonces, el esfuerzo tangencial vale

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} = 0.0015 \times 15;$$

$$\tau = 0.0225 \text{ kg/m}^2$$

el cual es constante para el resto de los puntos, ya que dv/dy no depende de y.

Solución b). La ecuación de la parábola debe satisfacer la condición de que la velocidad sea cero en el punto B sobre la frontera, siendo la velocidad:

$$v = 0.45 - 500\,(0.03 - y)^2$$



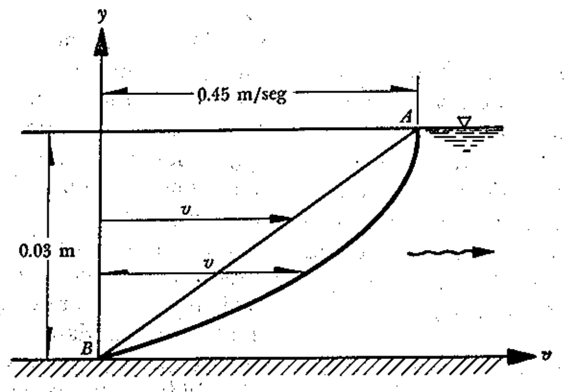


Figura 1.9. Esquema aclaratorio del problema 1.1.

por lo que el gradiente de velocidades resulta $dv/dy = 1\,000\,(0.03 - y)$.

En la siguiente tabla se presentan los resultados para τ.

y m	v m/seg	$\frac{dv}{dy}$ seg⁻¹	$\tau = 0.0015 \frac{dv}{dy}$ kg/m²
0	0	30	0.045
0.01	0.25	20	0.030
0.02	0.40	10	0.015
0.03	0.45	0	0.000

El esfuerzo tangencial vale cero en el punto A, donde ocurre la velocidad máxima.

Problema 1.2. Un cilindro de 0.122 m de radio gira concéntricamente dentro de otro cilindro fijo de 0.128 m de radio, ambos con 0.30 m de longitud. Determinar la viscosidad del líquido que llena el espacio entre ambos cilindros si se necesita un par motor de 0.09 kgm para mantener una velocidad angular de 60 rpm en el cilindro móvil.

Solución. El par motor se transmite al cilindro exterior a través de las capas del líquido. La velocidad tangencial del cilindro interior es

$$v = \omega r = \frac{60 \times 2\pi}{60} \times 0.122 = 0.767 \text{ m/seg}$$

Se puede escribir que el par motor aplicado es igual al resistente

$$0.09 = \tau\,(2\pi\, r \times 0.30)\,r$$

esto es, con $r = 0.122$ m para el cilindro interior, el esfuerzo cortante sobre dicho cilindro vale

$$\tau = \frac{0.04775}{r^2} = \frac{0.04775}{(0.122)^2} = 3.21 \text{ kg/m}^2$$

y el gradiente de velocidades sobre el cilindro interior es

$$\frac{dv}{dr} = \frac{0.767}{0.006} = 128 \text{ seg}^{-1}$$

y la viscosidad será:

$$\mu = \frac{\tau}{dv/dr} = \frac{3.21}{128} = 0.00251 \text{ kg seg/m}^2$$

1.6 Compresibilidad

La *compresibilidad* de un fluido es una medida del cambio de volumen (y por lo tanto de su densidad) cuando se somete a diversas presiones. Cuando un volumen v de un líquido de densidad ρ y presión p se somete a compresión por efecto de una fuerza F, como se muestra en la Fig. 1.10, la masa total del fluido ρv permanece constante, es decir, que

$$d(\rho v) = \rho\, dv + v d\rho = 0$$

De donde resulta:

$$-\frac{v}{dv} = \frac{\rho}{d\rho}$$

Al multiplicar ambos miembros por dp, se obtiene

$$E_v = -\frac{dp}{dv/v} = +\frac{dp}{d\rho/\rho} \quad (1.3)$$

La cantidad E_v se conoce como *módulo de elasticidad volumétrica* del fluido y es análogo al módulo de la elasticidad lineal empleado para caracterizar la elasticidad de los sólidos. Por tanto, el módulo de elasticidad volumétrica se define como el cambio de presión dividido entre el cambio asociado en el volumen (o densidad) por unidad de volumen (o densidad), siendo una medida directa de la compresibilidad del fluido. Sus dimensiones son las de un esfuerzo $[F L^{-2}]$. El signo negativo de la Ec. (1.3) indica una disminución en el volumen v al aumentar la presión p.

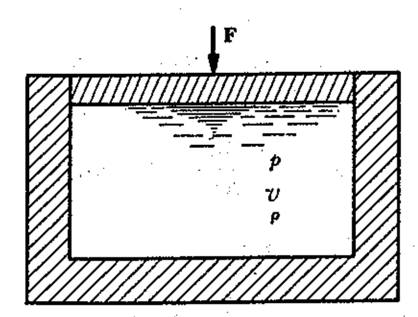


Figura 1.10. Compresibilidad de un fluido.

La mayoría de los fluidos poseen un módulo de elasticidad volumétrica relativamente grande que depende de la temperatura. Esto significa que ocurren variaciones pequeñas de volumen o de densidad inclusive para variaciones grandes de presión, y salvo en aquellos fenómenos en que se producen incrementos violentos de presión y temperatura (golpe de ariete, flujos a gran velocidad, flujos con transferencia de calor), en los restantes casos no son de importancia. Lo anterior es particularmente cierto en los líquidos porque se consideran incompresibles.

El módulo de elasticidad volumétrica del agua varía principalmente con la temperatura, como se muestra en la Fig. 1.11 (con datos tomados de la referencia 4) donde el valor de las condiciones estándar es 2.09×10^8 kg/m², es decir, aproximadamente 100 veces más compresible que el acero; en cambio, para el aire el valor estándar resulta de $0.000\,105 \times 10^8$ kg/m², esto es, 20 000 veces aproximadamente más compresible que el agua; sin embargo, la variación depende de la naturaleza del proceso termodinámico que se efectúa, indicado en la sección 1.9.

Es común designar la compresibilidad como el recíproco del módulo de elasticidad volumétrica: $\beta = 1/E_v$, de dimensiones $[L^2 F^{-1}]$.

Problema 1.3. Encontrar la variación de volumen que experimenta 1 m³ de agua a 20°C cuando se somete a un incremento de presión de 20 kg/cm².

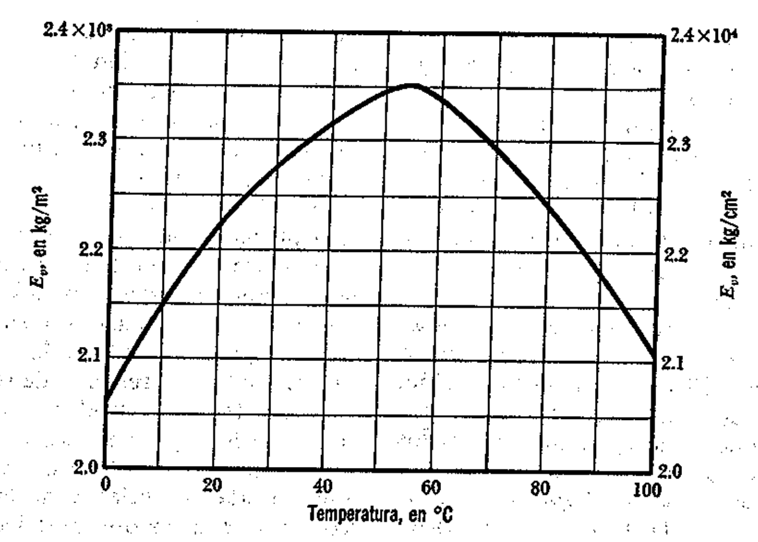


Figura 1.11. Módulo de elasticidad volumétrica del agua.

Solución. De la Fig. 1.11 se tiene que el módulo de elasticidad volumétrica del agua a 20°C es $E_v = 2.225 \times 10^4$ kg/cm² y, por la Ec. (1.3), la variación de volumen resulta:

$$\Delta v = -\frac{v\Delta p}{E_v} = -\frac{1.00\times 20}{2.225\times 10^4} = -0.000899 \text{ m}^3$$

1.7 Presión de vaporización

Todos los líquidos tienden a evaporarse al cambiar su estado líquido por gaseoso; es decir, que en la inmediata vecindad de la superficie libre de un líquido algunas de sus moléculas escapan hacia el medio por encima de dicha superficie. En la misma manera, si la superficie libre permanece en un nivel fijo algunas de las moléculas libres regresan al líquido y puede alcanzarse un equilibrio en el intercambio cuando es igual el número de las que salen y las que entran.

Si es aire el gas que hay en el medio, entonces no sólo se presentaría un equilibrio entre el aire y las moléculas del líquido sino que también habría presión parcial del aire, sumada a la del vapor de agua. Al haber este equilibrio la temperatura —del líquido y del gas— es la misma, con lo cual la presión parcial del vapor es justamente la *presión de vaporización* del líquido a la temperatura dada.

Las moléculas que dejan el líquido dan lugar a la presión de vaporización, cuya magnitud es la misma mediante la cual escapan las moléculas. Cuando la presión de vaporización es igual a la presión parcial del vapor encima de la superficie, y además se establece el equilibrio en el intercambio de moléculas, se dice que el gas está saturado con el vapor. El valor de la presión de vaporización, para la cual esto ocurre, se llama presión de saturación.

La vaporización puede producirse también con la ebullición del líquido, durante la cual escapan sus moléculas formando vapor, para luego establecer el intercam-

bio con las del gas. Para que la ebullición ocurra se debe alcanzar el equilibrio en el intercambio de moléculas debido a un incremento en la temperatura, hasta lograr la presión de vaporización (al igualar o exceder la presión total aplicada sobre la superficie libre) o bien por una reducción de la presión total en el interior del líquido, hasta que sea igual o menor a la presión de vaporización.

Este fenómeno se presenta en la práctica cuando en un escurrimiento ocurren grandes descensos locales de la presión, por debajo de la atmosférica. Es el caso de las grandes caídas de presión en los álabes de las turbinas hidráulicas que conducen, a pesar de las bajas temperaturas del agua, a la formación de vapor cuya aparición y consecuencias se conocen como *cavitación.*

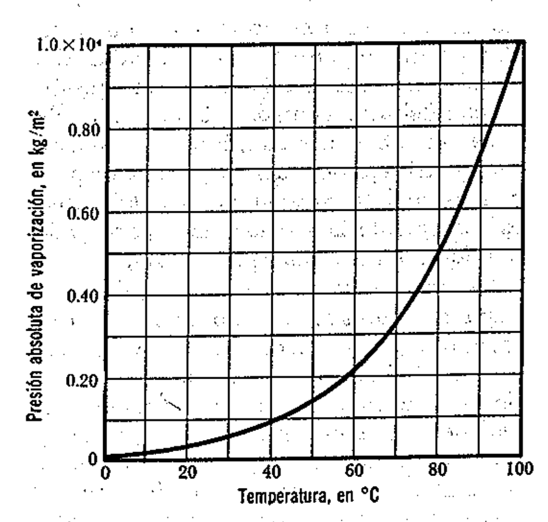


Figura 1.12. Presión absoluta de vaporización del agua.

Efectos semejantes al de ebullición ocurren si un líquido contiene gases disueltos. Si la presión del líquido es reducida lo suficiente, los gases disueltos se liberan en burbujas, para lo cual es necesario una reducción de presión hasta un valor menor que la de ebullición. Un aumento subsiguiente de la presión puede causar burbujas de vapor o de otros gases que colapsan, derivándose de aquella grandes fuerzas de impacto.

En la Fig. 1.12 se muestra cómo la presión absoluta de vaporización del agua pura varía con la temperatura en grados C. Sin embargo, debe advertirse que las impurezas del agua, como sales y gases disueltos, modifican los valores indicados, aumentando las presiones de vaporización para una temperatura dada, de suerte que la cavitación aparece para presiones, por debajo de la atmosférica, más pequeñas que las que se obtienen de la figura. Es común aceptar valores prácticos de la presión absoluta de vaporización (para las temperaturas normales) del orden de 0.2 a 0.3 kg/cm^2 (0.2 a 0.3×10^4 kg/m^2) es decir, presiones negativas por debajo de la atmosférica de 0.7 a 0.8 kg/cm^2 (0.7 a 0.8×10^4 kg/m^2).

1.8 Tensión superficial y capilaridad

Alrededor de cada molécula de un líquido en reposo se desarrollan fuerzas moleculares de cohesión, que actúan dentro de una pequeña zona de acción de radio r. Las moléculas del líquido que se encuentran a una profundidad mayor que r producen fuerzas de atracción que se compensan; lo contrario acontece con las moléculas que se encuentran dentro de la capa de espesor r en la proximidad de la superficie libre. Dentro de esta capa se ejercen fuerzas resultantes de *cohesión* en dirección hacia el líquido, por lo reducido de las fuerzas de cohesión del medio que se encuentra encima de la superficie libre (por ejemplo, aire). Estas fuerzas impulsan a las moléculas inferiores a un movimiento ascendente,

TABLA 1.1. Tensión superficial agua-aire

T, en °C	0	10	20	30	40	50	60	80	100
σ, en g/cm	0.0769	0.0754	0.0739	0.0725	0.0709	0.0692	0.0673	0.0638	0.006

que sólo es posible al desarrollarse un trabajo por el movimiento de las moléculas, equivalente al incremento de energía potencial ganado por las mismas.

La resultante de las fuerzas de cohesión cuya dirección es perpendicular a la superficie libre del líquido o a la de contacto entre dos líquidos que no se mezclan, se equilibra por la acción de las componentes verticales de la fuerza que se genera sobre dichas superficies; medida por unidad de longitud perpendicular a una dirección especificada. Esta fuerza se conoce como *tensión superficial*, se designa por σ y tiene las dimensiones $[F L^{-1}]$.

La tensión superficial tiene la misma magnitud en todos los puntos de la superficie de frontera o intercara y es independiente de la dirección (o sólo dependiente de los medios a ambos lados de la superficie de frontera) y de la temperatura.

En la tabla 1.1 se presentan los valores de σ para los medios agua-aire en términos de la temperatura y, en la tabla 1.2, se muestran los valores para diferentes medios y las temperaturas usuales. Ambas tablas se formularon con datos de las referencias 1 y 5.

TABLA 1.2. Tensión superficial de contacto entre algunos fluidos

Fluidos	σ, *en g/cm*
Benceno-aire	0.0295
Mercurio-aire	0.47
Mercurio-agua	0.0401
Alcohol etílico-aire	0.0258
Alcohol etílico-agua	0.0023
Aceite de oliva-aire	0.0327
Aceite de oliva-agua	0.021
Tetracloruro de carbono-aire	0.0272
Aceite lubricante-aire	0.0357 a 0.0387
Aceite crudo-aire	0.0238 a 0.0387
Mercurio-vidrio	0.48
Agua-vidrio	0.077

La tensión superficial hace inestable la superficie plana de frontera en que se ejerce, lo cual queda demostrado por la forma esférica que adquiere una gota de líquido cuando se libera hacia el aire y trata de adoptar la mínima superficie exterior de configuración estable para su volumen.

Si un líquido está limitado por una pared sus moléculas son atraídas no sólo por las fuerzas del medio superior, sino además por las de la propia pared. Si las fuerzas moleculares de la pared son mayores que las de las moléculas vecinas de líquido, éste se extenderá sobre la pared; es decir, *la moja.* Si acontece lo contrario (por ejemplo, con el mercurio) el líquido repele a la pared y entonces *no la moja.* Ambas situaciones se muestran en la Fig. 1.13 donde puede observarse

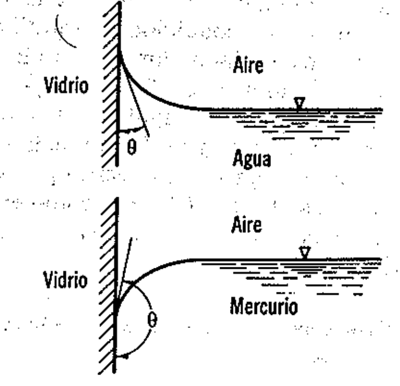


Figura 1.13. Formas de la superficie de contacto entre líquido-pared-aire.

que en el punto de contacto entre la pared y el líquido las tangentes forman un ángulo θ.

El ángulo θ de contacto se puede obtener a partir de las condiciones de equilibrio de la tensión superficial, sobre las fronteras de los tres medios. En la Fig. 1.14 se muestran las tensiones superficiales σ_{12} (gas contra líquido), σ_{13} (gas contra pared) y σ_{23} (líquido contra pared), actuando sobre las superficies de frontera; la ecuación de equilibrio es

$$\sigma_{13} - \sigma_{23} = \sigma_{12} \cos \theta$$

Figura 1.14. Capilaridad.

Esta condición es conocida como ley de *capilaridad* y permite el cálculo de θ si se conocen las tensiones superficiales de los tres medios. Si el término $\sigma_{13} - \sigma_{23}$ de la ecuación anterior —conocido como tensión de *adherencia*— es mayor que σ_{12}, entonces no existe condición de equilibrio y la pared es mojada por el líquido al adquirir θ el valor cero. Si $\sigma_{12} > \sigma_{13} - \sigma_{23}$ y además positivo, el ángulo θ es agudo como en el caso del agua. Si la tensión de adherencia es negativa, es decir, $\sigma_{23} > \sigma_{13}$, el ángulo θ es obtuso ($\theta > 90°$) como en el caso del mercurio y vidrio, para el que $\theta = 138°$.

1.9 Procesos y propiedades térmicas de los gases

Las propiedades térmicas de los gases no se pueden explicar con base, exclusivamente en consideraciones mecánicas como las anteriores. La adición de la temperatura, como una variable en el sistema, implica utilizar las ecuaciones de estado y las leyes de los *procesos termodinámicos* para describir completamente dichas propiedades.

Para cada estado interno, la condición de una substancia es única y queda descrita a través de sus propiedades. Se emplean dos clases de relaciones en la determinación de los estados de una substancia: en primer lugar, *la ecuación de estado* que se refiere al mínimo número de propiedades o condiciones necesarias para determinar tanto su estado como otras propiedades; en segundo, *la ley del proceso* mediante el cual se produce el cambio de condiciones y propiedades de un estado a otro, de acuerdo con el control efectuado que puede ser a temperatura y presión constantes, transferencia de calor nula, etc.

Ecuación de estado de un gas perfecto. Las ecuaciones de estado para la mayoría de los líquidos son muy complejas y sólo pueden expresarse para un número limitado de condiciones, especialmente cuando es necesario expresarlas incluyendo varios efectos, tales como presión, temperatura, volumen, etc. De ahí que resulte más práctico el empleo de tablas y gráficas de sus propiedades, más que las propias ecuaciones de estado pues, por fortuna, en los líquidos estas propiedades varían poco con la temperatura.

Las ecuaciones de estado para gases son complejas para condiciones cercanas a su punto de condensación. Aproximaciones útiles se obtienen sólo para condiciones diferentes a las del punto de condensación, y particularmente para aquellas cuyo comportamiento corresponde al de un gas perfecto, esto es, aquel que sigue la ecuación de estado de los gases perfectos.

$$p = g R_0 \rho T = R \rho T \qquad (1.4)$$

donde

- g aceleración de la gravedad, en m/seg²
- p presión absoluta, en kg/m²
- T temperatura absoluta, en grados K
- R_0 una constante característica de cada gas, igual al trabajo en kg m que debe desarrollarse para incrementar a un grado K la temperatura de un kg del gas, a presión constante (sus dimensiones son kg m/kg °K y vale 29.27 para el aire)
- ρ densidad del gas, en kg seg²/m⁴

además, $R = g R_0$.

Se ha encontrado que los resultados experimentales concuerdan perfectamente con los obtenidos de la Ec. (1.4) para la mayoría de los gases reales.

Problema 1.4. Calcular la densidad del aire: **a)** a la presión atmosférica a nivel del mar y a 15°C; **b)** a 1.4 kg/cm² de presión absoluta y 37°C.

Solución a). Si la presión absoluta del aire a nivel del mar es 1.033 kg/cm² (10 330 kg/m² y la temperatura de 15°C corresponde a 288°K, entonces de la Ec. (1.4) y con $R_0 = 29.27$ resulta:

$$\rho = \frac{p}{g R_0 T} = \frac{10\,330}{9.8 \times 29.27 \times 288} =$$
$$= 0.125 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$$

lo cual coincide con el valor obtenido de la Fig. 1.4.

Solución b). Como la presión de 1.4 kg/cm² es igual a 14 000 kg/m² y la temperatura de 37°C corresponde a 310°K, por tanto, de la misma Ec. (1.4) se obtiene:

$$\rho = \frac{p}{g R_0 T} = \frac{14\,000}{9.8 \times 29.27 \times 310} =$$
$$= 0.15744 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$$

Procesos termodinámicos de los gases perfectos. La adición de una pequeña cantidad de calor a un sistema produce un estado transitorio de eventos muy complejos, dado que la temperatura y presión varían de un punto a otro en tanto que el sistema alcanza una nueva condición de equilibrio. Se ha visto que sólo las condiciones inicial y final del estado termodinámico se caracterizan por una temperatura uniforme única. En consecuencia, un sistema que sufra cualquier cambio físico no puede, en general, ser considerado homogéneo, esto es, un sistema con temperatura uniforme en su interior y en equilibrio térmico. Sin embargo, si los cambios que ocurren en cualquier periodo finito son infinitamente pequeños, el sistema se mantendría continuamente en estado de equilibrio y, por lo mismo, se puede considerar homogéneo. La gran ventaja teórica de dicho proceso (infinitamente lento) reside en que éste es *reversible*, es decir, puede ser realizado en cualquier orden sin afectar los resultados.

A continuación se describen los procesos y las leyes más importantes de los gases perfectos.

a) *Proceso a volumen constante.* Los cambios de temperatura o de presión se realizan sin cambiar el volumen del gas; esto es, el volumen específico

$$v_s = \text{constante}$$

b) *Proceso a presión constante.* Se conoce también como *isobárico* y se efectúa sin cambio en la presión del gas; esto es, de la Ec. (1.4) se tiene que

$$\frac{v_s}{T} = \text{constante}$$

c) *Proceso a temperatura constante.* También llamado *isotérmico*, representa un proceso en el cual la adición de calor al gas produce cambios de presión y, además, una transformación de esa energía calorífica en trabajo mecánico proporcionado por el gas. De la Ec. (1.4)

$$\frac{p}{\rho} = RT = \text{constante}$$

$$p\,v_s = \text{constante}$$

d) *Proceso adiabático* (sin transferencia de calor). En este proceso no hay adición de calor al gas, $Q = 0$. Si el proceso es adiabático reversible (sin transferencia de calor y sin fricción) se denomina *isentrópico* y es válida la siguiente ecuación:

$$\frac{p}{\rho^k} = \text{constante} \qquad (1.5)$$

donde κ es una constante característica de cada gas, que vale 1.4 para el aire.

e) *Proceso politrópico.* En general, se puede tener una relación entre la presión y el volumen para cada uno de los procesos precedentes:

$$p\,v_s^n = \frac{p}{\rho^n} = \text{constante} \qquad (1.6)$$

donde el exponente n adquiere un valor distinto de acuerdo con el proceso que se trate:

$n = 0$ (proceso isobárico)
$n = 1$ (proceso isotérmico)
$n = \kappa$ (proceso isentrópico)
$n = \infty$ (proceso isométrico)

La Ec. 1.6 se conoce como *ecuación politrópica de estado de los gases perfectos.*

La representación gráfica de los procesos anteriores se presenta en la Fig. 1.15 a través del sistema de variables independientes p y v_s.

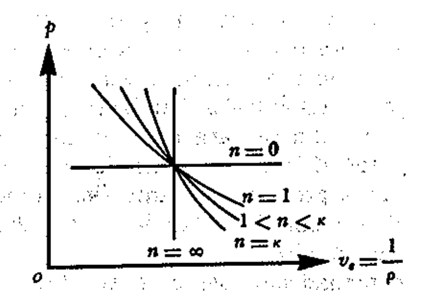


Figura 1.15. Plano p—v_s.

Se define como *calor específico* C_s de un gas a la cantidad de calor necesaria para elevar en la unidad de temperatura a la unidad de masa. Esto es:

$$C_s = \frac{dQ}{dT}$$

Siendo sus dimensiones usuales k cal/kg$_m$ °K o k J/kg$_m$ °K.

El calor específico depende del proceso por el cual se añade el calor, siendo de particular interés los valores correspondientes a los procesos de volumen constante (C_v) y de presión constante (C_p). Se pueden, además, demostrar las siguientes relaciones:

$$C_p = C_v + R \qquad (1.7)$$

$$\frac{C_p}{C_v} = \kappa \qquad (1.8)$$

$$C_p = \frac{R\kappa}{\kappa - 1} \qquad (1.9)$$

$$C_v = \frac{R}{\kappa - 1} \qquad (1.10)$$

donde κ es el mismo exponente de la ecuación para el proceso isentrópico.

El módulo de elasticidad de un gas depende de la naturaleza del proceso termodinámico con que se efectúe el cambio de presión. Si el proceso es isotérmico, la Ec. (1.4) se puede expresar en forma logarítmica como

$$\ln p = \ln \rho + \ln (RT)$$

cuya diferencial (con R y T constantes) es

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho}$$

Por tanto, de acuerdo con la Ec. (1.3), el módulo de elasticidad para una compresión isotérmica es

$$E_v = \frac{dp}{d\rho/\rho} = p \qquad (1.11)$$

o sea igual a la presión absoluta.

Si la compresión del gas es adiabática y reversible (isentrópica), la forma logarítmica de la ecuación correspondiente es

$$\ln p - \kappa \ln \rho = \ln \text{ (constante)}$$

cuya diferencial es

$$\frac{dp}{p} = \kappa \frac{d\rho}{\rho}$$

Por consiguiente, para una compresión isentrópica se obtiene que

$$E_v = \frac{dp}{d\rho/\rho} = \kappa\, p \qquad (1.12)$$

Problema 1.5. Calcular C_p, C_v, E_{vi} y E_{va} para el aire, considerando que $R_0 = 29.27$ kg m/kg °K y $\kappa = 1.4$.

Solución. R_0 posee el mismo valor si las unidades son kg$_m$ m/kg$_m$ °K, por tanto

$$R = g\,R_0 = 9.8 \times 29.27 = 286.846 \text{ kg}_m \text{ m}^2/\text{kg}_m \text{ seg}^2 \,°\text{K}$$

$$C_p = \frac{286.846 \times 1.4}{0.4} = 1\,003.96 \text{ kg}_m \text{ m}^2/\text{kg}_m \text{ seg}^2 \,°\text{K}$$

$$C_v = \frac{286.846}{0.4} = 717.115 \text{ kg}_m \text{ m}^2/\text{kg}_m \text{ seg}^2 \,°\text{K}$$

o bien

$$C_p = 1\,003.96 \text{ J/kg}_m \,°\text{K} = 0.240 \text{ cal/g}_m \,°\text{K}$$

$$C_v = 717.115 \text{ J/kg}_m \,°\text{K} = 0.171 \text{ cal/g}_m \,°\text{K}$$

1.10 Velocidad de las ondas sonoras en el seno de un fluido

Las perturbaciones de presión, como las ondas sonoras, se transmiten en el interior de un fluido —en todas direcciones— modificando la densidad del mismo por efecto de su compresibilidad. De la Ec. (1.3) la magnitud

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{E_v}{\rho}} \qquad (1.13)$$

representa también una propiedad del fluido, cuyas dimensiones son $[L\,T^{-1}]$, donde

c velocidad de las ondas sonoras, en m/seg
E_v módulo de elasticidad del fluido, en kg/m²
ρ densidad, en kg seg²/m⁴

Se demuestra que c representa justamente la velocidad o celeridad con que se transmiten las ondas sonoras dentro del fluido.

En los líquidos el valor de c depende principalmente de la temperatura; en los gases, los cambios de densidad causados por ondas de presión ocurren prácticamente sin fricción y adiabáticamente. Usando el módulo de elasticidad volumétrico isentrópico (Ec. 1.12) se obtiene:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}, \text{ en m/seg}$$

Las magnitudes de p y ρ (en kg/m² y kg seg²/m⁴, respectivamente) están relacionadas por una ecuación de estado. Así, de la Ec. (1.4), la anterior para un gas perfecto, se puede escribir como sigue:

$$c = \sqrt{\kappa g R_0 T} \qquad (1.14)$$

Lo cual demuestra que la velocidad del sonido en un gas perfecto depende sólo de su temperatura.

Problema 1.6. Calcular la velocidad de las ondas sonoras en:

a) Agua, a una temperatura de 4°C.
b) Aire, a una temperatura de 15°C, $\kappa = 1.4$ y $R_0 = 29.27$ kg m/kg °K.

Solución a). Para el agua en condiciones estándar:

$$E_v = 2.10 \times 10^8 \text{ kg/m}^2 \text{ (Fig. 1.11)}$$
$$\rho = 101.97 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4 \text{ (Fig. 1.3)}$$

De la Ec. (1.13) resulta que

$$c = \sqrt{\frac{2.1 \times 10^8}{101.97}} = 1\,435 \text{ m/seg}$$

Solución b). La temperatura absoluta del aire es

$$T = 273 + 15 = 288°\text{K}$$

Substituyendo en la Ec. (1.14) resulta que

$$c = \sqrt{1.4 \times 9.807 \times 29.27 \times 288} = 340.20 \text{ m/seg}$$

Es posible comprobar que con una velocidad del aire, de 50 m/seg, su densidad aumenta 1 %, es decir, que prácticamente permanece incompresible; con 100 m/seg aumenta 4 % y, con 200 m/seg 16 %. Para velocidades mayores el aire debe considerarse compresible, pues ocurren otros fenómenos que no pueden despreciarse.

Comparando el valor de c para el agua y el aire, se observa que a medida que aumenta la compresibilidad del fluido, disminuye la velocidad de las ondas de sonido.

PROBLEMAS

1. Explique la diferencia entre un fluido real y uno ideal.
2. En el océano la presión a 8 000 m de profundidad es de 1 050 kg/cm². Suponiendo un peso específico en la superficie de 1 025 kg/m³ y que el módulo de elasticidad promedio es de 23 000 kg/cm² para este intervalo de presiones, calcular: *a)* el cambio de densidad entre la superficie y la profundidad de 8 000 m; *b)* el volumen y peso específico a esa profundidad.
3. Indicar en la Fig. 1.5 el punto en que es máximo el esfuerzo cortante, explicando su afirmación.
4. Una flecha de 15 cm de diámetro gira a 1 800 rpm en un rodamiento estacionario de 0.30 m de longitud y 15.05 cm de diámetro interior. El espacio uniforme entre la flecha y el rodamiento está ocupado por aceite de viscosidad 1.755×10^{-3} kg seg/m². Determinar la potencia requerida para vencer la resistencia viscosa en el rodamiento. *Nota:* Potencia = fuerza × velocidad.
5. Un aceite combustible, cuya viscosidad es de 0.0303 kg seg/m², fluye dentro de una tubería cilíndrica de 0.15 m de diámetro. La velocidad en todos los puntos de radio r está dada por la ecuación $v = 6.41\,(R^2 - r^2)/\mu$ (m/seg), donde R es el radio de la tubería en m.

Calcular la intensidad del cortante viscoso en los puntos cuyo radio es $r = R/2$.
6. Fluye aire a 4°C y 1.055 kg/cm² de presión absoluta a lo largo de una superficie de terreno plano, con un perfil de velocidades semejante al de la Fig. 1.5 y que en la inmediata vecindad del terreno sigue la ecuación

$$v = 40\,y - 856\,y^3$$

donde y es el desnivel entre la superficie del terreno y el punto, en m, y v la velocidad, en m/seg. Determinar el esfuerzo cortante sobre el terreno.
7. Una película uniforme de aceite con viscosidad de 1.4 poises y de 0.025 mm de espesor separa dos discos montados coaxialmente, de 0.20 m de diámetro. Ignorando el efecto de las orillas, calcular el par motor necesario para que un disco gire con velocidad relativa de 400 rpm respecto del otro.
8. Un bloque cúbico de 0.20 m de arista y 25 kg de peso, se deja resbalar sobre un plano inclinado 20° respecto de la horizontal, sobre el cual existe una película de aceite de 2.2×10^{-4} kg seg/m² de viscosidad y 0.025 mm de espesor. Determinar la velocidad a la que descenderá el bloque, considerando la hipótesis de distribución lineal de velocidades.
9. *a)* Escribir la relación de esfuerzo cortante para el plástico ideal de Bingham, equivalente a la Ec. (1.1) de un fluido newtoniano. *b)* Un plástico ideal de Bingham se coloca entre dos placas planas paralelas, separadas 3 mm, una de las cuales se mueve en dirección paralela a su cara con velocidad de 3 m/seg. Si el esfuerzo cortante que se desarrolla sobre la cara de la placa móvil es 0.366 kg/m² y el inicial o de fluencia (a partir del cual se inicia el movimiento) es de 0.244 kg/m², encontrar la razón con la cual varía el esfuerzo cortante con el gradiente de velocidades. *c)* ¿Cuál sería la viscosidad dinámica si el fluido fuera newtoniano en lugar de no newtoniano?
10. Un tanque cerrado de acero rígido tiene un volumen de 5 m³. ¿Cuántos kilogramos de agua puede contener el tanque a 150 kg/cm² de presión y 4°C de temperatura?
11. Para probar la resistencia de una tubería larga, a una presión de 40 kg/cm², se tapan sus extremos y después se bombea agua al interior hasta alcanzar la presión propuesta. Suponiendo que el tubo no se dilata longitudinalmente, calcular el peso del agua introducida por la bomba. La longitud de la tubería es de 2 154 m, el diámetro interior de 0.55 m, el espesor de la pared de 14 mm, el módulo de elasticidad del agua 21 000 kg/cm² y el acero de la tubería de 2 100 000 kg/cm².
12. Una llanta de automóvil con 0.041 m³ de volumen, se infla a 1.76 kg/cm² a nivel del mar (T = 10°C). *a)* Calcular la presión en la llanta cuando se conduce a 3 700 m sobre el nivel del mar y a la misma temperatura; *b)* Calcular la presión cuando se conduce en el desierto a 52°C; *c)* Calcular la masa de aire en la llanta.
13. A partir de la densidad del agua, a presión atmosférica al nivel del mar y 20°C, calcular su densidad y gravedad específica a 1 000 kg/cm² y 94°C, suponiendo que la velocidad del sonido permanece constante. (Realizar los cálculos hasta la tercera cifra significativa).

2

HIDROSTATICA

2.1 Introducción

La estática de fluidos estudia las condiciones de equilibrio de los fluidos en reposo, y cuando se trata sólo de líquidos, se denomina *hidrostática.* Desde el punto de vista de ingeniería civil es más importante el estudio de los líquidos en reposo que de los gases, por lo cual aquí se hará mayor hincapié en los líquidos y, en particular, en el agua.

2.2 Ecuaciones fundamentales

2.2.1 Ecuaciones de Euler

Se considera idealmente un elemento de fluido en forma prismática que encierra al punto P, donde la densidad es ρ y la presión p (Fig. 2.1). Habiéndose elegido un sistema de coordenadas con el eje z vertical, conviene orientar los lados de la partícula según los ejes del sistema, de tal manera que la presión se incremente en magnitudes diferenciales y genere las fuerzas indicadas en la Fig. 2.1.

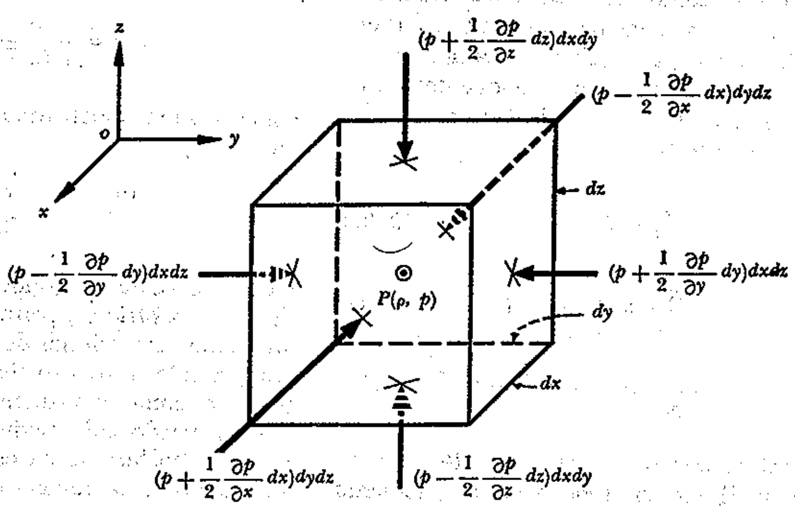


Figura 2.1. Equilibrio de una partícula en un fluido en reposo.

Si la fuerza de cuerpo por unidad de masa de la partícula es $\mathbf{M} = X\,\mathbf{i} + Y\,\mathbf{j} + Z\,\mathbf{k}$ el equilibrio de las fuerzas en la dirección x implica que

$$(p - \tfrac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\,dx)\,dy\,dz -$$

$$- (p + \tfrac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\,dx)\,dy\,dz +$$

$$+ \rho X\,dx\,dy\,dz = 0$$

Al simplificar y hacer idénticos razonamientos en las restantes direcciones coordenadas, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X \qquad (2.1a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y \qquad (2.1b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \qquad (2.1c)$$

conocidas como las *ecuaciones estáticas de Euler*. Si se considera que la única fuerza de cuerpo es la debida al campo gravitacional terrestre, sus componentes son: $X = Y = 0$, $Z = -g$, y de las ecuaciones anteriores se tiene:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad (2.2a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (2.2b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\gamma \qquad (2.2c)$$

Así se concluye que la presión dentro de un fluido en reposo varía solamente con la coordenada vertical z, y es constante en todos los puntos contenidos en un mismo plano horizontal.

De las ecuaciones anteriores se deduce finalmente que

$$dp = -\rho g\,dz = -\gamma\,dz \qquad (2.3)$$

En general, la ecuación fundamental de la estática de fluidos (Ec. 2.3) no se puede integrar a menos que se especifique la naturaleza de ρ. En la determinación de la presión se trata entonces por separado a los gases y a los líquidos.

2.2.2 Atmósfera estándar

Por considerarlo de interés en ingeniería, aquí sólo se analizará el caso de las propiedades estáticas del aire atmosférico próximo a la superficie terrestre (troposfera, cuyo espesor aproximado es de 11 000 m). Siendo el aire un fluido compresible, su densidad es función de la presión y la temperatura; y, puesto que es un gas perfecto, la ecuación de estado (1.4) relaciona la densidad con la presión y la temperatura.

$$\rho = \frac{p}{g R_0 T}$$

Esta ecuación, substituida en la (2.3), conduce a

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dz}{R_0 T} \qquad (2.4)$$

La Ec. (2.4), que se conoce como *ecuación de la aerostática*, permite determinar la variación de presiones dentro de un fluido compresible en reposo si se conoce la temperatura como una función de z.

De acuerdo con mediciones realizadas en la troposfera se ha encontrado que la variación de la temperatura (en °K) es lineal con la altura z, según la relación

$$T = T_0 - a z \qquad (2.5)$$

donde:

- a es el decremento de temperatura por cada metro de incremento en la altitud z;
- T_0 la temperatura estándar al nivel del mar ($z = 0$), en °K.

La diferencial de la Ec. (2.5) es

$$dz = -\frac{dT}{a} \qquad (2.6)$$

Substituyendo la Ec. (2.6) en la (2.4) resulta

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{R_0 a}\,\frac{dT}{T}$$

cuya integral es

$$\ln p = \frac{1}{R_0 a}\ln T + C \qquad (2.7)$$

La constante C de integración se obtiene para las condiciones estándar a nivel del mar: $z = 0$, $T = T_0$ y $p = p_0$; por tanto, con la Ec. (2.5) la (2.7) se escribe así:

$$\ln\frac{p}{p_0} = \frac{1}{R_0 a}\ln\frac{T}{T_0} = \frac{1}{R_0 a}\ln\left(1 - \frac{a z}{T_0}\right)$$

La relación entre presión y altitud z, es

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{a z}{T_0}\right)^{1/R_0 a} \qquad (2.8)$$

La relación densidad-altitud se puede derivar de la ecuación de estado (1.4) para un gas perfecto, con ayuda de las Ecs. (2.5) y (2.8). El resultado es

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{p}{p_0}\,\frac{T_0}{T} = \qquad (2.9)$$

$$= \frac{p}{p_0}\,\frac{T_0}{T_0 - a z} = \left(1 - \frac{a z}{T_0}\right)^{\left(\frac{1}{R_0 a} - 1\right)}$$

Combinando (2.8) y (2.9) la relación entre presión y densidad es

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/(1 - R_0 a)} \qquad (2.10)$$

A nivel del mar las características de la atmósfera internacional estándar se han elegido (Ref. 4) como sigue:

$$p_0 = 10\,333 \text{ kg/m}^2$$

$$T_0 = 15\text{°C} = 288\text{°K}$$

$$\gamma_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_0 = 0.125 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$$

$$R_0 = 29.27 \text{ m/°K}$$

$$a = 0.0065\text{°K/m}$$

Con los valores anteriores las Ecs. (2.5), (2.8), (2.9) y (2.10), conducen, respectivamente, a las llamadas *ecuaciones de la atmósfera estándar* que permiten determinar sus propiedades, a saber:

$$\frac{T}{T_0} = 1 - 2.26 \times 10^{-5} z \qquad (2.11a)$$

$$\frac{p_a}{p_0} = (1 - 2.26 \times 10^{-5} z)^{5.256} \qquad (2.11b)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = (1 - 2.26 \times 10^{-5} z)^{4.256} \qquad (2.11c)$$

$$\frac{p_a}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1.235} \qquad (2.11d)$$

El valor máximo estándar para z en las Ecs. (2.11) es de 10 770 m. Se observa que la Ec. (2.11d) corresponde a la ecuación de un proceso politrópico (Ec. 1.6), donde $n = 1.235$.

Las Ecs. (2.11) son importantes en problemas relacionados con la cavitación cuando hay necesidad de comparar la

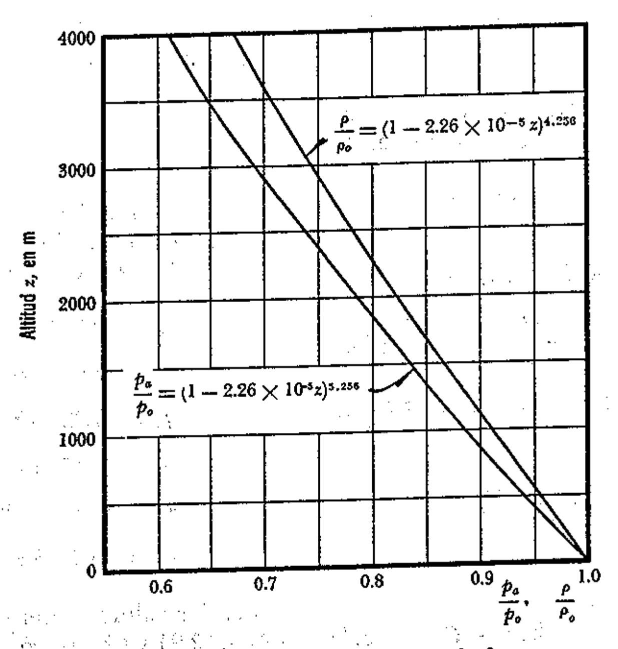


Figura 2.2. Variación con la altitud de la presión atmosférica y de la densidad del aire en la atmósfera estándar.

presión de vaporización con la presión atmosférica del lugar, o bien en el cálculo de la densidad del aire o en el de presiones absolutas.

En la Fig. 2.2 se muestra la representación gráfica de las Ecs. (2.11b) y (2.11c) para el intervalo de altitudes entre 0 y 4000 m sobre el nivel del mar, y la aproximación que ésta proporciona es suficiente en la solución de problemas de ingeniería.

Por ejemplo, la elevación media sobre el nivel del mar de la ciudad de México es de 2240 m. En la Fig. 2.2 se observa que $p_a/p_0 = 0.76$ y, con $p_0 = 10\,333$ kg/m², la presión atmosférica estándar es

$$p_a = 0.76 \times 10\,333 = 7.863 \text{ kg/m}^2 = 0.786 \text{ kg/cm}^2.$$

2.2.3 Solución para los líquidos

En el caso de un líquido (ρ = constante), es posible integrar la Ec. (2.3) como sigue:

$$\frac{p}{\gamma} + z = \text{constante} \qquad (2.12)$$

La Ec. (2.12) se conoce como *ley de Pascal* y permite calcular la distribución de presiones hidrostáticas en el seno de un líquido en reposo. Esa presión depende exclusivamente de la coordenada z, es decir, de la altura de cada punto respecto de un nivel cualquiera elegido.

Para dos puntos: el 0 coincidiendo con la superficie libre del líquido y otro cualquiera de elevación z (Fig. 2.3), resulta

$$\frac{p_a}{\gamma} + z_0 = \frac{p}{\gamma} + z$$

La presión absoluta en el punto considerado es

$$p = p_a + \gamma (z_0 - z) \qquad (2.13)$$

donde p_a representa la presión atmosférica sobre la superficie libre del líquido y $(z_0 - z)$ la profundidad del punto considerado. En la Ec. (2.13) p corresponde a la presión absoluta del punto de que se trata y se mide a partir del cero absoluto de presiones. La presión atmosférica local depende de la elevación sobre el nivel del mar del lugar en que se encuentra el líquido, y su valor estándar está dado por la Ec. (2.11b) o bien en la Fig. 2.2.

Es más común medir la presión hidrostática utilizando como valor cero de referencia a la atmosférica local. La presión así medida se llama *manométrica* y las unidades más usuales son kg/cm² o bien, kg/m².

La Fig. 2.4 ilustra los diferentes niveles de referencia para medir la presión; la atmosférica estándar a nivel del mar equivale a la producida en la base de una columna de agua de 10.33 m de altura.

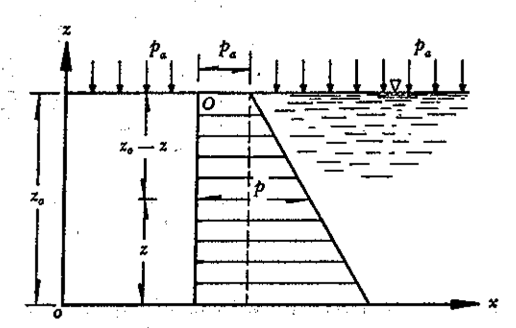


Figura 2.3. Distribución de presiones hidrostáticas en un líquido.

Existen casos en que el líquido no es homogéneo, como las soluciones salinas de concentraciones variables o líquidos estratificados de temperatura variable. En estas condiciones, el equilibrio sólo es posible si los líquidos menos densos quedan arriba de los más densos.

En tales casos se pueden aplicar las Ecs. (2.12) o (2.13) para cada nivel, determinando la presión como se indica en la Fig. 2.5.

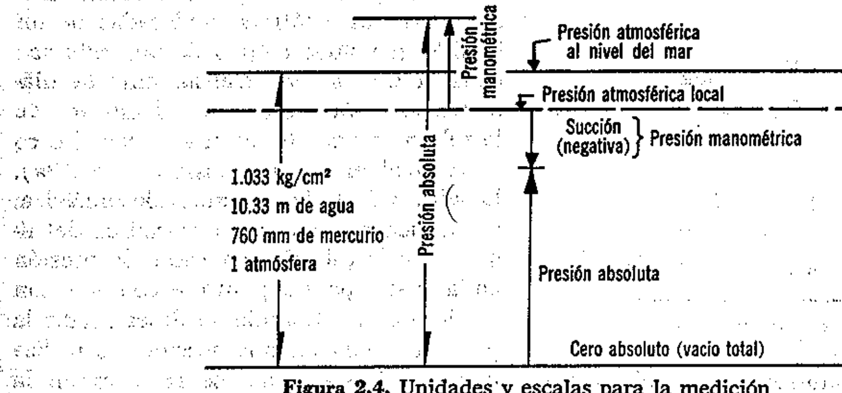


Figura 2.4. Unidades y escalas para la medición de presiones.

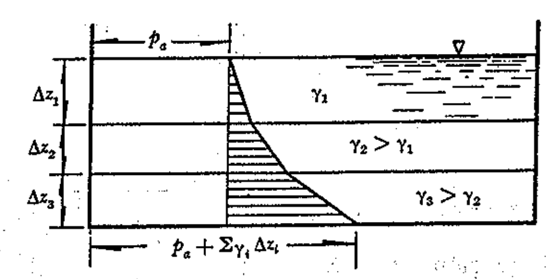


Figura 2.5. Distribución de presiones hidrostáticas en líquidos de diferente densidad.

2.3 Dispositivos para la medición de presiones hidrostáticas

Se han utilizado varios dispositivos para la medición de las presiones producidas por un líquido en reposo con base en la Ec. (2.13), llamados comúnmente *manómetros*.

2.3.1 Manómetros simples

Los más importantes son el *barómetro* y el *tubo piezométrico*. El primero es un dispositivo para medir la presión atmosférica local; consiste en un tubo de vidrio lleno de mercurio, con un extremo cerrado y el otro abierto, sumergido dentro de un recipiente que contiene dicho elemento (Fig. 2.6).

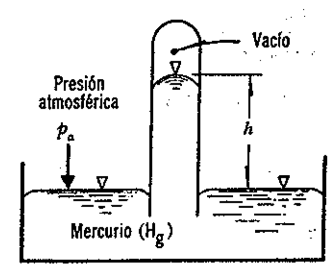


Figura 2.6. Barómetro.

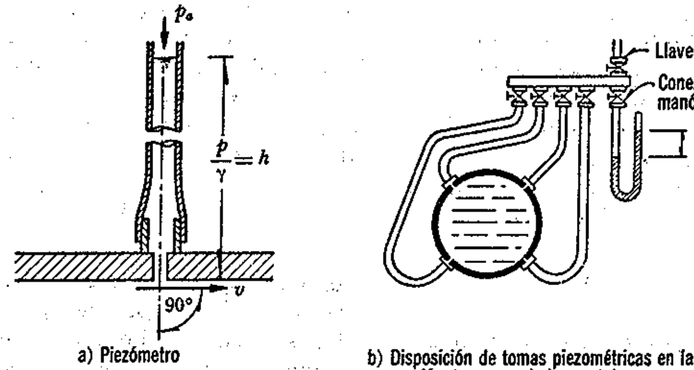
La presión atmosférica, ejercida sobre la superficie del mercurio en el recipiente, lo fuerza a elevarse dentro del tubo hasta alcanzar la columna una altura h que equilibra la presión atmosférica; se expresa así:

$$p_a = \gamma_{Hg}\, h$$

donde γ_{Hg} es el peso específico del mercurio (13 595 kg/m³). A nivel del mar y a la temperatura de 15°C la presión atmosférica es de 10 333 kg/m²; entonces, la correspondiente altura barométrica del mercurio es

$$h = \frac{10\,333}{13\,595} = 0.76 \text{ m}$$

El tubo piezométrico se utiliza para medir presiones estáticas moderadas de un líquido que fluye dentro de una tubería; consiste en un tubo transparente de diámetro pequeño, conectado al interior de la tubería mediante un niple y con el otro extremo abierto a la atmósfera (Fig. 2.7a). La altura h de la columna piezométrica, multiplicada por el peso específico del líquido en la tubería, determina la presión en la misma para el punto de contacto con el piezómetro. Cuando se desea medir la presión media en una sección, se utiliza una instalación como se muestra en la Fig. 2.7b.



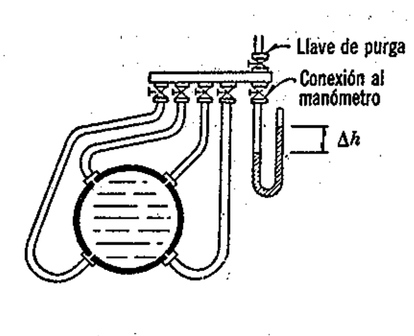


Figura 2.7. Medición de presiones en una tubería.

2.3.2 Manómetros diferenciales

El *manómetro diferencial* abierto (figura 2.8) consiste en un tubo transparente en forma de U, parcialmente lleno de un líquido pesado (comúnmente mercurio). Uno de sus extremos se conecta de manera perpendicular a la pared que confina el flujo del recipiente que lo contiene. El otro extremo puede estar abierto a la atmósfera o bien con otro punto de la pared, en cuyo caso el manómero mide la diferencia de presiones entre los dos puntos. La diferencia de niveles de la columna del líquido en el manómetro diferencial indica la diferencia de las cargas de presión ejercidas sobre los extremos de la columna. Por ejemplo, en la Fig. 2.8 el peso específico del líquido en el recipiente *cs* γ_1 y, el del líquido en el manómetro, γ_2. Siendo p_A la presión manométrica en el punto A del recipiente, la presión en la sección de contacto B de los líquidos es

$$p_B = p_A + \gamma_1 z_1$$

Por otra parte, $p_B = \gamma_2 z_2$ y, al igualar ambas ecuaciones, resulta

$$p_A = \gamma_2 z_2 - \gamma_1 z_1$$

Hay también *manómetros cerrados*, aparatos comerciales provistos de un sistema mecánico de aguja y carátula graduada donde se leen directamente las presiones.

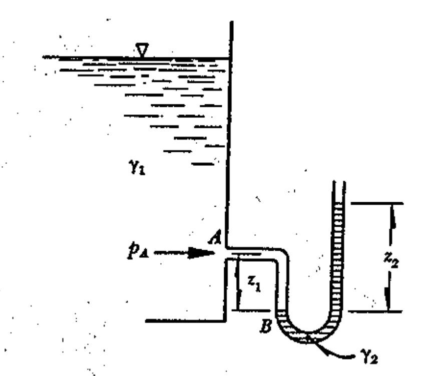


Figura 2.8. Manómetro diferencial abierto.

2.4 Empuje hidrostático sobre superficies planas

Se considera un recipiente con un líquido en reposo, donde una de sus paredes tiene una inclinación θ respecto a la hori-

zontal, como se indica en la Fig. 2.9. Sobre esta pared se delimita una superficie de área A para la cual se desea conocer la fuerza resultante debida a la presión hidrostática, así como su punto de aplicación o *centro de presiones*.

La fuerza resultante sobre la superficie A será:

$$P = \iint_A p\, dA = \gamma \iint_A z\, dA \qquad (2.14)$$

es decir, el volumen de la cuña de distribución de presiones *abcd* está limitada por el área A. La integral que aparece en la Ec. (2.14) es el momento estático del área respecto de la superficie libre del líquido y se puede expresar en términos del área A y de la profundidad de su centro de gravedad z_G. *El empuje hidrostático* es entonces

$$P = \gamma A z_G \qquad (2.15)$$

Las coordenadas (x_k, y_k) del centro de presiones se obtienen cuando se iguala la suma de los momentos estáticos de las áreas diferenciales respecto de los ejes x y y, con el producido por la fuerza resultante. Para el eje x tenemos que

$$P y_k = \iint_A y \gamma z\, dA$$

donde la integral representa el momento estático del volumen de la cuña de presiones respecto del eje x. De aquí se deduce que y_k coincide con la ordenada de la proyección K' del centro de gravedad S, de la cuña.

Se puede dar también una interpretación distinta y para ello se substituye $z = y$ sen θ en la ecuación anterior:

$$P y_k = \gamma \operatorname{sen}\theta \iint_A y^2\, dA \qquad (2.16)$$

donde la integral es el momento de inercia del área A respecto del eje x el cual es también

$$I_x = \iint_A y^2\, dA = \bar{I}_x + A y_G^2$$

en que $\bar{I}_x$ es el momento de inercia del área respecto de un eje centroidal paralelo a x; $\bar{I}_x$ puede también expresarse como $\bar{I}_x = \bar{r}_x^2 A$, donde $\bar{r}_x$ es el radio de giro de A respecto del eje centroidal paralelo a x. Por tanto, si se substituye la Ec. (2.15) en la (2.16), con $z_G = y_G$ sen θ, resulta:

$$y_k = \frac{\bar{r}_x^2}{y_G} + y_G \qquad (2.17)$$

Obsérvese que el centro de presiones se encuentra por debajo del centro de gravedad del área. Aunque tiene importancia secundaria, se puede calcular en forma análoga a x_k:

$$P x_k = \gamma \operatorname{sen}\theta \iint_A x\, y\, dA$$

La integral de esta ecuación representa el producto de inercia I_{xy}, del área respecto del sistema de ejes x-y; por tanto

$$x_k = \frac{I_{xy}}{y_G A} \qquad (2.18)$$

Generalmente, las superficies sobre las que se desea calcular el empuje hidrostático son simétricas respecto de un eje paralelo a y. Esto hace que $I_{xy} = 0$ y que el centro de presiones quede sobre dicho eje.

Un procedimiento gráfico para determinar y_k se presenta en la Fig. 2.9: sobre G' se levanta una normal $G'M$ a la superficie de altura $\bar{r}_x$; la intersección de la perpendicular a la recta $0_1 M$ con la superficie señala la posición de K'. Se deja al lector la demostración del procedimiento.

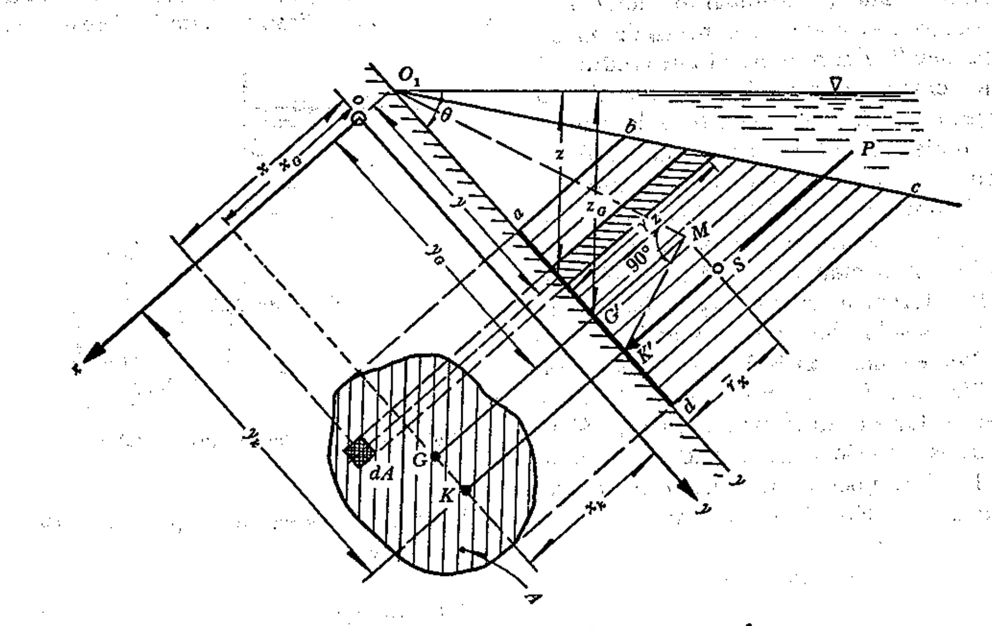


Figura 2.9. Empuje hidrostático y centro de presiones sobre una superficie plana e inclinada.

En la tabla 2.1 se presentan la posición del centro de gravedad, el área y el radio de giro de las figuras más usuales.

Problema 2.1. Calcular el empuje hidrostático y el centro de presiones sobre la pared de 2 m de ancho de un tanque de almacenamiento de agua, para los siguientes casos: **a)** pared vertical con líquido de un solo lado (Fig. 2.10); **b)** pared inclinada con líquido en ambos lados (figura 2.11a); *c)* pared vertical con líquido en ambos lados (Fig. 2.11b).

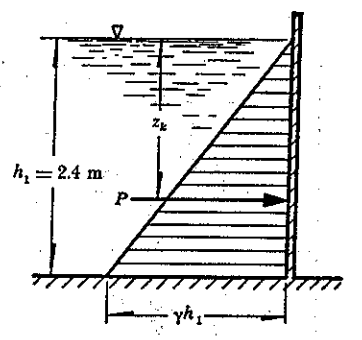


Figura 2.10. Distribución de la presión hidrostática sobre una pared vertical.

Solución a). En la Fig. 2.10 se muestra la distribución de presiones hidrostáticas del agua sobre la pared vertical. La presión total para $\gamma = 1$ ton/m³, según la Ec. (2.15), vale

$$P = \gamma\, b\, h \frac{h}{2} = \gamma\, b \frac{h^2}{2} = 1 \times 2 \times \frac{2.4^2}{2}$$

$$P = 5.76 \text{ ton}$$

El empuje hidrostático es igual al volumen de la cuña de distribución de presiones.

La profundidad del centro de presiones según la Ec. (2.17) y las características indicadas en la Fig. 2.10, vale

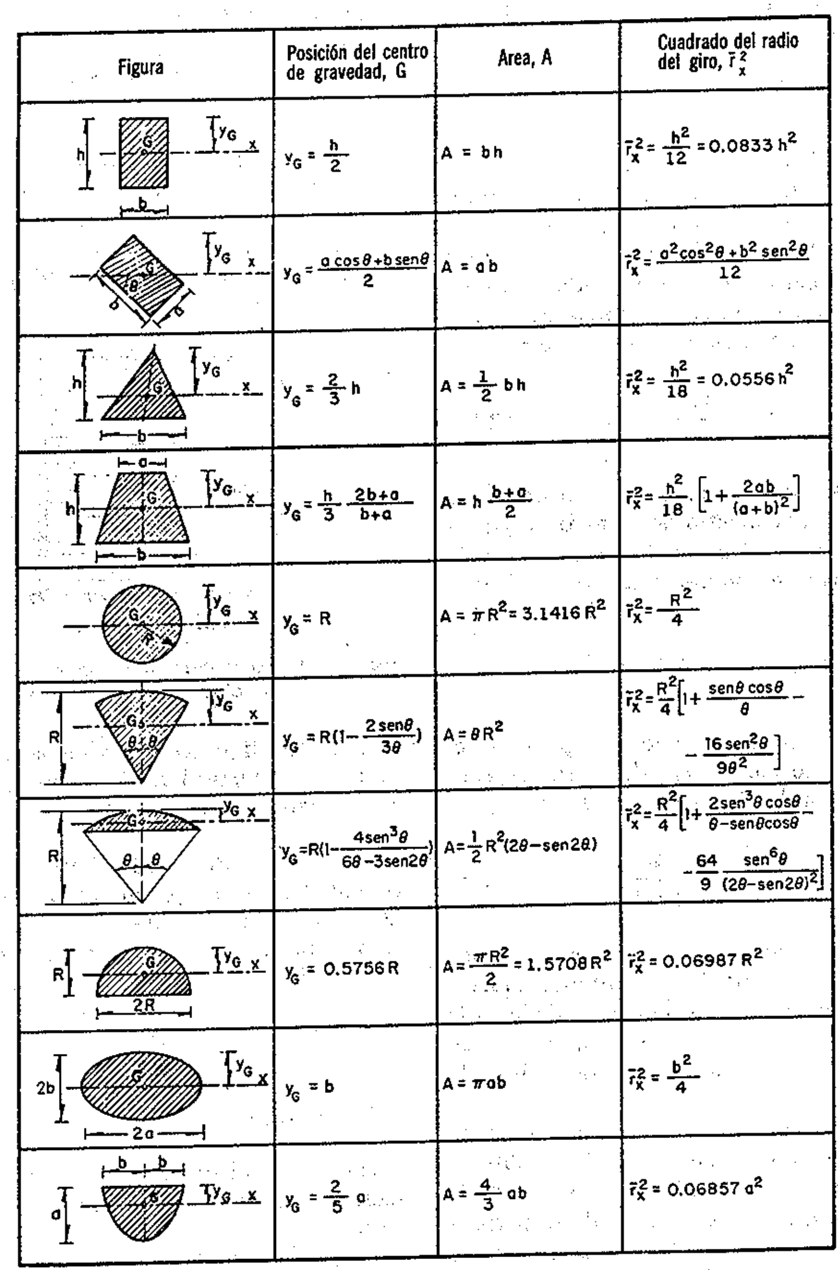
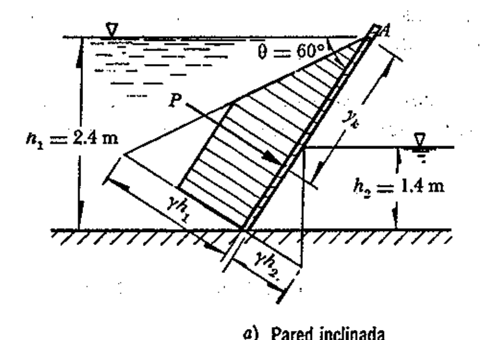
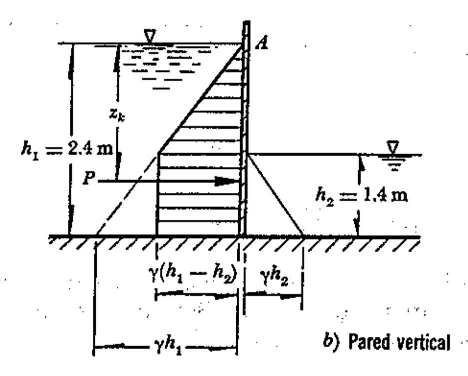


Figura	Posición del centro de gravedad, G	Area, A	Cuadrado del radio del giro, $\bar{r}_x^2$
	$y_G = \frac{h}{2}$	$A = bh$	$\bar{r}_x^2 = \frac{h^2}{12} = 0.0833\,h^2$
	$y_G = \frac{a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta}{2}$	$A = ab$	$\bar{r}_x^2 = \frac{a^2\cos^2\theta + b^2\,\text{sen}^2\theta}{12}$
	$y_G = \frac{2}{3}h$	$A = \frac{1}{2}bh$	$\bar{r}_x^2 = \frac{h^2}{18} = 0.0556\,h^2$
	$y_G = \frac{h}{3}\,\frac{2b+a}{b+a}$	$A = h\,\frac{b+a}{2}$	$\bar{r}_x^2 = \frac{h^2}{18}\left[1 + \frac{2ab}{(a+b)^2}\right]$
	$y_G = R$	$A = \pi R^2 = 3.1416\,R^2$	$\bar{r}_x^2 = \frac{R^2}{4}$
	$y_G = R\left(1 - \frac{2\,\text{sen}\,\theta}{3\theta}\right)$	$A = \theta R^2$	$\bar{r}_x^2 = \frac{R^2}{4}\left[1 + \frac{\text{sen}\,\theta\cos\theta}{\theta} - \frac{16\,\text{sen}^2\theta}{9\theta^2}\right]$
	$y_G = R\left(1 - \frac{4\,\text{sen}^3\theta}{6\theta - 3\,\text{sen}\,2\theta}\right)$	$A = \frac{1}{2}R^2(2\theta - \text{sen}\,2\theta)$	$\bar{r}_x^2 = \frac{R^2}{4}\left[1 + \frac{2\,\text{sen}^3\theta\cos\theta}{\theta - \text{sen}\,\theta\cos\theta} - \frac{64}{9}\,\frac{\text{sen}^6\theta}{(2\theta - \text{sen}\,2\theta)^2}\right]$
	$y_G = 0.5756\,R$	$A = \frac{\pi R^2}{2} = 1.5708\,R^2$	$\bar{r}_x^2 = 0.06987\,R^2$
	$y_G = b$	$A = \pi ab$	$\bar{r}_x^2 = \frac{b^2}{4}$
	$y_G = \frac{2}{5}a$	$A = \frac{4}{3}ab$	$\bar{r}_x^2 = 0.06857\,a^2$

TABLA 2.1 Centro de gravedad, área y radio de giro de las figuras más usuales.



a) Pared inclinada



b) Pared vertical

Figura 2.11. Empuje hidrostático sobre una pared inclinada o vertical con líquido en ambos lados.

$$z_k = \frac{h^2 \times 2}{12\,h} + \frac{h}{2} = \frac{2}{3}\,h = 1.6 \text{ m}$$

Este valor también es el de la profundidad del centro de gravedad de la cuña de distribución de presiones.

Solución b). La distribución de presiones es lineal en ambos lados y de sentido contrario, siendo la distribución resultante como se muestra en la Fig. 2.11a.

En la misma forma que en la solución (a), el empuje hidrostático sobre la pared es el volumen de la cuña de distribución de presiones de ancho b, indicada con el área sombreada, la cual se puede determinar calculando el área del triángulo de presiones de la izquierda menos el de la derecha.

Para el triángulo a la izquierda

$$P_1 = \gamma\, b\, \frac{h_1^2}{2 \text{ sen } \theta}$$

aplicada a la distancia y_{k1}, desde el punto A, entonces

$$y_{k1} = \frac{2}{3}\,\frac{h_1}{\text{sen } \theta}$$

Para el triángulo a la derecha, se tiene que

$$P_2 = \gamma\, b\, \frac{h_2^2}{2 \text{ sen } \theta}$$

aplicada a la distancia y_{k2} desde el punto A, resulta

$$y_{k2} = \frac{h_1 - (h_2/3)}{\text{sen } \theta}$$

El empuje total está representado por la cuña sombreada:

$$P = P_1 - P_2 = \gamma\, b\, \frac{h_1^2 - h_2^2}{2 \text{ sen } \theta} =$$

$$= 1 \times 2\,\frac{(2.4^2 - 1.4^2)}{2 \times 0.866} = 4.388 \text{ ton}$$

Tomando momentos de las fuerzas respecto del punto A, obtenemos

$$P\,y_k = \gamma b\,\frac{h_1^2}{2 \text{ sen } \theta} \times \frac{2}{3}\,\frac{h_1}{\text{sen } \theta} -$$

$$- \gamma\, b\,\frac{h_2^2}{2 \text{ sen } \theta}\,\frac{h_1 - (h_2/3)}{\text{sen } \theta}$$

Substituyendo el valor de P, y_k se puede despejar y escribir en la forma

$$y_k = \frac{h_1}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{1}{3\operatorname{sen}\theta}\,\frac{h_1^3 - h_2^3}{h_1^2 - h_2^2} =$$

$$= \frac{2.4}{0.866} - \frac{2.916}{3 \times 0.866} = 1.649 \text{ m}$$

Solución c). Para el caso de la Fig. 2.11b es suficiente hacer $\theta = 90°$ en las ecuaciones anteriores, resultando

$$P = \gamma\, b\, \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} = 1 \times 2 \times$$

$$\times \frac{2.4^2 - 1.4^2}{2} = 3.8 \text{ ton}$$

$$y_k = z_k = h_1 - \frac{1}{3}\,\frac{h_1^3 - h_2^3}{h_1^2 - h_2^2}$$

$$y_k = 2.4 - \frac{1}{3}\,\frac{2.4^3 - 1.4^3}{2.4^2 - 1.4^2} = 1.428 \text{ m}$$

Problema 2.2. Se desean obtener los empujes hidrostáticos por unidad de ancho, así como los centros de presiones sobre las caras a_1 y a_2, del muro mostrado en la Fig. 2.12.

Solución. Los empujes están representados por las áreas de las cuñas sombreadas.

$$P_1 = \frac{1}{2}\gamma\, b\, a_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1^2 = 0.5 \text{ ton}$$

$$P_2 = \gamma\, b\, \frac{a_1 + h}{2}\, a_2 =$$

$$= 1 \times 1\, \frac{1+3}{2}\, 2.2 = 4.4 \text{ ton}$$

Los centros de presión coinciden con los de gravedad de las áreas de las cuñas, a saber:

$$z_{k1} = \frac{2}{3}a_1 = \frac{2}{3} \times 1 = 0.667 \text{ m}$$

Para el centro de gravedad del área trapecial de la cuña de presiones 2, se puede usar la ecuación indicada en la tabla 2.1.

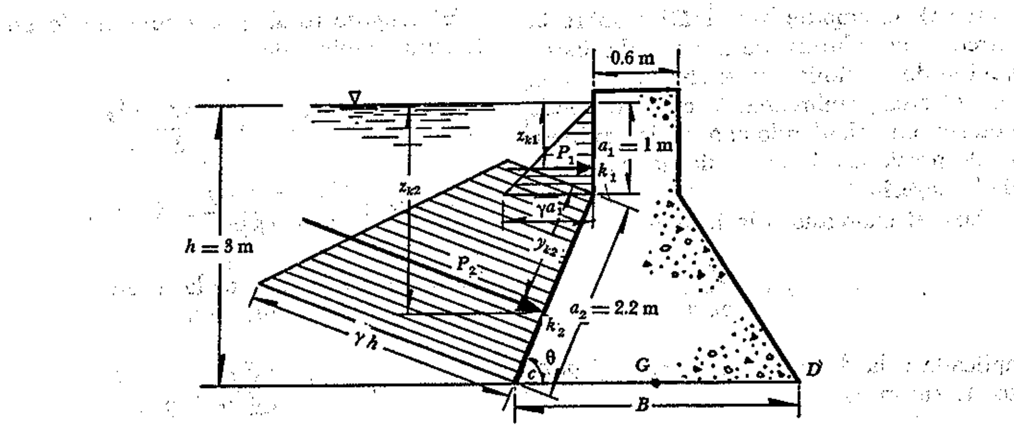


Figura 2.12. Empuje hidrostático sobre un muro de contención.

$$y_{k2} = \frac{a_2}{3}\,\frac{a_1 + 2h}{a_1 + h} = \frac{2.2}{3}\,\frac{1+6}{1+3} = 1.283 \text{ m}$$

$$z_{k2} = a_1 + y_{k2}\operatorname{sen}\theta = a_1 + y_{k2}\left(\frac{h - a_1}{a_2}\right)$$

$$= 1 + 1.283\,\frac{2}{2.2} = 2.166 \text{ m}$$

Problema 2.3. En la Fig. 2.13 se muestra una pared vertical, metálica, de ancho $b = 3$ m y altura de 5 m, que se desea construir para que vierta el agua con una carga $z_0 = 1.00$ m. La cuña de distribución de presiones de forma trapecial se desea dividir en 4 partes iguales para ser soportada por 4 largueros de dimensiones iguales. Determinar la carga que soportará cada larguero y las posiciones adecuadas de los mismos.

Solución. El empuje hidrostático en un punto i, a la profundidad z_i, es entonces:

$$P_i = \gamma\, b\, \frac{z_i - z_0}{2}(z_i + z_0) = \gamma\, b\, \frac{z_i^2 - z_0^2}{2}$$

cuya distribución es parabólica, como se muestra en la Fig. 2.13; las coordenadas de sus puntos son

z, en m	1	2	3	4	5	6
P, en ton	0.0	4.5	12.0	22.5	36.0	52.5

El empuje hidrostático sobre toda la pared corresponde a $z_4 = 6$ m, y vale $P_4 = 52.5$ ton. Cada parte será entonces $P/4 = 13.125$ ton. Mediante una gráfica se obtienen las áreas iguales del trapecio, anotando a escala, como ordenadas, los valores $P_1 = 13.125$ ton, $P_2 = 2 \times 13.125 = 26.25$ ton, etc., en la parábola, para obtener los puntos 1, 2, 3, 4. Analíticamente se obtienen las profundidades de estos puntos al despejar z_i de la ecuación anterior:

$$z_i = \sqrt{z_0^2 + \frac{2P_i}{\gamma\, b}}$$

Para $z_0 = 1$ m

$P_{z1} = P_1 = 13.125$ ton $\qquad z_1 = 3.12$ m

$P_{z2} = P_1 + P_2 = 26.25$ ton $\qquad z_2 = 4.30$ m

$P_{z3} = P_1 + P_2 + P_3 = 39.375$ ton $\qquad z_3 = 5.22$ m

$P_{z4} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 52.5$ ton $\qquad z_4 = 6.00$ m

La profundidad z_k de los largueros coincide con la del centro de gravedad de cada

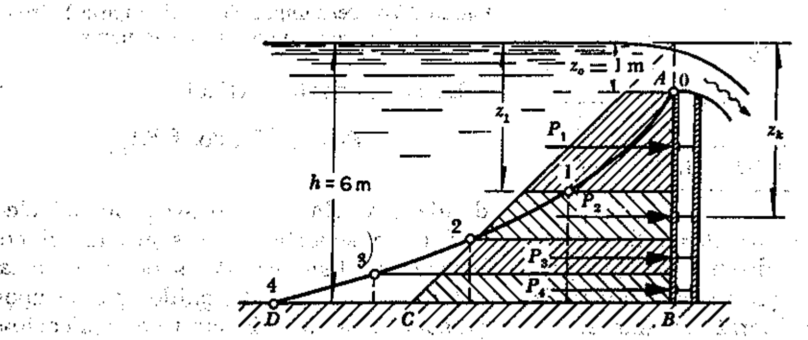


Figura 2.13. Distribución de empujes hidrostáticos sobre una pared vertical.

una de las áreas parciales y se puede calcular con la ecuación correspondiente de la tabla 2.1, resultando así (Ref. 6),

$$z_k = \frac{2}{3}\frac{h}{\sqrt{n+m}}[(k+m)^{3/2} - (k+m-1)^{3/2}] \quad (2.19)$$

donde

k número de orden del larguero contado desde el canto superior de la compuerta hacia abajo;

$$m = \frac{n}{(h/z_0)^2 - 1};$$

n número de largueros.

Para este problema:

$$m = \frac{4}{(\frac{6}{1})^2 - 1} = 0.1143$$

$$z_k = \frac{2}{3}\frac{6}{\sqrt{4.1143}}[(k+0.1143)^{3/2} - (k+0.1143-1)^{3/2}]$$

$$z_k = 1.972\,[(k+0.1143)^{3/2} - (k-0.8857)^{3/2}]$$

De esta ecuación resulta

k	1	2	3	4
z_k, en m	2.243	3.742	4.775	5.618

Este procedimiento se generaliza para cualquier forma de distribución de presiones y cualquiera que sea el número de subdivisiones de la fuerza resultante.

Cuando la altura de la compuerta es igual a la carga h, basta hacer $z_0 = 0$ en las ecuaciones anteriores. En este problema la fuerza resultante sobre la compuerta es

$$P = 1 \times 3 \times \frac{6^2}{2} = 54 \text{ ton}$$

y las profundidades de los cuatro largueros:

$$z_{k1} = 0.3333 \times 6 = 2 \text{ m}$$

$$z_{k2} = 0.6095 \times 6 = 3.657 \text{ m}$$

$$z_{k3} = 0.7893 \times 6 = 4.736 \text{ m}$$

$$z_{k4} = 0.9346 \times 6 = 5.608 \text{ m}$$

Algunas ocasiones conviene descomponer el empuje hidrostático sobre una superficie en una componente vertical y otra horizontal, como se muestra en la Fig. 2.14.

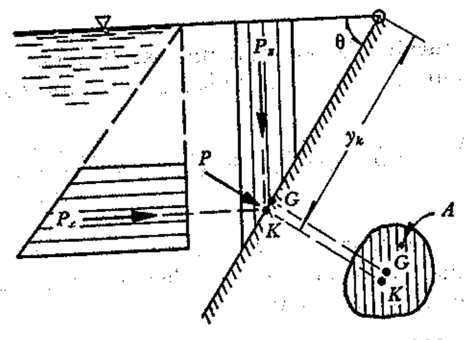


Figura 2.14. Descomposición del empuje hidrostático sobre una superficie plana.

La componente vertical es

$$P_z = \gamma \iint_A z \cos\theta \, dA$$

donde $\cos\theta \, dA$ es la proyección del elemento de superficie dA sobre un plano horizontal. Esto es, P_z es el peso de la columna vertical del líquido que se apoya sobre el área A. El punto de aplicación de esta fuerza queda en el centro de gravedad de dicha columna.

Se observa que si $90° < \theta < 180°$, entonces $\cos\theta < 0$; esto significa que P_z está dirigida de abajo hacia arriba y que la columna de líquido no existe físicamente, pero las presiones son ascendentes.

La componente horizontal de P vale:

$$P_x = \gamma \iint_A z \operatorname{sen}\theta \, dA$$

donde $\operatorname{sen}\theta \, dA$ es la proyección del elemento dA sobre un plano vertical. Por ello, P_x es el empuje hidrostático que actúa en la proyección de la superficie A, sobre un plano vertical y, por tanto, se localiza en el centro de gravedad de la cuña de presiones.

Problema 2.4. Determinar el empuje hidrostático P_2, del problema 2.2, en términos de las componentes vertical y horizontal.

Solución. La componente vertical es igual al peso de la columna de líquido, es decir,

$$P_{2z} = \gamma\, b\left(\frac{a_1 + h}{2}\right) a_2 \cos\theta =$$

$$= 1 \times 1 \left(\frac{1+3}{2}\right) 2.2 \times 0.416 =$$

$$= 1.83 \text{ ton}$$

La horizontal es

$$P_{2x} = \gamma\, b\left(\frac{a_1 + h}{2}\right) a_2 \operatorname{sen}\theta =$$

$$= 1 \times 1 \left(\frac{1+3}{2}\right) 2.2 \times \frac{2}{2.2} = 4 \text{ ton}$$

El empuje total resultante vale

$$P_2 = \sqrt{P_{2z}^2 + P_{2x}^2} = \sqrt{1.83^2 + 4^2} = 4.4 \text{ ton}$$

2.5 Empuje hidrostático sobre superficies curvas

Cuando es curva la superficie sobre la que se ejerce presión hidrostática, ésta se puede proyectar sobre un sistema triortogonal de planos coordenados, convenientemente dispuesto, de manera que uno de ellos coincida con la superficie libre del líquido. Así, se procede a calcular el empuje hidrostático por separado sobre cada proyección.

Si los planos de las coordenadas x-z y y-z son verticales y el x-y coincide con la superficie del líquido (Fig. 2.15a), las componentes del empuje hidrostático sobre la superficie curva 1, 2, 3, 4, son:

$$P_x = \gamma \iint_{A_x} z \, dA_x = \gamma\,(z_G)_x A_x \quad (2.20a)$$

$$P_y = \gamma \iint_{A_y} z \, dA_y = \gamma\,(z_G)_y A_y \quad (2.20b)$$

$$P_z = \gamma \iint_{A_z} z \, dA_z = \gamma \;\; z_G \;\; A_z \quad (2.20c)$$

donde A_x, A_y, A_z, son las áreas de las proyecciones de la superficie sobre los tres planos de coordenadas; $(z_G)_x$ y $(z_G)_y$ la profundidad del centro de gravedad de dichas proyecciones y z_G la profundidad del centro de gravedad de la superficie curva en el espacio. La Ec. (2.20c) indica que P_z es igual al peso de la columna de líquido soportada por la superficie curva, y z_G la altura de dicha columna coincidente con su centro de gravedad (Fig. 2.15a).

En la misma forma, las coordenadas del centro de presiones sobre cada proyección de la superficie curva son (Fig. 2.15a):

Para la proyección A_x:

$$(z_k)_x = \frac{I_y}{(z_G)_x A_x}; \quad y_k = \frac{I_{yz}}{(z_G)_x A_x} \quad (2.21a)$$

Para la proyección A_y:

$$(z_k)_y = \frac{I_y}{(z_G)_y A_y}; \quad x_k = \frac{I_{yz}}{(z_G)_y A_y} \quad (2.21b)$$

donde

I_y momento de inercia de A_x respecto de y

I_{yz} producto de inercia de A_x respecto de y y z

I_x momento de inercia de A_y respecto de x

I_{xz} producto de inercia de A_y respecto de x y z

Como sucede en cualquier sistema de fuerzas en el espacio, no siempre es posible obtener una fuerza resultante única sino que además puede haber un par.

Al proyectar la superficie curva sobre los tres planos de coordenadas puede suceder que algunas partes de ella se superpongan, partes que se suprimen en la determinación de P_x o P_y, ya que se eliminan las presiones horizontales que resultan. Éste es el caso de la proyección de la superficie curva ABC (de la Fig. 2.15b) sobre el plano yz, ya que resulta como proyección la superficie $A'C'$. En el caso de la Fig. 2.15c la componente P_z del empuje hidrostático sobre la superficie AB, según la Ec. (2.20c) es igual al peso del volumen

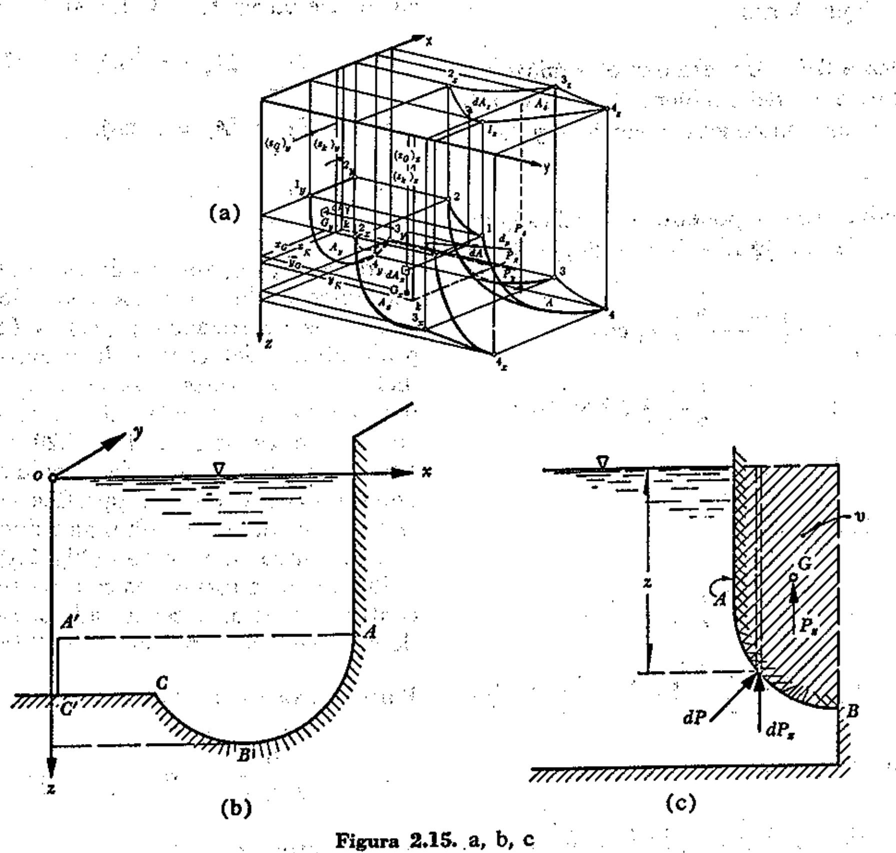


Figura 2.15. a, b, c

imaginario de líquido que soportaría la propia superficie.

Problema 2.5. Determinar el empuje hidrostático y el centro de presiones sobre la superficie cilíndrica AB, mostrada en la Fig. 2.16.

Solución. La componente horizontal del empuje hidrostático sobre la superficie cilíndrica, de ancho b, es igual al área sombreada del trapecio, es decir, de acuerdo con las Ecs. (2.20) vale

$$P_x = \gamma b D \left(z_0 + \frac{D}{2} \right)$$

y su posición corresponde a la profundidad del centro de gravedad del trapecio:

$$z_k = \frac{D}{3} \frac{3 z_0 + 2D}{2 z_0 + D} + z_0$$

La componente vertical del empuje se puede obtener siguiendo este razonamiento: sobre la superficie BG se ejerce un empuje vertical P_{z1}, ascendente, que equivale al peso de la columna virtual de líquido sobre esa superficie, como se muestra en la Fig. 2.16. Sobre la superficie AG existe un empuje vertical P_{z2}, descendente, que equivale al peso de la columna real de líquido sobre dicha superficie, como se muestra en la misma figura. La resultante de ambas fuerzas es igual al empuje vertical total ascendente sobre toda la superficie; esto equivale al peso de la columna virtual de líquido encerrado por la superficie AGB, y aplicada en el centro de gravedad del área encerrada. Resulta

$$P_z = \gamma b \frac{\pi}{8} D^2; \quad e = 0.2122\, D$$

El empuje total sobre la superficie será la resultante de las dos componentes:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$$

Esta fuerza debe ser radial al cilindro.

Problema 2.6. Determinar el empuje hidrostático sobre la compuerta radial mos-

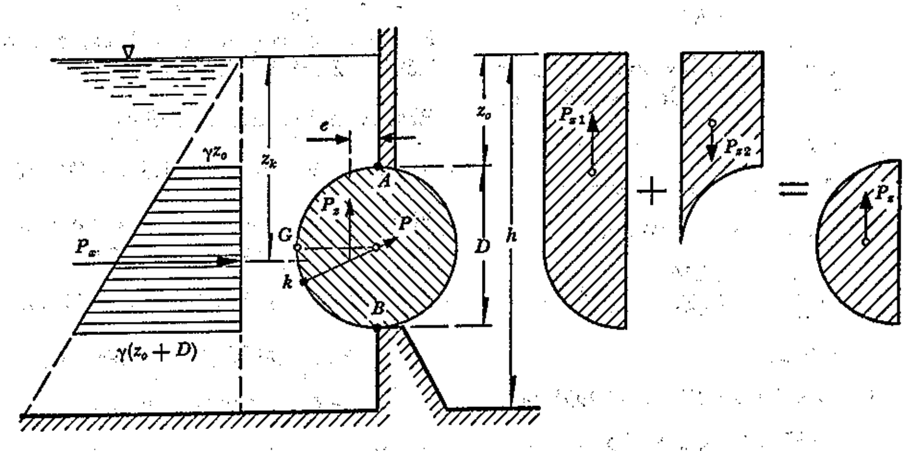


Figura 2.16. Empuje hidrostático sobre una superficie cilíndrica.

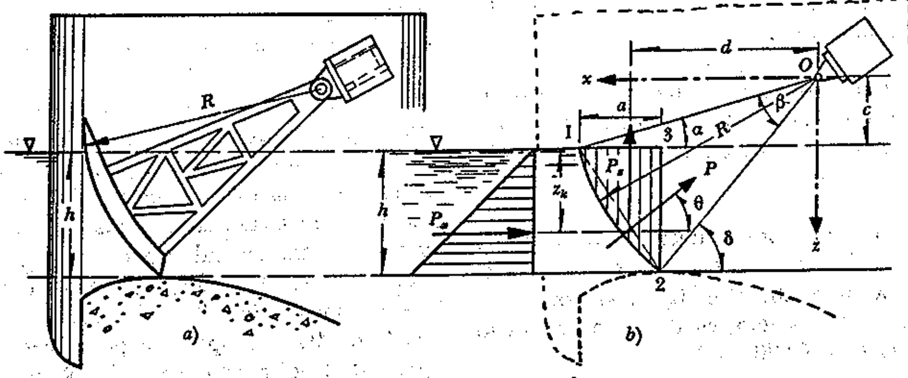


Figura 2.17. Empuje hidrostático sobre una compuerta radial que controla la descarga sobre un vertedor.

trada en la Fig. 2.17*a* para los datos $h = 1.5\,\text{m}$; $R = 3\,\text{m}$; y $\alpha = 15°$; el ancho de compuerta es $b = 5.00$ m.

Solución. De la geometría de la Fig. 2.17b se deduce lo siguiente:

$$c = R \operatorname{sen} \alpha = 3 \times 0.25882 = 0.776\,\text{m}$$

y para el sistema de ejes indicado, la ecuación del segmento es

$$x^2 + z^2 = R^2 = 9$$

De aquí se encuentran las abscisas de los puntos 1 y 2, substituyendo sus ordenadas

$$z_1 = 0.776\,\text{m}; \quad x_1 = 2.898\,\text{m}$$

$$z_2 = 2.276\,\text{m}; \quad x_2 = 1.955\,\text{m}$$

$$a = x_1 - x_2 = 0.943\,\text{m}$$

$$\tan\delta = \frac{z_2}{x_2} = \frac{2.276}{1.955} = 1.1642$$

$$\delta = 49°20'17''$$

$$\beta = \delta - \alpha = 34°\,20'\,17'' = 0.59931\,\text{rad}$$

$$P_x = \tfrac{1}{2}\,\gamma\, b\, h^2 = \tfrac{1}{2} \times 1 \times 5 \times 1.5^2 = $$
$$= 5.625\,\text{ton}$$

$$z_k = \frac{2}{3} \times 1.5 = 1.00\,\text{m}$$

$$P_z = \gamma\, b\, A_{123}$$

El área del sector 012 es:

$$\tfrac{1}{2}\, R^2 \beta = \tfrac{1}{2}\, 3^2 \times 0.59931 = 2.697\,\text{m}^2$$

El área del triángulo 012 vale:

$$\tfrac{1}{2}\, R^2 \operatorname{sen}\beta = \tfrac{1}{2} \times 9 \times 0.5641 = 2.538\,\text{m}^2$$

El área del segmento 121 es, por tanto, $2.697 - 2.538 = 0.159\,\text{m}^2$.

El área del triángulo 123 es:

$$\tfrac{1}{2}\, a\, h = \tfrac{1}{2} \times 0.943 \times 1.5 = 0.707\,\text{m}^2$$

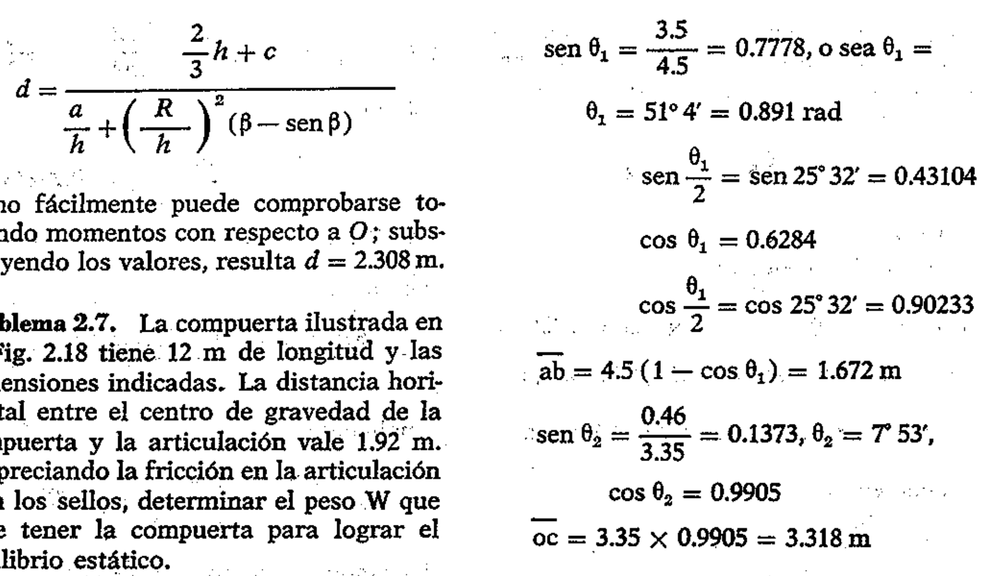
Finalmente, el área sombreada A_{123} vale: $A_{123} = 0.159 + 0.707 = 0.866\,\text{m}^2$

$$P_z = 1 \times 5 \times 0.866 = 4.33\,\text{ton}$$

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = 7.098\,\text{ton}$$

$$\tan\theta = 0.7698; \quad \theta = 37°\,35'$$

La distancia *d* con respecto al centro de la compuerta vale:



$$d = \frac{\frac{2}{3}h + c}{\frac{a}{h} + \left(\frac{R}{h}\right)^2 (\beta - \operatorname{sen}\beta)}$$

como fácilmente puede comprobarse tomando momentos con respecto a *O*; substituyendo los valores, resulta $d = 2.308\,\text{m}$.

Problema 2.7. La compuerta ilustrada en la Fig. 2.18 tiene 12 m de longitud y las dimensiones indicadas. La distancia horizontal entre el centro de gravedad de la compuerta y la articulación vale 1.92 m. Despreciando la fricción en la articulación y en los sellos, determinar el peso W que debe tener la compuerta para lograr el equilibrio estático.

Solución. Según la geometría de la compuerta, se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{3.5}{4.5} = 0.7778, \text{ o sea } \theta_1 =$$

$$\theta_1 = 51°\,4' = 0.891\,\text{rad}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\theta_1}{2} = \operatorname{sen} 25°\,32' = 0.43104$$

$$\cos\theta_1 = 0.6284$$

$$\cos\frac{\theta_1}{2} = \cos 25°\,32' = 0.90233$$

$$\overline{ab} = 4.5\,(1 - \cos\theta_1) = 1.672\,\text{m}$$

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{0.46}{3.35} = 0.1373, \; \theta_2 = 7°\,53',$$

$$\cos\theta_2 = 0.9905$$

$$\overline{oc} = 3.35 \times 0.9905 = 3.318\,\text{m}$$

La distribución de presiones varía linealmente: de cero en la superficie a $3.5\,\gamma$ en la articulación, y $3.96\,\gamma$ en el punto más

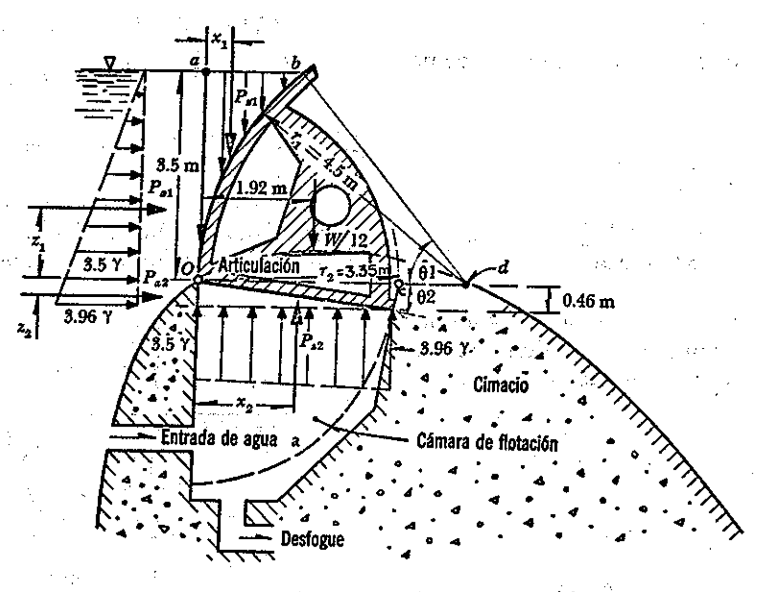


Figura 2.18. Compuerta de segmento sobre un cimacio.

bajo de la compuerta. Las componentes del empuje hidrostático que actúan sobre la compuerta, por cada metro de ancho de la misma, valen

$$P_{x1} = 1/2\,(3.5)^2\,\gamma = 6.125 \text{ ton}$$

El empuje P_{z1} es el peso del volumen de agua del triángulo $\overline{a}\ \overline{o}\ \overline{b}$;

$$\gamma\, 1/2\, \overline{ab}\, \overline{ao} = 0.5 \times 1.672 \times 3.5 = 2.926 \text{ ton}$$

menos el del segmento $\overline{ob}$ (tabla 2.1):

$$\gamma\, 1/2\, (r_1^2\,\theta_1 - r_1^2 \operatorname{sen} \theta_1) = 1.146 \text{ ton}$$

siendo entonces

$$P_{z1} = 2.926 - 1.146 = 1.78 \text{ ton}$$

$$P_{x2} = \frac{\gamma}{2}(3.5 + 3.96)\, 0.46 = 1.716 \text{ ton}$$

$$P_{z2} = \frac{\gamma}{2}(3.5 + 3.96)\, 3.318 = 12.376 \text{ ton}$$

La localización de estas fuerzas es como sigue:

$$z_1 = \frac{3.5}{3} = 1.167 \text{ m}$$

$$z_2 = \frac{0.46}{3}\,\frac{2 \times 3.96 + 3.5}{3.5 + 3.96} = 0.235 \text{ m}$$

En el cálculo de x_1 el peso del volumen de agua del triángulo $a\ o\ b$ tiene un brazo de palanca respecto de o que vale

$$\frac{1}{3} \times 1.672 = 0.557 \text{ m}$$

y el del segmento $\overline{ob}$ (tabla 2.1):

$$r_1 - \left[r_1 - r_1\left(1 - \frac{4 \operatorname{sen}^3(\theta_1/2)}{3\,\theta_1 - 3 \operatorname{sen}\theta_1}\right)\right] \cos\frac{\theta_1}{2} =$$

$$= r_1\left\{1 - \left[1 - \left(1 - \frac{4 \operatorname{sen}^3(\theta_1/2)}{3\,\theta_1 - 3 \operatorname{sen}\theta_1}\right)\right]\cos\frac{\theta_1}{2}\right\} =$$

$$= 4.5\left\{1 - \left[1 - \left(1 - \frac{4 \times 0.43104^3}{3 \times 0.891 - 3 \times 0.7778}\right)\right]\, 0.90233\right\} =$$

$$= 0.6698 \text{ m}$$

Por tanto,

$$x_1 = \frac{2.926 \times 0.557 - 1.146 \times 0.6698}{1.78} = 0.484 \text{ m}$$

Finalmente,

$$x_2 = \frac{3.35}{3}\,\frac{2 \times 3.96 + 3.5}{3.5 + 3.96} = 1.709 \text{ m}$$

Tomando momentos con respecto a la articulación:

$$1.78 \times 0.484 + 6.125 \times 1.167 + \frac{W}{12} \times 1.92 =$$

$$= 1.716 \times 0.235 + 12.376 \times 1.709$$

$$W = 84.653 \text{ ton}$$

2.6 Principio de Arquímedes

En el caso de un cuerpo sólido cualquiera flotando en un líquido (Fig. 2.19) existe un estado de equilibrio debido a que

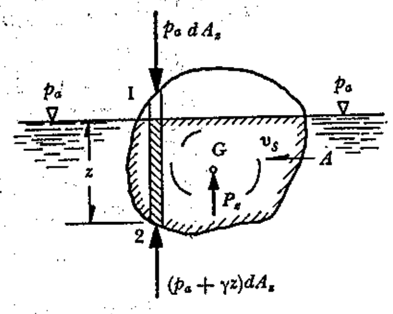


Figura 2.19. Flotación de un cuerpo.

el líquido ejerce sobre el cuerpo una presión ascendente de igual magnitud que el peso propio del cuerpo, que se puede calcular a partir de los resultados del subcapítulo 2.5.

En efecto, se observa que las componentes horizontales de las fuerzas de presión hidrostática se eliminan sin existir resultante horizontal alguna. Sólo existe la componente vertical P_z, la que se determina del equilibrio del cilindro vertical de sección transversal horizontal dA_z, limitado por la superficie A que encierra al cuerpo. Sobre el punto 1 actúa la fuerza elemental $p_a\, dA_z$; y sobre el punto 2 la fuerza elemental $(p_a + \gamma z)\, dA_z$. La resultante de las fuerzas verticales ascendentes es:

$$P_z = \iint_{A_z} [(p_a + \gamma z)\, dA_z - p_a\, dA_z] =$$

$$= \gamma \iint_{A_z} z\, dA_z$$

La integral es igual al volumen v_s de la parte del cuerpo en flotación que se encuentra debajo de la superficie libre del líquido; esto es:

$$P_z = \gamma\, v_s \qquad (2.22)$$

La Ec. (2.22) es la interpretación matemática del conocido *principio de Arquímedes: "Todo cuerpo sumergido en un líquido experimenta un empuje vertical ascendente igual al peso del volumen de líquido desalojado."* El punto de aplicación de dicho empuje coincide con el centro de gravedad del volumen desalojado y se conoce con el nombre de *centro de flotación o de carena.*

Problema 2.8. Una pieza de oro y plata, aleados en cierta ley, pesa 53.96 g fuera del agua y 50.7 g dentro de ella. Si el peso específico del oro puro es 19.25 g/cm³ y el de la plata 10.3 g/cm³, determinar los porcentajes a que se han ligado dichos metales.

Solución. El peso específico del agua a 4°C es 1 g/cm³ y, de acuerdo con la Ec. (2.22), el volumen de la pieza es $v = 53.96 - 50.70 = 3.26$ cm³; su peso específico $\gamma_p = 53.96/3.26 = 16.55$ g/cm³. El porcentaje x, de oro puro de la pieza resulta de plantear la ecuación

$$19.25\, x + 10.3\,(1 - x) = 16.55$$

Se obtiene $x = 0.70$, es decir, 70 % de oro y 30 % de plata.

El principio de flotación es la base del *hidrómetro*, aparato utilizado para medir el peso específico de un líquido (Fig. 2.20). Consiste en un tubo de vidrio cuya sección transversal tiene una área a, cerrada en su extremo superior y que en su extremo inferior remata en un bulbo lastrado de volumen v_0 con objeto de que su centro de gravedad sea lo más bajo posible y el hidrómetro flote verticalmente.

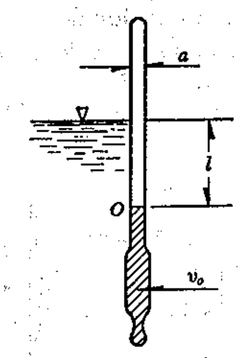


Figura 2.20. Hidrómetro.

Conocida la profundidad (hasta el nivel O) a que se sumerge el hidrómetro dentro de un líquido de peso específico conocido γ, para otro líquido dicha pro-

fundidad será diferente si su peso específico γ_1, es también distinto. Si el peso total del hidrómetro es G, se cumple que

$$G = \gamma_1 (v_0 + a\, l)$$

Para el primer líquido $v_0 = \dfrac{G}{\gamma}$; entonces resulta que

$$l = \frac{G}{\gamma_a}\left(\frac{\gamma}{\gamma_1} - 1\right)$$

Así, con esta ecuación se puede graduar una escala de longitudes l, sobre el tubo de vidrio, para una relación conocida γ/γ_1 y usarla después para otros líquidos.

Problema 2.9. El orificio rectangular de dimensiones $b \times h$ (Fig. 2.21), practicado en la pared vertical de un recipiente, se cierra con una compuerta de iguales dimensiones; dicha compuerta está conectada a una palanca y unida rígidamente por otra a un tambor cilíndrico hueco de diámetro D, longitud L y peso W, de tal manera que al subir el nivel del agua en el recipiente se abre la compuerta girando el sistema alrededor de O. ¿Cuál debe ser la distancia $\overline{00_1} = x$, de modo que ello ocurra para $z_G = 25$ cm; $D = 39$ cm; $L = 60$ cm; $h = 40$ cm; $b = 30$ cm; $W = 25$ kg?

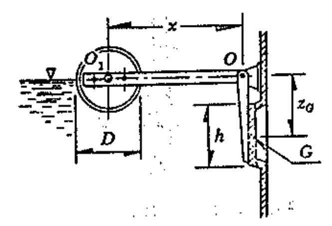


Figura 2.21. Compuerta automática.

Solución. Despreciando el peso correspondiente a la palanca $\overline{00_1}$, el empuje vertical sobre el tambor es

$$P_z = \frac{1}{2}\,\frac{\pi D^2}{4}\,\gamma L$$

Según la Ec. (2.15) la presión total sobre la compuerta es: $P = \gamma\, b\, h\, z_G$; la profundidad de su punto de aplicación, según la Ec. (2.17), será:

$$z_k = z_G + \frac{h^2}{12\, z_G}$$

Para el equilibrio de momentos alrededor de O se tiene que

$$(P_z - W)\, x = P\, z_k$$

Esto es,

$$x = \frac{P\, z_k}{P_z - G} = \frac{b\, h\left(z_G^2 + \dfrac{h^2}{12}\right)}{\dfrac{\pi D^2}{8}\, L\, \dfrac{W}{\gamma}}$$

Substituyendo los datos del problema, se tiene $x = 0.84$ m

2.7 Condiciones de equilibrio de los cuerpos en flotación

El equilibrio de un cuerpo flotante se clasifica en tres tipos.

Estable. Una fuerza actuante —por ejemplo el empuje del oleaje o del viento— origina una inclinación lateral, pero cuando aquélla cesa el cuerpo vuelve a su posición original. Este tipo de equilibrio lo tienen los cuerpos de centro de gravedad bajo.

Inestable. La fuerza actuante origina el volteo brusco del cuerpo (zozobra), el cual después recupera una posición más o me-

nos estable. Este equilibrio lo tienen aquellos cuerpos cuyo centro de gravedad es alto.

Indiferente. La fuerza actuante origina un movimiento de rotación continua del cuerpo, cuya velocidad es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza y cuya duración es la misma que la de dicha fuerza. Este tipo de equilibrio lo poseen cuerpos cuya distribución de la masa es uniforme (por ejemplo, la esfera con posición de flotación indiferente; el cilindro cuya posición de flotación es indiferente con su eje longitudinal en la dirección horizontal).

Las condiciones de equilibrio de un cuerpo flotante se explican con claridad utilizando como ejemplo un barco (como el mostrado en la Fig. 2.22a) cuya superficie de flotación muestra una forma simétrica con un eje longitudinal y otro transversal. La rotación alrededor del primer eje se conoce como *balanceo* y, del segundo, *cabeceo*.

En la posición de equilibrio (sin fuerzas ocasionales) sobre el barco actúa el peso W ejercido en el centro de gravedad G, además del empuje ascendente del líquido B que actúa en el centro de flotación o de carena, G_1. Ambas fuerzas son iguales, colineales y de sentido contrario.

Al producirse una fuerza ocasional el barco se inclina un ángulo θ y pasa a ocupar la posición mostrada en la Fig. 2.22b; el punto G_1 pasa ahora a la posición G_1'.

Por efecto de las cuñas sombreadas —una que se sumerge y otra que emerge por encima de la línea de flotación— se origina un movimiento producido por las fuerzas F_1 y F_2. El empuje ascendente total B, en su nueva posición G_1', es la resultante de B en su posición original y las fuerzas $F_1 = F_2$ por efecto de las cuñas. El momento de la fuerza resultante con respecto a G_1 será igual a la suma algebraica de los momentos de sus componentes, por lo cual se cumple que

$$n = \frac{F_1 f}{B} \tag{2.23}$$

Al elemento de volumen: $y\, dA = x \tan\theta\, dA$, corresponde un momento de desequilibrio $dM = \gamma\, x^2\, dA\, \tan\theta$; el momento de la fuerza B con respecto a 0 es entonces:

$$F_1 f = \gamma \tan\theta \iint_A x^2\, dA = \gamma \tan\theta\, I_z \tag{2.24}$$

donde I_z representa el momento de inercia del área de la sección del barco a nivel de la superficie de flotación $\overline{ab}$ con res-

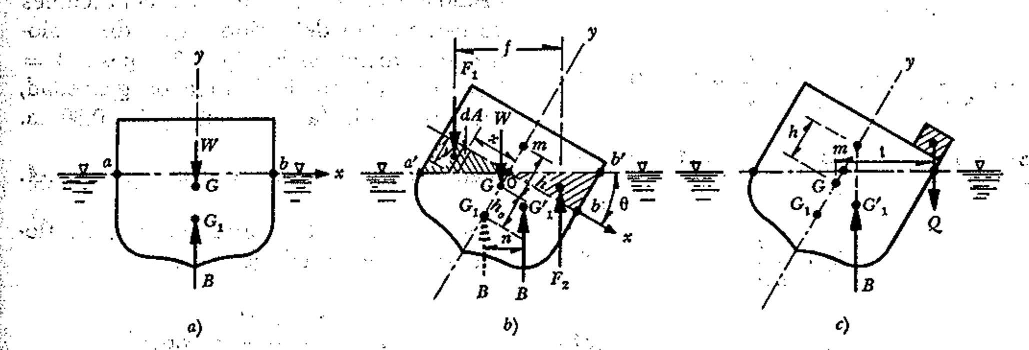


Figura 2.22. Estabilidad de un barco.

pecto al eje longitudinal z del mismo que pasa por 0.

Substituyendo la Ec. (2.24) en la Ec. (2.23) resulta que

$$n = \frac{\gamma \tan\theta \, I_z}{B}$$

además, siendo $B = \gamma v_0$, donde v_0 es el volumen desplazado por el barco, se obtiene

$$n = \frac{\tan\theta \, I_z}{v_0} \qquad (2.25)$$

El par de fuerzas B y W producen un momento $M_1 = W h \operatorname{sen}\theta$, que tratará de volver al barco a su posición original o de voltearlo más, hasta hacerlo zozobrar.

Para predecir el comportamiento del barco es importante conocer la posición del punto m, de intersección de B en G_1, con el eje y del barco inclinado; punto que se denomina *metacentro* y la *altura metacéntrica* se indica con h. A medida que h aumenta es más estable la flotación del cuerpo, es decir, más rápidamente tratará de recobrar su posición original.

El equilibrio es estable si el punto m queda arriba del punto G ($h > 0$) y es inestable si m queda abajo de G; por tanto, la estabilidad del barco exige que sea $h > 0$, esto es:

$$h = \frac{n}{\operatorname{sen}\theta} - h_0 = \frac{\tan\theta \, I_z}{\operatorname{sen}\theta \, v_0} - h_0 > 0 \qquad (2.26)$$

Siendo θ pequeño, $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta$ y entonces

$$h_0 < \frac{n}{\operatorname{sen}\theta} \qquad (2.27a)$$

$$h_0 < \frac{I_z}{v_0} \qquad (2.27b)$$

Las alturas metacéntricas empleadas, en el diseño de barcos son: para barcos de vela, 0.90 a 1.50 m; para barcos de guerra, 0.75 a 1.30 m; para barcos cargueros, 0.60 a 0.90 m; y para barcos de pasajeros, 0.45 a 0.60 m (Ref. 7). El área de la superficie a nivel de la línea de flotación vale:

$$A = \beta L B$$

donde

- B ancho máximo del barco
- L longitud máxima del barco
- β coeficiente que para pontones varía entre 0.80 y 0.95; y, para la mayoría de los barcos cargueros, entre 0.75 y 0.85.

Cuando la inclinación del barco se debe a una carga asimétrica Q, como se indica en la Fig. 2.22c cuya condición de equilibrio es con θ pequeña, se tiene que

$$B h \theta = Q \times l$$

y la altura metacéntrica vale

$$h = \frac{Q l}{B \theta}$$

Problema 2.10. Estimar las condiciones de estabilidad del cajón cuyas dimensiones se indican en la Fig. 2.23: peso $W = 2.88$ ton; altura del centro de gravedad, medida desde la base del cajón, 0.30 m.

Solución. Estabilidad respecto del eje *A-A*.

El momento de inercia del área de flotación respecto del eje *A-A* es:

$$I_A = \frac{1.8 \times 4^3}{12} = 9.6 \, \text{m}^4$$

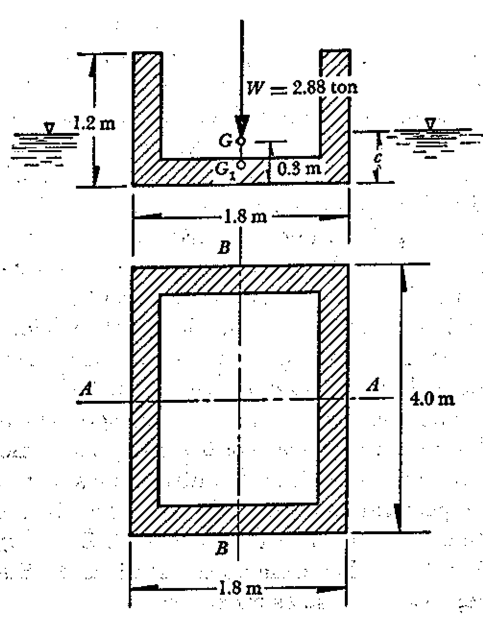


Figura 2.23. Cajón flotante.

y la profundidad de flotación:

$$c = \frac{W}{\gamma A} = \frac{2.88}{1 \times 1.8 \times 4} = 0.4 \, \text{m}$$

La distancia entre el centro de gravedad G (del cajón) y el centro de flotación, vale $h_0 = 0.3 - 0.2 = 0.10$ m.

La altura metacéntrica, según la Ec. (2.26), es

$$h = \frac{9.6}{2.88} - 0.10 = 3.23 \, \text{m} > 0$$

Esto es, el cajón es estable por lo que se refiere al volteo alrededor del eje transversal.

Estabilidad respecto del eje *B-B*.

$$I_B = \frac{4 \times 1.8^3}{12} = 1.94 \, \text{m}^4$$

$$h_B = \frac{1.94}{2.88} - 0.1 = 0.57 \, \text{m} > 0$$

(también estable)

2.8 Equilibrio del movimiento

Como se ha mencionado, en ausencia de movimiento relativo entre las partículas líquidas o entre partículas líquidas y sus fronteras, los líquidos no están sujetos a esfuerzo cortante. Esto es cierto cuando el líquido está en reposo, pero también cuando está sujeto a un movimiento uniformemente acelerado después que se ha establecido el *equilibrio relativo*. En el último caso, el líquido se comporta como un cuerpo rígido en movimiento; esto es, en equilibrio estático.

Por ejemplo, sea un recipiente lleno de un líquido de peso total W, que mediante un cable que se desliza sobre una polea sin fricción es levantado por un peso $W_1 > W$ (Fig. 2.24). Si se desprecia el peso del cable y el efecto de fricción, y se satisface la segunda ley de Newton, entonces

$$W_1 - W = \frac{W_1 + W}{g} a$$

donde $(W_1 + W)/g$ representa la masa de las partes que se mueven y a la aceleración de las mismas, la que vale

$$a = g \frac{W_1 - W}{W_1 + W}$$

y si h representa el tirante del líquido dentro del recipiente, la presión sobre el fondo es

$$p = \gamma h + \frac{\gamma h}{g} g \left(\frac{W_1 - W}{W_1 + W} \right)$$

$$p = \gamma \left(1 + \frac{W_1 - W}{W_1 + W} \right) h$$

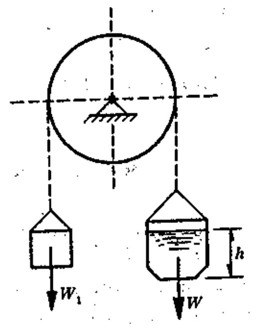


Figura 2.24.

Se observa que la distribución de presiones sigue siendo lineal y es equivalente a que el peso específico del líquido se incremente al valor

$$\gamma\left(1+\frac{W_1-W}{W_1+W}\right)$$

Se considera ahora un recipiente cilíndrico de radio R, lleno de líquido, que gira alrededor de su eje vertical (Fig. 2.25).

Al principio las partículas del líquido, en la proximidad de la pared y del fondo, se mueven más lentamente que el recipiente hasta que (por viscosidad) el movimiento se transmite a la totalidad de las partículas y todo el líquido gira alrededor del eje del cilindro como si fuera un cuerpo rígido. Esto significa que a la distancia r del eje cada partícula posee una velocidad tangencial $v = \omega r$, donde ω representa la velocidad angular (de rotación) del recipiente. Dicho movimiento tiene las características de un *vórtice forzado* (Cap. 10).

Las fuerzas de cuerpo corresponden a las reacciones $r\omega^2 \cos\theta = x\omega^2$, así como $r\omega^2 \operatorname{sen}\theta = y\omega^2$, en las direcciones x y y, respectivamente, de tal modo que dichas fuerzas son: $X = x\omega^2$, $Y = y\omega^2$, $Z = -g$. Por tanto, las ecuaciones estáticas de Euler (Ec. 2.1), se escriben así:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+x\omega^2=0$$

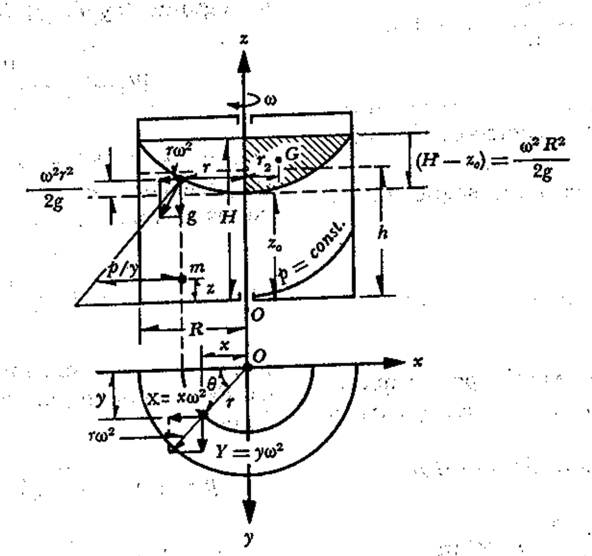


Figura 2.25. Recipiente en rotación.

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+y\omega^2=0$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g=0$$

Si se multiplica la primera ecuación por dx, la segunda por dy, la tercera por dz y, se suman, resulta

$$\rho\omega^2\, x\, dx+\rho\omega^2\, y\, dy-\gamma\, dz=dp$$

La integración conduce a

$$\rho\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)-\gamma z=p+C$$

o bien, con $r^2 = x^2 + y^2$

$$\rho\frac{\omega^2 r^2}{2}-\gamma z=p+C \qquad (2.28)$$

Entonces, tanto las superficies equipresionales como la superficie libre del líquido, son paraboloides de revolución. La constante C resulta de la condición de que, para el punto de altura $z = z_0$ y radio $r = 0$ que se halla sobre la superficie libre del líquido, $p = p_0$. Entonces, se obtiene

$$p=p_0+\rho\frac{\omega^2 r^2}{2}+\gamma(z_0-z)$$

y con $z = H$; $r = R$; $p = p_0$, resulta:

$$H-z_0=\frac{\omega^2 R^2}{2g} \qquad (2.29)$$

Cuando el recipiente no se mueve, la altura alcanzada por el líquido en el mismo vale h. El volumen del líquido permanecerá constante antes y después de iniciarse el movimiento de rotación, lo que expresado matemáticamente da:

$$\pi R^2 h=\pi R^2 H-\tfrac{1}{2}\pi R^2(H-z_0)$$

Donde, $\frac{1}{2}\pi R^2(H - z_0)$ corresponde al volumen obtenido por la rotación de la superficie parabólica meridiana. Se tiene, finalmente

$$h=\frac{H+z_0}{2} \qquad (2.30)$$

y de aquí, $H = 2h - z_0$, que substituida en la Ec. (2.29), al despejar z_0, se obtiene

$$z_0=h-\frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

Esta ecuación se aplica en los dispositivos utilizados para medir la velocidad angular de cuerpos en movimiento de rotación; en general, las propiedades de este movimiento tienen diferentes aplicaciones en la industria y en la agricultura.

Problema 2.11. El movimiento del agua en determinada curva de un río origina una sobreelevación h de su nivel en la orilla exterior, como se muestra en la figura 2.26. Determinar la sobreelevación h de la superficie libre transversal del agua considerando que la velocidad V de las partículas es la misma en todos los puntos (Ref. 8).

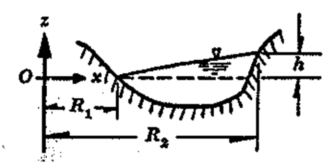


Figura 2.26. Sobreelevación del nivel en la curva de un río.

Solución. En la dirección x la fuerza de cuerpo es la producida por la fuerza centrífuga que vale

$$X=\frac{V^2}{x}$$

En la dirección z la fuerza de cuerpo es la del peso propio y vale $Z = -g$.

El sistema de Ecs. (2.1) se escribe entonces

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{V^2}{x} = 0$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g = 0$$

Multiplicando la primera ecuación por dx y la segunda por dy, al sumar se obtiene

$$-\frac{1}{\rho}dp + \frac{V^2}{x}dx - g\,dz = 0$$

Para la superficie libre p = constante; $dp = 0$, por lo que resulta

$$g\,dz = \frac{V^2}{x}dx$$

Al integrar, tomando en cuenta la condición de frontera de que para $x = R_1$, $z = 0$, se obtiene

$$z = \frac{V^2}{g}\ln\frac{x}{R_1}$$

La elevación es entonces:

$$h = \frac{V^2}{g}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

o bien, si se mide la elevación h se puede calcular V como sigue:

$$V = \sqrt{\frac{g\,h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$$

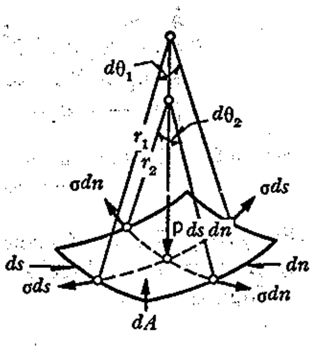
Para $R_1 = 5$ m; $R_2 = 25$ m y $V = 1.69$ m/seg; $h = 0.47$ m.

2.9 Fuerzas capilares

En las zonas de la superficie libre de un líquido con curvatura, las tensiones superficiales que sobre ella actúan tienen una resultante en la dirección normal a la superficie, la cual se designa como *fuerza capilar.*

Para obtener esa resultante, en la figura 2.27 se presenta de manera esquemática un elemento de superficie dA, limitado por los elementos de línea ds y dn, dados por los ángulos $d\theta_1$ y $d\theta_2$ así como los radios de curvatura r_1 y r_2.

Suponiendo que los ángulos son pequeños, la fuerza resultante en la dirección radial vale



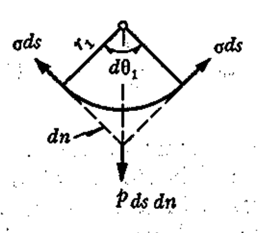


Figura 2.27. Presión capilar sobre un elemento de superficie.

$$p\,ds\,dn = \sigma\,ds\,d\theta_1 + \sigma\,dn\,d\theta_2$$

y con

$$d\theta_1 = \frac{dn}{r_1}; \quad d\theta_2 = \frac{ds}{r_2};$$

resulta

$$p = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \tag{2.31}$$

donde p es la presión de curvatura cuyas dimensiones son $[F L^{-2}]$ y el término

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

es la curvatura media del elemento de superficie.

Problema 2.12. Determinar la altura z_0 a la que asciende el agua dentro de un tubo capilar de radio 0.05 cm, por efecto de la tensión superficial del líquido (Fig. 2.28).

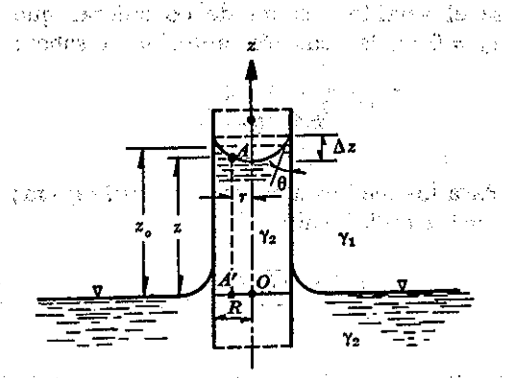


Figura 2.28. Líquido dentro de un tubo capilar.

Solución. Si un tubo capilar cilíndrico de radio R se introduce en un líquido que moja sus paredes, el nivel dentro del tubo se elevará por encima de la superficie libre del líquido una cierta distancia, para formar el llamado *menisco* cuya forma es cóncava hacia arriba, como se muestra en la Fig. 2.28. Sobre el menisco un punto cualquiera A queda a la distancia r del eje del tubo y, a la altura z, sobre el nivel de la superficie del líquido. Si γ_1 es el peso específico del aire y γ_2 el del líquido, en el punto A' localizado en la intersección de la vertical que pasa por A con el nivel de la superficie original del líquido, según la Ec. (2.31) y la ley de Pascal se tendrá la presión dada por la ecuación

$$p_{A'} = \gamma_2 z = \sigma\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

Si se considera que $z \approx z_0$ y se hace $r_1 = r_2 = r$, con $r = R/\cos\theta$, se obtiene

$$\sigma = \frac{r}{2}\gamma_2 z_0 = \frac{\gamma_2 z_0}{2}\frac{R}{\cos\theta}$$

De esta ecuación se puede calcular σ si se mide z_0, pues θ se obtiene de la condición geométrica

$$\Delta z = r(1 - \operatorname{sen}\theta) = \frac{R}{\cos\theta}(1 - \operatorname{sen}\theta)$$

De la misma ecuación se tiene también

$$z_0 = \frac{2\sigma}{\gamma_2 R}\cos\theta$$

donde se observa que z_0 es inversamente proporcional al radio del tubo.

Aproximadamente, el menisco adquiere la forma de una semiesfera para un tubo capilar de radio pequeño; entonces $\theta = 0$ y, de la ecuación anterior, resulta

$$z_0 = \frac{2\sigma}{\gamma_2 R}$$

que es la expresión buscada.

Para agua-vidrio, $\sigma = 0.077$ g/cm; $\gamma_2 = 1$ g/cm^3 y $R = 0.05$ cm, resulta $z_0 = 3.1$ cm.

Cuando el líquido no moja la pared del tubo (el mercurio) se produce entonces una depresión, pues queda el menisco (convexo) debajo del nivel de la superficie del líquido y su concavidad es ahora hacia abajo. En esa situación el ángulo θ es mayor que $\pi/2$ y los resultados anteriores pueden ser igualmente aplicados.

Cuando se introducen en el agua dos placas paralelas separadas se demuestra que la separación a (en cm) se puede obtener con suficiente exactitud: $z_0 = \dfrac{0.15}{a}$; para aire y alcohol, $z_0 = \dfrac{0.05}{a}$.

Problema 2.13. Determinar la altura h a la que asciende un líquido por encima de la cresta de un vertedor de pared delgada, por efecto de la tensión superficial (Fig. 2.29 y Ref. 9).

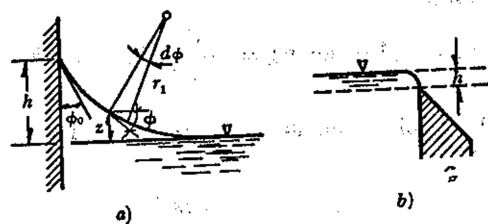


Figura 2.29. Corrección capilar en una pared vertical.

Solución. Al introducir una placa plana vertical dentro de un líquido de peso específico γ, la superficie libre adopta una forma cilíndrica cóncava hacia arriba, en la proximidad de la placa. De acuerdo con la Ec. (2.31) para $r_2 = \infty$ y de la ley de Pascal, la presión en un punto del líquido cerca de la placa, sobre la horizontal que coincide con el nivel original del líquido, vale

$$\gamma z = \frac{\sigma}{r_1}$$

o bien,

$$\gamma z\, dz = \sigma \frac{dz}{r_1}$$

Por otra parte, si $r_1\, d\phi = ds = dz/\text{sen}\,\phi$, de aquí resulta $dz/r_1 = \text{sen}\,\phi\; d\phi$ y se puede escribir $\gamma z\, dz = \sigma\, \text{sen}\,\phi\, d\phi$, cuya integración conduce a $\gamma z^2/2 = -\sigma \cos\phi + C$. Siendo $\phi = 0$ para $z = 0$, la constante de integración vale $C = \sigma$ y, asimismo para $z = h$, $\phi = 90° - \phi_0$, se obtiene

$$\frac{\gamma h^2}{2} = \sigma\,[1 - \cos(90° - \phi_0)] = \sigma\,(1 - \text{sen}\,\phi_0)$$

De este modo la altura h sobre la cresta del vertedor (Fig. 2.29b) que alcanza la superficie libre del líquido por efecto de la tensión superficial, antes de producirse el vertido, resulta de considerar que $\phi_0 = 0$ en la ecuación anterior, a saber:

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\gamma}}$$

Para los medios agua-aire, $\sigma = 0.077$ g/cm; $\gamma = 1$ g/cm^3, h vale

$$h = \sqrt{\frac{2 \times 0.077}{1}} = 0.392 \text{ cm}$$

PROBLEMAS

1. Determinar:

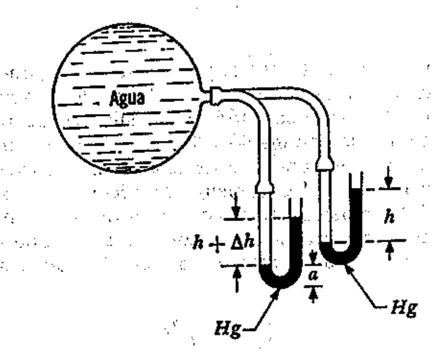
a) la altura h que se alcanzará en el barómetro de la Fig. 2.6 (al utilizar agua en lugar de mercurio) si se encuentra a una presión atmosférica de 736 mm de Hg y a la temperatura de 4°C.

b) la altura barométrica, si la temperatura del agua se eleva a 20°C y 80°C.

Las magnitudes del peso específico y la presión absoluta de vaporización del agua para las diferentes temperaturas son:

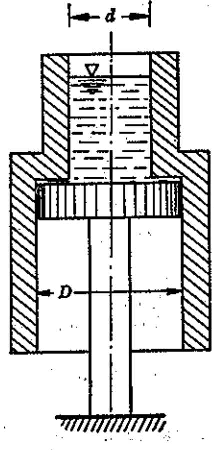
	4°C	20°C	80°C
γ, en kg/m^3	1000	998.2	971.8
pabs, en kg/m^2	63	236	4830

2. La presión dentro de un conducto se mide con un manómetro de mercurio abierto en forma de U, como se muestra en la figura. Calcular la variación Δh (en mm) que se presenta en el manómetro si éste se mueve hacia abajo la distancia a (en mm).



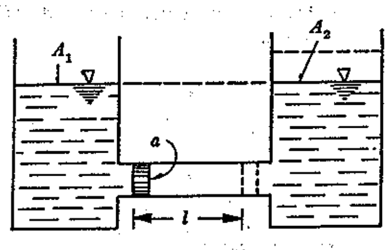
Problema 2

3. Un recipiente abierto en ambos lados se encuentra en equilibrio estático sobre un émbolo inmóvil; el recipiente tiene un peso de 16 kg y se compone de dos partes cilíndricas con diámetros $D = 0.50$ m y $d = 0.30$ m. Determinar el volumen mínimo de agua que debe verterse sobre la parte superior del recipiente para que éste flote sobre el émbolo. La fricción entre ambos es despreciable.



Problema 3

4. Determinar el trabajo W efectuado para mover un émbolo, de superficie a, sobre una distancia l de un tubo que une dos recipientes de superficies A_1 y A_2, llenos de un líquido de peso específico γ hasta el mismo nivel antes de mover el émbolo. Es despreciable la fricción entre las paredes del émbolo y del tubo.



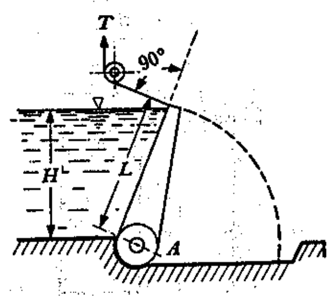
Problema 4

5. La compuerta plana que se muestra en la figura tiene las dimensiones $L = 2.5$ m; $B = 10$ m y eleva el nivel aguas arriba hasta $H = 2.3$ m. Determinar:

a) la resultante T de las fuerzas de tensión del cable que mantienen la compuerta en la posición indicada;

b) el momento máximo de flexión M sobre la compuerta;

c) la fuerza de reacción R_A sobre el apoyo inferior.

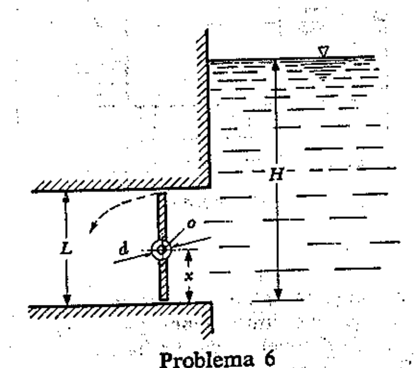


Problema 5

6. La compuerta rectangular giratoria de dimensiones $L = 2$ m y $B = 3$ m, obtura la salida de agua del recipiente cuyo nivel es $H = 4$ m.

a) Determinar a qué distancia x desde el borde inferior de la compuerta debe localizarse su eje de giro, para que al abrirse tenga que vencerse únicamente el momento por la fuerza de fricción en el perno o.

b) Calcular el momento M_T debido a la fuerza de fricción si el diámetro del perno es $d = 150$ mm y el coeficiente de fricción es $f = 0.2$.



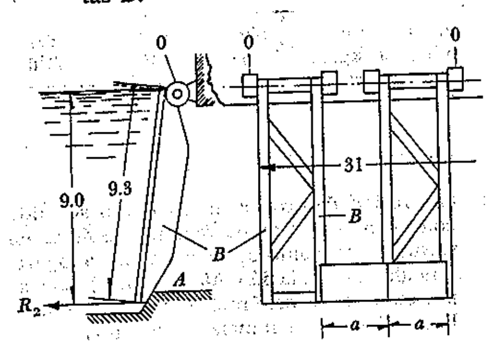
Problema 6

7. La compuerta de la figura tiene por dimensiones 9.3 × 31 m y se encuentra articulada en el punto O, además de estar apoyada en A. Se piensa estructurar —como se muestra en la figura— formando tableros de ancho $a = 1.8$ m, apoyados sobre las viguetas B. Determinar:

a) el empuje total P del agua sobre toda la compuerta;

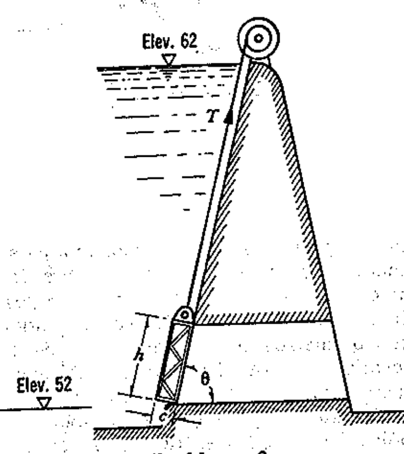
b) la magnitud de la reacción R_2 en el punto A;

c) el momento flexionante sobre las viguetas B.



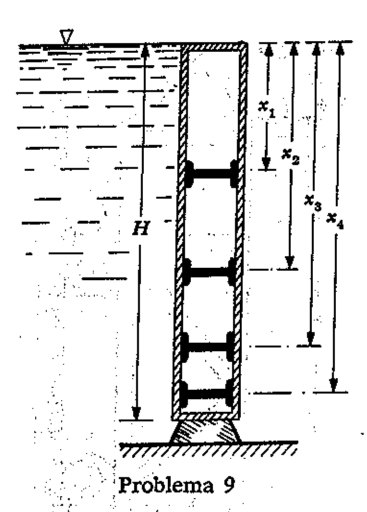
Problema 7

8. La compuerta rectangular —de la figura— tiene las dimensiones: $h = 1.8$ m; $b = 2.4$ m; $c = 0.4$ m; pesa 2 ton. Se desliza sobre un plano de inclinación $\theta = 70°$ y sirve para obturar el conducto de una presa. Considerando que el coeficiente de fricción es 0.35, determinar la magnitud de la tensión T necesaria para mover la compuerta cuando el nivel del agua alcanza la elevación de 62 m.



Problema 8

9. La compuerta rectangular —mostrada en la figura— tiene las dimensiones $H = 4$ m y $B = 6$ m (ancho) y sirve para contener el agua en un recipiente. Determinar la magnitud P del empuje total debido al agua; la profundidad x a que deben colocarse las viguetas para que soporten el empuje de manera que se distribuya con la misma intensidad; por último, el momento flexionante M de cada vigueta suponiendo que se encuentran sólo apoyadas en sus extremos.

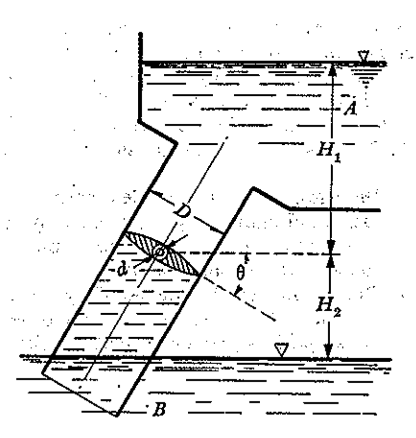


Problema 9

10. Una válvula de mariposa, de diámetro $D = 1$ m, obtura un tubo con un ángulo $\theta = 45°$ respecto de la horizontal, para cerrar el paso del agua del recipiente A al B. Calcular el momento necesario para abrir la válvula (en el sentido contrario al de las manecillas del reloj), considerando que el coeficiente de fricción es 0.2 en el pivote de diámetro $d = 0.15$ m al centro de la válvula. El cálculo será para cada una de las dos condiciones siguientes:

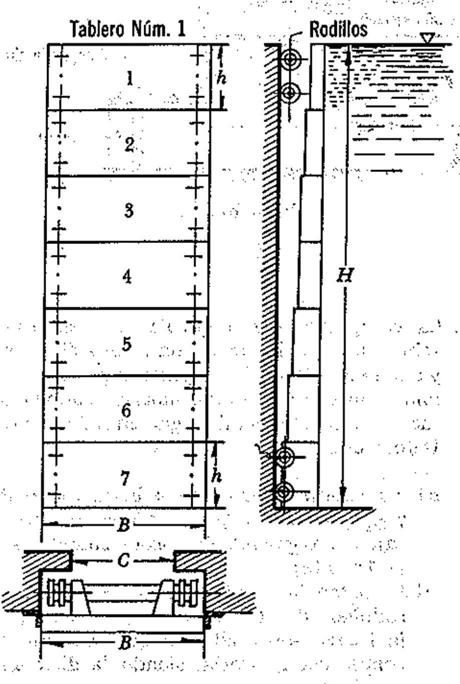
a) el tubo debajo de la válvula está lleno de aire a la presión atmosférica;

b) el mismo tubo está lleno de agua con las alturas $H_1 = 1.2$ m y $H_2 = 2$ m.



Problema 10

11. Un ducto rectangular de dimensiones $H \times C$ se proyecta construir en una presa para ali-

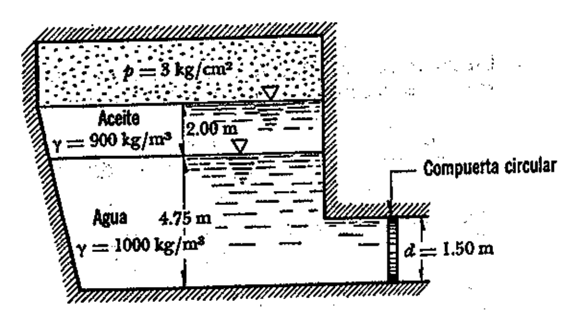


Problema 11

mentar una turbina. Para posibles reparaciones del propio ducto o de la turbina es necesario obturar el ducto con una serie de viguetas especiales de medidas $h \times B = 1.2 \times 3.4$ m, cada una de ellas provistas de 2 pares de rodillos en sus extremos.

a) Determinar las fuerzas de empuje hidrostático del agua, P_1 y P_7, sobre la primera y séptima vigueta, así como el momento flexionante en las mismas.
b) Determinar las distancias Δh_1 y Δh_7 entre el centro de presiones y el centro de gravedad para la primera y séptima viguetas.

12. Calcular la magnitud y posición del empuje hidrostático sobre la compuerta circular mostrada en la figura.

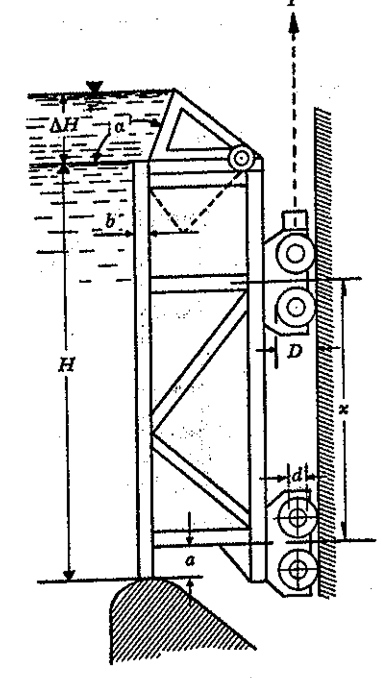


Problema 12

13. La compuerta que controla las descargas sobre un cimacio tiene una altura $H = 6$ m y ancho $B = 30$ m. En la parte superior tiene una compuerta giratoria superior que puede incrementar el nivel del agua en $\Delta H = 1.5$ m. Determinar:

a) los empujes hidrostáticos horizontales P_1 y P_2 sobre la compuerta plana cuando se baje la compuerta giratoria y cuando ésta se levante;
b) la distancia x entre los dos sistemas de rodillos, de tal manera que sea igual la fuerza sobre ellos cuando se baje la compuerta giratoria, siendo la distancia $a = 0.2$ m;
c) la fuerza T necesaria para levantar la compuerta cuando el nivel sea $H + \Delta H$.

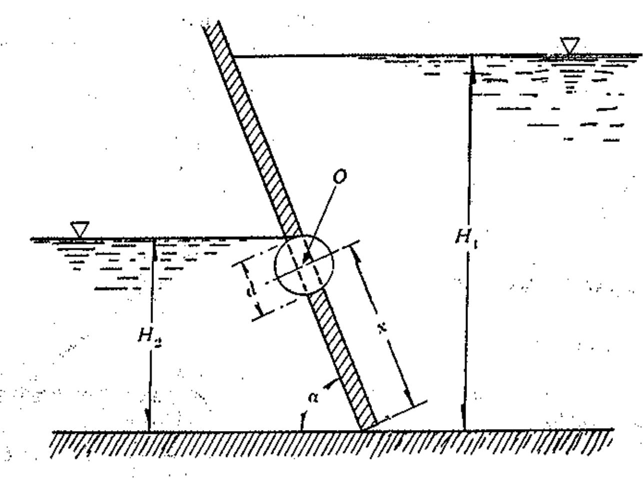
El peso total de la compuerta es $W = 150$ ton; el diámetro, $D = 0.6$ m, de los rodillos, $d = 0.3$ m; el coeficiente de fricción interna de los rodillos $f = 0.01$, el diámetro de los pernos $d = 0.3$ m; $b = 0.1$ m y el ángulo $\alpha = 120°$.



Problema 13

14. Una compuerta debe girar automáticamente para dar paso al agua cuando su nivel es $H_1 \geq 6$ m. El eje de giro es O y el diámetro del rodillo $d = 0.4$ m, con un coeficiente de fricción $f = 0.2$. El ancho de la compuerta es $B = 8$ m y su ángulo de inclinación $\alpha = 60°$. Determinar:

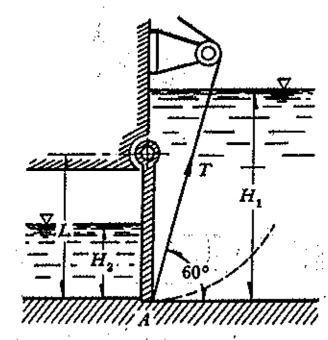
a) la distancia x a la cual debe estar situado el eje de giro de la compuerta, si aguas abajo existe un nivel $H_2 = 3$ m;
b) la fuerza P transmitida a los soportes en el momento del volteo.



Problema 14

15. La compuerta articulada (ver la figura) tiene las dimensiones $L \times B = 3 \times 4$ m y soporta los tirantes de agua $H_1 = 5$ m; $H_2 = 2$ m. Determinar:

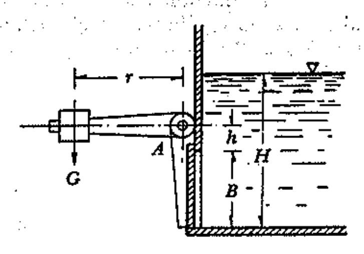
a) la reacción R_A que se produce sobre el apoyo A;
b) la magnitud de la tensión T necesaria para mover la compuerta, considerando despreciable la fricción en la articulación.



Problema 15

16. La compuerta mostrada tiene por dimensiones $B \times B = 1 \times 1$ m, se articula en A y está conectada a un brazo rígido que soporta un peso G a la distancia $r = 1.4$ m.

a) Calcular la magnitud del peso G necesario para mantener cerrada la compuerta, siendo $H = 2$ m y $h = 0.3$ m.
b) Determinar la magnitud de la fuerza R que se produce en la articulación A.

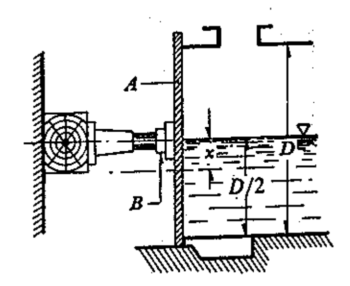


Problema 16

17. La tapa A está sujeta a presión contra un tubo cilíndrico horizontal de diámetro $D = 1.20$ m, con la ayuda de un gato B colocado en su centro. El tubo está lleno de agua hasta la mitad. Determinar:

a) La fuerza P de presión que debe ejercer el gato para detener la tapa;
b) la posición x del gato para la cual dicha fuerza sería mínima y calcular también la magnitud P_x de dicha fuerza;

c) la presión de vacío p_v en el recipiente,

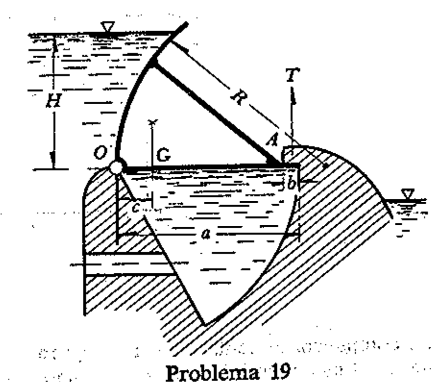


Problema 17

necesaria para sostener la tapa si se deseara eliminar el gato.

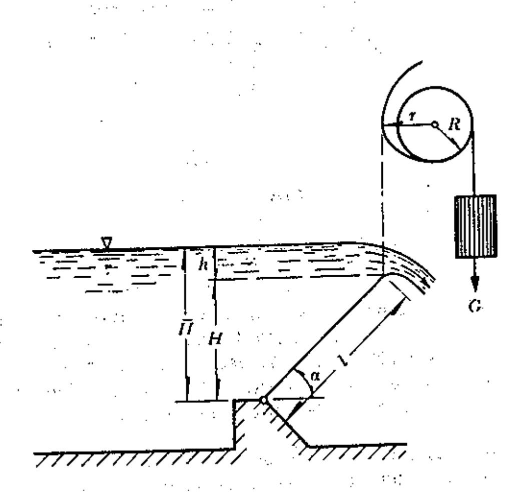
18. En ocasiones se utilizan compuertas, como las mostradas en las figuras, para mantener un nivel constante de la superficie del agua. Para calcular su equilibrio, aquí se desprecia la influencia de la caída de presión en la proximidad del canto superior de la compuerta, así como la fricción originada en su movimiento. Determinar las condiciones de equilibrio en el instante en que se inicia el movimiento.

19. La compuerta de sector (mostrada) tiene un radio $R = 4.5$ m, soporta un tirante de agua $H = 3$ m y gira alrededor del punto O. Su peso es $W = 1$ ton/m localizado a la distancia $c = 0.6$ m; además, $a = 4$ m y $b = 0.3$ m. Calcular la fuerza T de reacción sobre el punto A en la compuerta por metro de longitud.



Problema 19

20. *a)* Determinar las componentes horizontal y vertical del empuje debido a la presión hidrostática que actúa sobre la compuerta radial de la figura, así como el valor

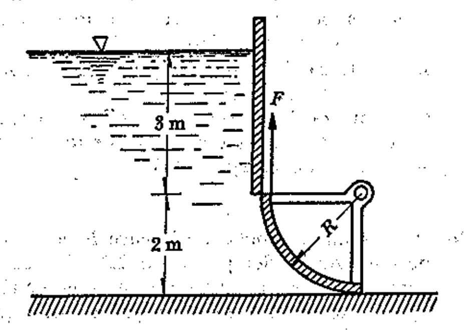


Problema 18

de la resultante y su inclinación respecto de la horizontal.

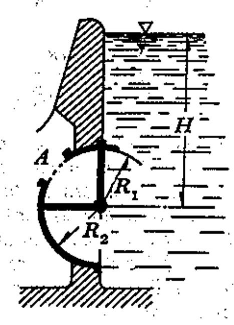
b) Determinar la fuerza F necesaria para abrir la compuerta, despreciando su peso.

El radio de la compuerta es $R = 2$ m y su ancho $b = 3$ m.



Problema 20

21. Una compuerta radial cierra la apertura lateral A del recipiente; consta de dos partes que tienen un radio $R_1 = R_2 = 1$ m y un ancho $b = 1$ m. Determinar:



Problema 21

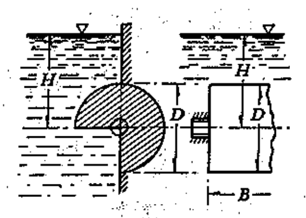
a) la fuerza total P de la presión del agua sobre la compuerta y el momento M de esta fuerza con respecto al eje de la compuerta, el cual se encuentra localizado a la profundidad $H = 2.5$ m desde la superficie libre;

b) el radio R_2 para que el momento respecto al centro de la compuerta fuese cero (manteniendo $R_1 = 1$ m).

22. La compuerta horizontal mostrada en la figura tiene las dimensiones $D = 0.8$ m y ancho $B = 3$ m.

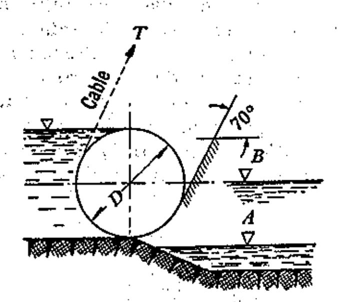
a) Calcular el empuje total P sobre la superficie de la compuerta expuesta a la presión hidrostática, así como el momento respecto al centro de la misma, para $H = 1$ m.

b) Calcular las mismas magnitudes si la compuerta gira un ángulo de 180°.



Problema 22

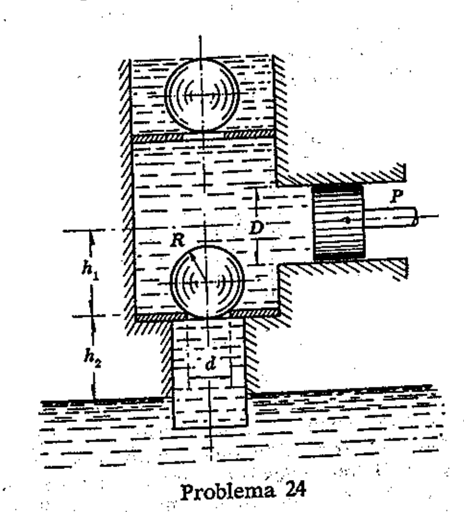
23. La compuerta cilíndrica mostrada tiene un diámetro $D = 1.2$ m, una longitud $L = 16$ m, pesa 40 ton y desliza sobre un plano inclinado a 70°. Calcular el empuje total P sobre la compuerta y el ángulo de inclinación del mismo respecto de la horizontal, así como la magnitud de la tensión T necesaria para izar la compuerta cuando el nivel aguas abajo adquiere las elevaciones A y B.



Problema 23

24. Determinar la fuerza F que presiona a una esfera de acero ($\gamma = 8$ ton/m³) cuyo radio es $R = 100$ mm y que obtura a una tubería de succión a través de un orificio cuyo diámetro $d = 125$ mm. El émbolo tiene un diá-

metro $D = 350$ mm y la fuerza con que empuja es $P = 400$ kg. El asiento de la esfera está colocado abajo del eje del cilindro a la distancia $h_1 = 0.5$ m y, por arriba de la superficie libre del depósito, a la distancia $h_2 = 6.5$ m; la tubería de succión está llena de agua.



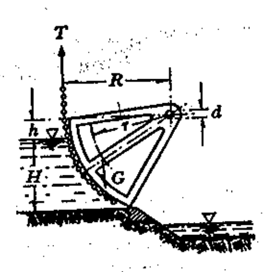
Problema 24

25. Una compuerta radial de radio $R = 5$ m y longitud $L = 4.5$ m soporta un tirante de agua $H = 3.5$ m. Para permitir el paso del agua la compuerta se levanta por medio de una cadena girando alrededor de un cojinete horizontal de diámetro $d = 150$ mm. El peso de la compuerta es $G = 3$ ton y su centro de gravedad está colocado a un radio $r = 0.75R$. Cuando la compuerta está cerrada, el eje de giro y el borde superior del sector se encuentran en el mismo plano horizontal colocado a la distancia $h = 1$ m sobre la superficie libre del agua. Determinar:

a) la fuerza P que actúa sobre los cojinetes del eje de rotación cuando está cerrada la compuerta y el ángulo de inclinación respecto de la horizontal.

b) la fuerza N con que presiona la compuerta sobre el fondo;

c) la fuerza T necesaria en la cadena para levantar la compuerta (el coeficiente de fricción en el eje es 0.3).



Problema 25

26. Determinar el ancho de la base B del muro de contención del problema 2.2, el cual se construirá de concreto de peso específico $\gamma_c = 2.4$ ton/m³, de manera que se satisfagan las siguientes condiciones: *a)* la resultante de los empujes hidrostáticos y del peso propio debe caer dentro de la base B; *b)* dicha resultante, descompuesta en una fuerza normal N y una tangencial T, debe producir esfuerzos de compresión obtenidos de la fórmula de la escuadría:

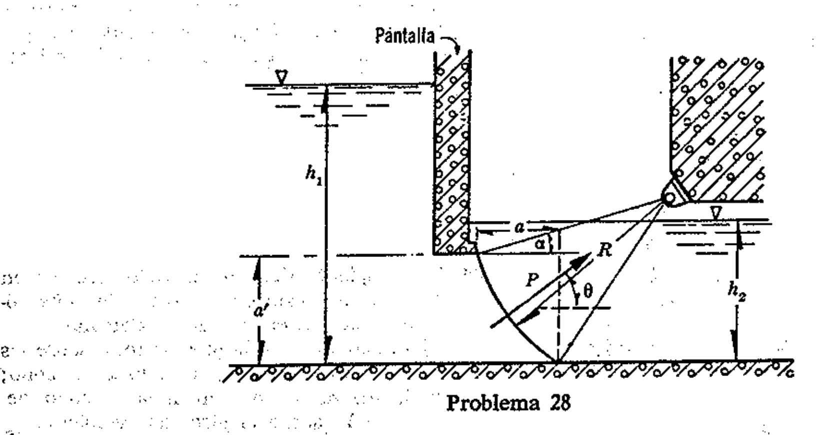
$$f_D = \frac{N}{B} + \frac{Ne}{B^2/6}$$

$$f_o = \frac{N}{B} - \frac{Ne}{B^2/6}$$

ambos positivos e inferiores a 20 kg/cm² (esto es, no debe haber tensiones). En estas ecuaciones e es la excentricidad de la normal N, o sea la distancia entre el centro de gravedad G de la base y el punto de aplicación de N; *c)* No debe haber deslizamiento para lo cual $T < \mu N$, donde μ coeficiente de fricción de valor 0.75.

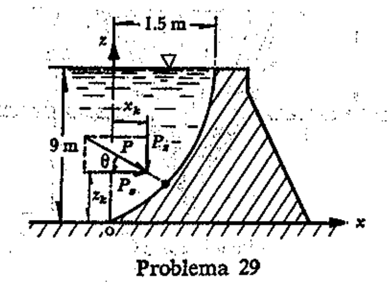
27. En la compuerta radial del problema 2.6 calcular la magnitud de las fuerzas que deben soportar los brazos de apoyo superior e inferior (Fig. 2.17 a), de modo que soporten la misma carga (existen 4 brazos, dos en cada extremo de la compuerta). Calcular también la inclinación necesaria en el brazo inferior para dichas condiciones, si la del superior es $\theta = 45°$.

28. Determinar el empuje hidrostático sobre la compuerta radial mostrada en la figura, para los datos siguientes: $h_1 = 5$ m; $h_2 = 2$ m; $h = h_1 - h_2 = 3$ m; $a = 0.943$ m; $a' = 1.5$ m; la compuerta tiene la misma geometría que la del problema 2.6 ($R = 3$ m; $b = 5$ m; $\alpha = 15°$).



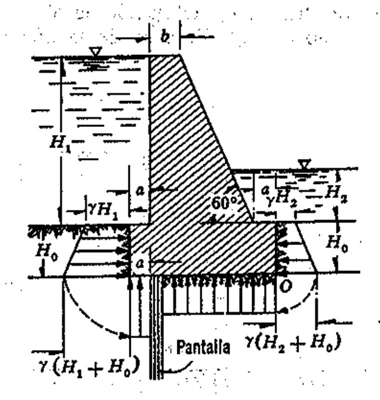
Problema 28

29. Determinar el empuje hidrostático, por metro de ancho, sobre la superficie parabólica del muro mostrado en la figura cuya ecuación es $z = 4x^2$.



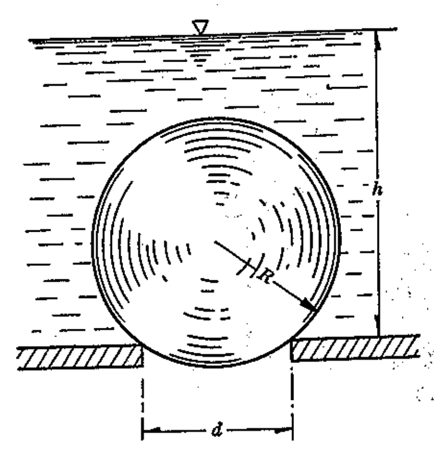
Problema 29

30. Una cortina de concreto tiene las siguientes dimensiones: $H_1 = 12$ m; $H_0 = 3$ m; $a = 1$ m; $b = 2$ m; el tirante, aguas abajo, $H_2 = 3$ m. Considerando que el terreno es permeable, para prevenir la infiltración por debajo de la cortina se construyó una pantalla impermeable. Calcular el momento de volteo de la cortina respecto del punto O, considerando las subpresiones sobre la base de la cortina, de acuerdo con los valores que se indican en la figura. Hacer los cálculos por metro de longitud de cortina.



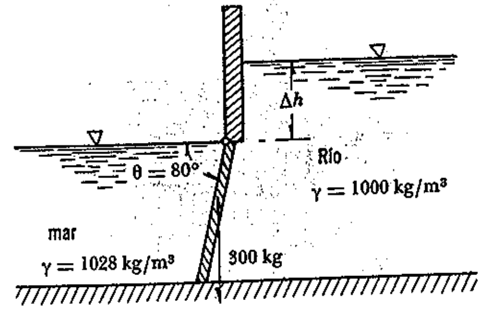
Problema 30

31. Determinar la resultante de los empujes verticales sobre la esfera mostrada en la figura para los datos: $d = 0.6$ m; $R = 0.5$ m; $h = 4$ m.



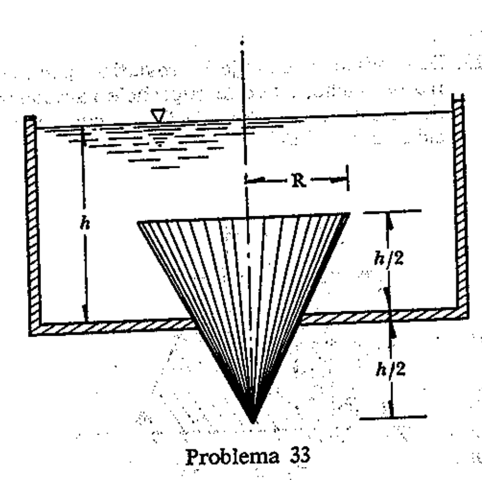
Problema 31

32. Las descargas de agua desde un estuario están controladas por una compuerta circular de 0.90 m de diámetro, articulada en su tope superior. Cuando la compuerta está cerrada tiene una inclinación de 80° respecto de la horizontal. El peso de la compuerta se puede suponer uniformemente distribuido y con un valor de 300 kg; su peso específico es 7.5 kg/m³. Si el nivel del agua en el lado del mar coincide con el de la articulación, determinar el incremento máximo Δh, del nivel del agua en el lado del que la compuerta puede tolerar antes de abrirse.



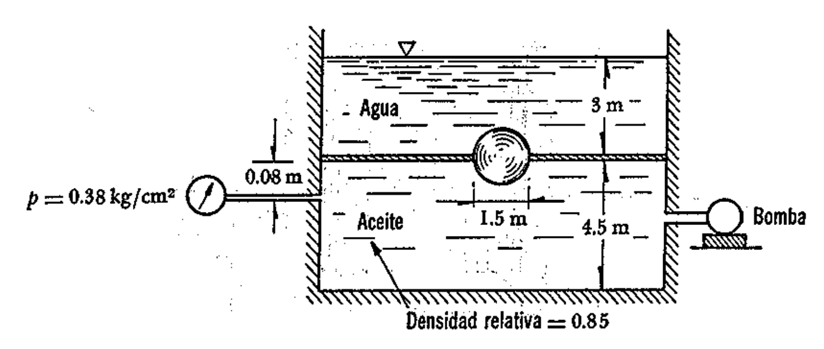
Problema 32

33. Un recipiente tiene un orificio circular en el fondo que está obturado por la cuña cónica mostrada en la figura. Calcular:
a) la magnitud de la presión total sobre las superficies lateral y de la base del cono;
b) la fuerza con que presiona al cono de peso W sobre el piso del recipiente.



Problema 33

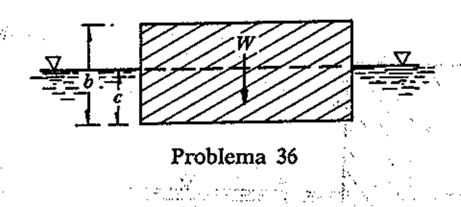
34. ¿Cuál es el valor del empuje sobre la esfera de la figura, si las dos secciones del depósito están totalmente aisladas una de otra?



Problema 34

35. El peso específico de un iceberg es de 915 kg/m³ y el del agua del océano es de 1028 kg/m³; si de la superficie libre del océano emerge un volumen del iceberg de 30 000 m³, ¿cuál es su volumen total?

36. Determinar la profundidad c a que se sumerge el cajón rectangular sólido de la figura, cuya superficie horizontal es de 4 × 6 m, su altura $a = 3$ m y su peso $W = 45$ ton.

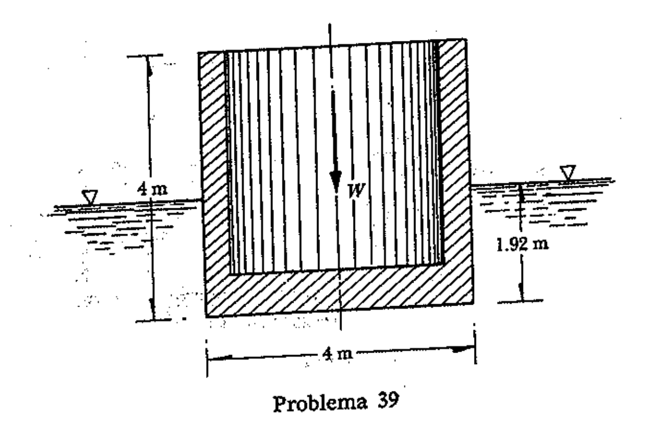


Problema 36

37. Una pieza de madera ($\gamma = 0.651$ ton/m³) se utiliza para soportar flotadores en el agua y realizar estudios de corrientes; tiene sección cuadrada 7.5 cm de lado y 1.50 m de longitud. ¿Cuántos kilogramos de plomo (peso específico 11 200 kg/m³) deben unirse a uno de los extremos de la pieza para que flote verticalmente con 30 cm fuera del agua?

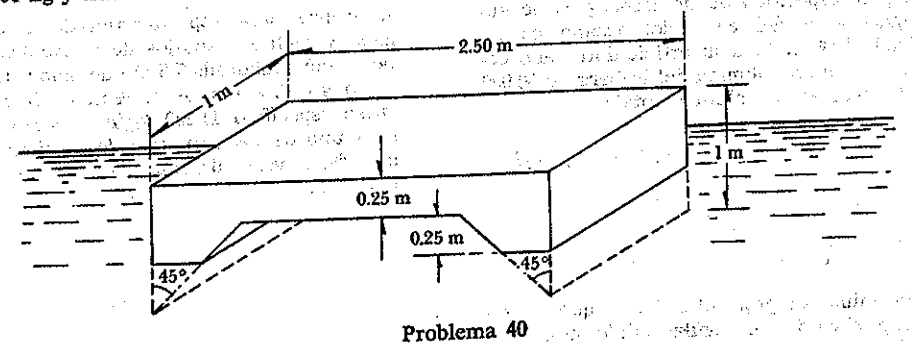
38. ¿Cuántos m³ de concreto ($\gamma = 2.4$ ton/m³) deben cargarse sobre un bloque de madera ($\gamma = 0.6$ ton/m³) de 10 × 1 × 1.5 m para que se hunda en el agua?

39. Determinar la posición del centro de gravedad que debe tener un cajón cilíndrico cuyas dimensiones se muestran en la figura (peso $W = 24$ ton) y que requiere para su estabilidad una altura metacéntrica $h = 1.5$ m.



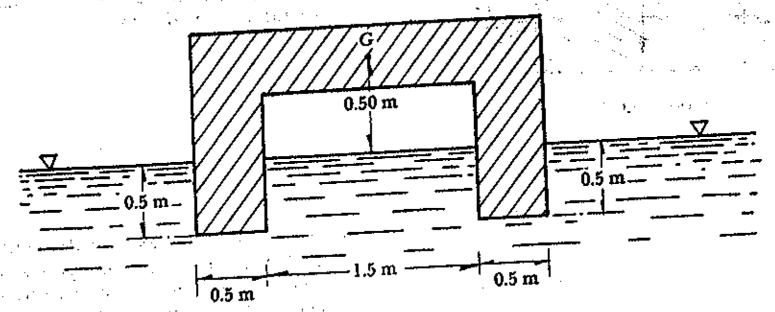
Problema 39

40. En el agua, tal como aparece en la figura, está situada una pieza de madera que pesa 500 kg y tiene el centro de gravedad 0.50 m por debajo de la superficie superior. ¿Es el objeto estable?



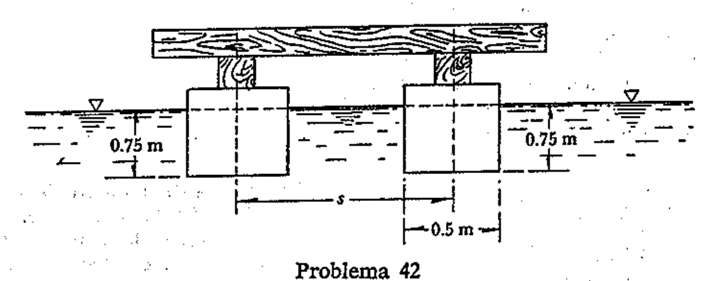
Problema 40

41. Calcular la altura metacéntrica del cuerpo mostrado en la figura para las condiciones de flotación indicadas.



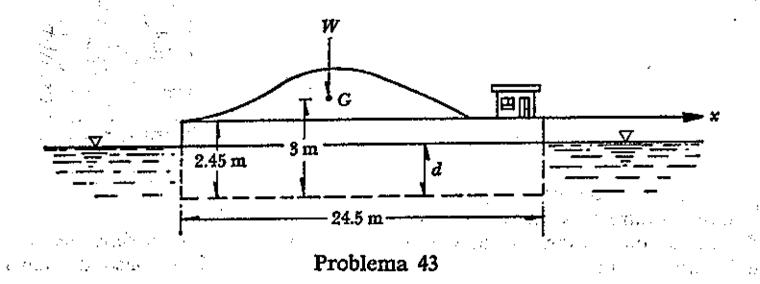
Problema 41

42. Un pontón se va a construir con tambores de gasolina de 0.5 m de diámetro en los ejes verticales. Los tambores tienen sus ejes distantes 1.8 m a lo largo de cada borde del puente y se sumergen 0.75 m cuando el puente está cargado. ¿Qué distancia s se requiere para una altura metacéntrica de 0.9 m, cuando $GG_1 = 1.2$ m? G representa el centro de gravedad del cuerpo y G_1 su centro de carena.



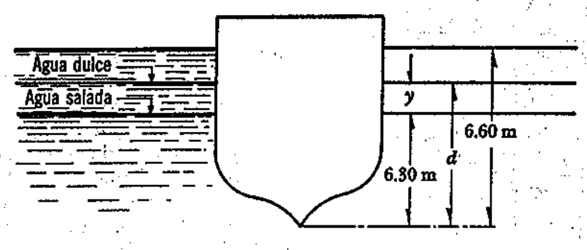
Problema 42

43. Un lanchón tiene forma de un paralelepípedo rectangular de 9.2 × 24.5 × 2.45 m; pesa 500 ton cargado y tiene su centro de gravedad a 3 m del fondo. Hallar la altura metacéntrica para la rotación alrededor del eje x, así como determinar si es estable. Cuando el lanchón gire 5° alrededor de este eje, ¿cuál será el par de equilibrio?



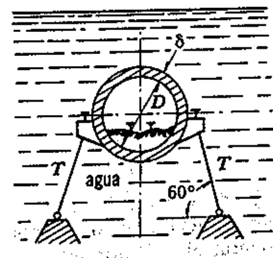
Problema 43

44. Un barco pesa 4 000 ton y en agua salada (γ = 1025 kg/m³) tiene un calado de 6.60 m. Al descargar 200 ton la profundidad de inmersión disminuye a 6.30 m. ¿Cuál será el calado d del barco en agua dulce?



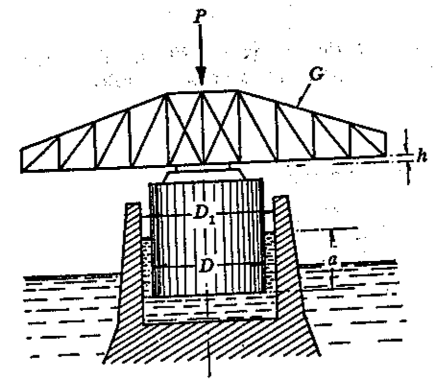
Problema 44

45. Un túnel submarino de sección circular de concreto reforzado, y con un diámetro interior $D = 3$ m y espesor $\delta = 250$ mm, se detiene (contra la fuerza de flotación) por medio de cables distribuidos por pares a cada 6 m, según la longitud del túnel. Obtener la tensión de los cables suponiendo que el peso de balasto y rieles es de 500 kg/m; el peso adicional de túnel es $G = 1000$ kg en el tramo de 6 m; y el peso específico del concreto es de 2.5 ton/m³.



Problema 45

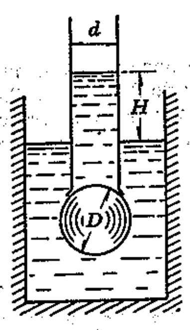
46. Un puente giratorio (flotante) se apoya sobre un flotador cilíndrico de diámetro $D = 3.4$ m, dentro de una cámara de diámetro $D_1 = 3.6$ m. Determinar:



Problema 46

a) la sumersión *a* del flotador en el agua si el peso propio del puente con el flotador es $G = 30$ ton;
b) el asentamiento *h* del puente con una carga *P* sobre el mismo, de 10 ton.

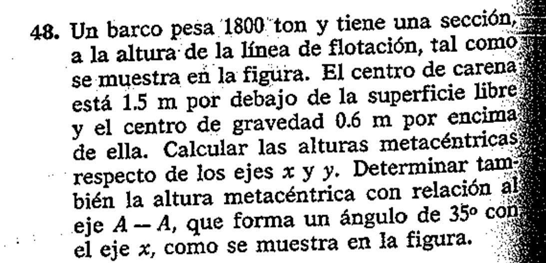
47. Una esfera de diámetro $D = 150$ mm con un peso $W = 0.5$ kg se sumerge en un recipiente. Por efecto de la fuerza de flotación obtura un tubo de diámetro de $d = 100$ mm

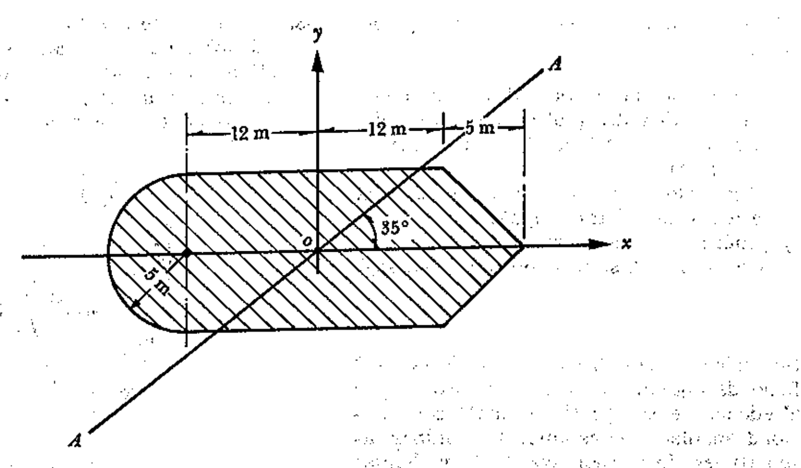


Problema 47

Determinar el máximo desnivel *H* tolerable para impedir el paso del agua del tubo al recipiente.

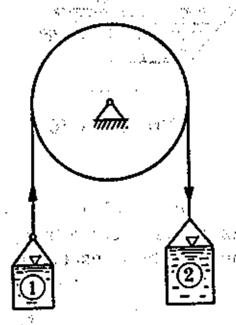
48. Un barco pesa 1800 ton y tiene una sección, a la altura de la línea de flotación, tal como se muestra en la figura. El centro de carena está 1.5 m por debajo de la superficie libre y el centro de gravedad 0.6 m por encima de ella. Calcular las alturas metacéntricas respecto de los ejes *x* y *y*. Determinar también la altura metacéntrica con relación al eje $A-A$, que forma un ángulo de 35° con el eje *x*, como se muestra en la figura.





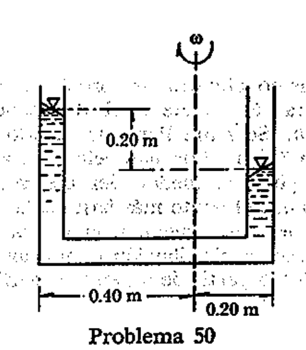
Problema 48

49. Dos recipientes unidos por el cable, según muestra la figura, se mueve uno hacia arriba y el otro hacia abajo. El que sube contiene 8 *l* de agua con un tirante de 20 cm; el que baja contiene 13 *l* de agua con un tirante de 30 cm.
¿Qué presión actúa en el fondo de los recipientes, si se desprecia el peso de los mismos y el del cable?



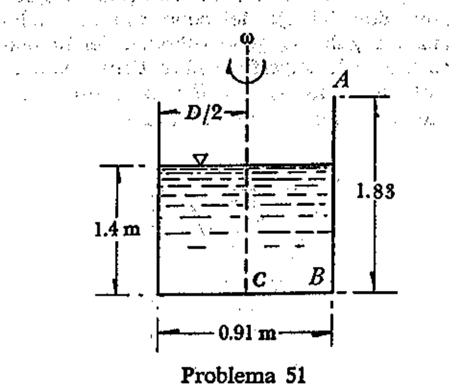
Problema 49

50. El tubo de mercurio en *U* de la figura, gira alrededor de un eje vertical que pasa por *O*; *a)* calcular la velocidad angular cuando la diferencia de niveles entre los tubos es 0.20 m; *b)* ¿Cuál es la altura original de la columna de mercurio?



Problema 50

51. Un tanque cilíndrico tiene 1.83 m de altura,



Problema 51

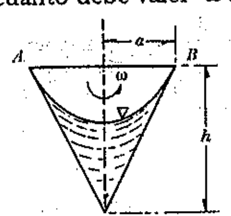
0.91 m de diámetro y un tirante de agua de 1.4 m.

a) Si gira con una velocidad angular constante de 20 rad/seg alrededor de su eje, calcular la superficie del fondo que se descubrirá.
b) ¿Qué velocidad angular se necesitaría para que no derrame agua?
c) ¿Cuál es la presión en el fondo del tanque, en C y B, si gira con $\omega = 6$ rad/seg?

52. Un recipiente cilíndrico cerrado de radio R lleno de líquido, de peso específico γ, gira alrededor de su eje (horizontal) con velocidad angular ω constante. Determinar las superficies de presión constante y dibujar el diagrama de presiones para la sección vertical del cilindro.

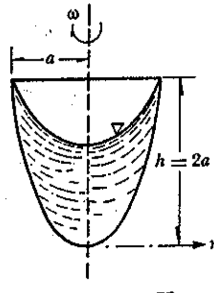
53. El mismo cilindro del problema 52 se encuentra con su eje vertical y tiene una altura h. Se halla lleno de líquido hasta la altura 3/4 h. ¿Con qué velocidad angular ω debe girar alrededor del eje vertical, de modo que el punto más bajo de la superficie libre del agua quede a la altura $h/4$? Determinar la distribución de presiones en las paredes, a partir de p_a, en la superficie libre.

54. Un recipiente cónico con eje vertical y vértice hacia abajo, radio de la base a y altura h, se encuentra lleno de agua. Al girar alrededor del eje del cono con una velocidad angular ω, ¿qué volumen del líquido se tira si la superficie libre tiene como límite los puntos A y B y para que esto suceda cuanto debe valer ω?



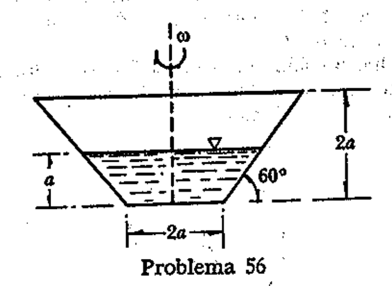
Problema 54

55. Un recipiente que tiene la forma de un paraboloide de revolución está lleno de agua. ¿Con qué velocidad angular ω debe girar alrededor de su eje, de modo que se tire la mitad de su contenido?



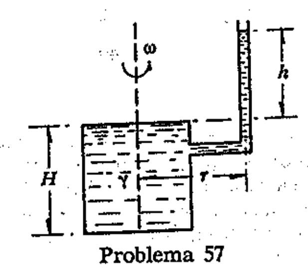
Problema 55

56. ¿Con qué velocidad angular máxima ω puede girar un recipiente semicónico de altura 2a (lleno hasta la mitad de líquido) sin que se derrame?



Problema 56

57. Un recipiente cilíndrico cerrado tiene un tubo piezométrico conectado, está lleno de un líquido de peso específico γ y además alcanza el nivel h en el tubo piezométrico. Si el recipiente gira alrededor del eje vertical, determinar la velocidad angular ω para la cual se presenta cavitación en el cilindro, o sea cuando la presión $p = p_v$(p_v presión de vaporización del líquido).



Problema 57

58. ¿Cuál es la presión en el interior de una gota de agua de 0.05 mm de diámetro a 20°C, si en su interior existe la presión atmosférica estándar de 1.033 kg/cm³?

59. Qué diámetro de tubo de vidrio se necesita para que el nivel del agua en su interior no se vea afectado por la acción de capilaridad, en un valor superior a 0.5 mm.

60. Una burbuja de aire asciende verticalmente en el agua. A una profundidad de 12.2 m su diámetro es de 5.1 mm. ¿Cuál es el diámetro que tendrá cuando alcance la superficie del agua, sobre la cual ejerce la presión atmosférica estándar?

3

CINEMATICA DE LOS LIQUIDOS

3.1 Introducción

Antes de presentar los métodos de análisis en la dinámica de líquidos, para su comprensión es necesario estudiar algunos conceptos y ecuaciones importantes en la cinemática de los mismos.

La *cinemática de los líquidos* trata del movimiento de sus partículas, sin considerar la masa ni las fuerzas que actúan, en base al conocimiento de las magnitudes cinemáticas: *velocidad, aceleración* y *rotación*.

3.2 Los campos de un flujo

Un *campo de flujo* es cualquier región en el espacio donde hay un fluido en movimiento, a condición de que la región o subregión del flujo quede ocupada por el fluido.

En cada punto del campo de flujo es posible determinar o especificar una serie de magnitudes físicas, ya sean *escalares, vectoriales* o *tensoriales*, que forman a su vez campos independientes o dependientes dentro del flujo.

Un campo escalar se define exclusivamente por la magnitud que adquiere la cantidad física a la cual corresponde; ejemplos: presión, densidad y temperatura.

En un campo vectorial, además de la magnitud, se necesita definir una dirección y un sentido para la cantidad física a la que corresponde; esto es, tres valores escalares. La velocidad, la aceleración y la rotación son ejemplos de campos vectoriales. Finalmente, para definir un campo tensorial se requieren nueve o más componentes escalares; ejemplos: esfuerzo, deformación unitaria, y momento de inercia.

Las magnitudes físicas de los campos escalares y vectoriales de un campo de flujo son —en general— funciones de punto y del tiempo, ya que su magnitud puede variar no sólo de un punto a otro sino también (en un punto fijo) de un instante a otro.

3.3 Los campos vectoriales de velocidad, aceleración y rotacional

3.3.1 El campo de velocidades

El análisis del movimiento de una partícula del fluido que recorre una curva se puede hacer de dos maneras distintas (Ref. 10):

a) por el conocimiento del vector de posición $\mathbf{r}$, de la partícula, como una función vectorial del tiempo t (Fig. 3.1).

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$$

donde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ representan los vectores unitarios según tres ejes de coordenadas ortogonales cualesquiera y (x, y, z) las proyecciones de $\mathbf{r}$ según dichos ejes. Estas proyecciones son cantidades escalares y funciones del tiempo:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

b) Por el conocimiento de la curva que recorre la partícula y la función camino recorrido-tiempo. En este caso la posición de la partícula se determina por la longitud del camino recorrido, siguiendo la curva (a partir de un punto origen A), como una función escalar del tiempo (Fig. 3.2); esto es:

$$s = s(t)$$

El vector *velocidad* de una partícula fluida se define como la rapidez temporal del cambio en su posición. Si la partícula P_0 de la Fig. 3.3 se desplaza siguiendo la trayectoria C, descrita en cada instante por el vector de posición de la partícula $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, la velocidad queda definida por la expresión:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \qquad (3.1)$$

donde $d\mathbf{r}$ representa el vector diferencial de arco, sobre la curva C, que recorre la partícula en el tiempo dt.

La velocidad es, entonces, un campo vectorial dentro de un flujo y, al desplazarse la partícula según la curva C, es un vector tangente en cada punto a la misma que, en general, depende de la posición de la partícula y del tiempo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

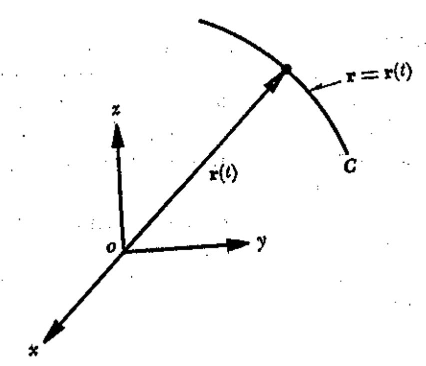


Figura 3.1. Representación del movimiento de una partícula según la curva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

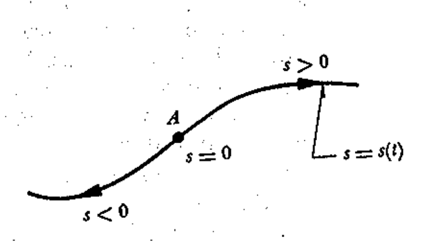


Figura 3.2. Representación del movimiento de una partícula según la curva $s = s(t)$.

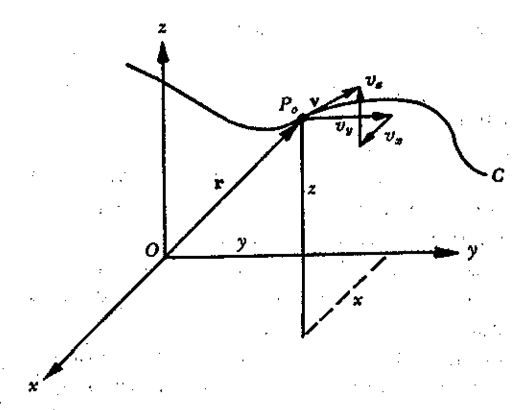


Figura 3.3. Posición y velocidad de una partícula referidas a un sistema cartesiano de coordenadas rectangulares.

La velocidad, en términos de sus componentes según los tres ejes coordenados elegidos, se puede escribir:

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$$

Entonces, dichas componentes son funciones de la posición de la partícula y del tiempo, a saber:

$$v_x = v_x(x, y, z, t) = \frac{dx}{dt} \qquad (3.1a)$$

$$v_y = v_y(x, y, z, t) = \frac{dy}{dt} \qquad (3.1b)$$

$$v_z = v_z(x, y, z, t) = \frac{dz}{dt} \qquad (3.1c)$$

Puesto que la magnitud del vector $d\mathbf{r}$ es

$$\left| d\mathbf{r} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = ds,$$

donde ds es el elemento diferencial de arco sobre la trayectoria, resulta que la magnitud de la velocidad es

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

Si $\mathbf{s}$ representa un vector unitario, tangente en cada punto a la trayectoria de la partícula y, además es función de s, la velocidad también se puede expresar así:

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{s} = \frac{ds}{dt}\,\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{s}}{dt} \qquad (3.2)$$

donde $d\mathbf{s}$ se conoce como vector diferencial de arco y vale $d\mathbf{s} = ds\,\mathbf{s}$.

3.3.2 El campo de aceleraciones

El campo vectorial de aceleraciones es derivado del de velocidades pues el *vector aceleración* de una partícula en un punto se define como la variación temporal de la velocidad en ese punto; esto es:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \qquad (3.3)$$

La *aceleración* no tiene una orientación coincidente con la trayectoria de la partícula, como resulta con la velocidad; de acuerdo con la definición de derivada total y en base a las ecuaciones (3.1), sus componentes, según los tres ejes de coordenadas cartesianas, son:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} \right) \qquad (3.3a)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} \right) \qquad (3.3b)$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \\ + \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} \right) \quad (3.3c)$$

las cuales son función de punto y tiempo. La aceleración de las partículas del fluido se puede considerar como la superposición de dos efectos:

1. En el instante t se supone que el campo es independiente del tiempo; en estas circunstancias la partícula cambiará de posición en ese campo y su velocidad sufrirá variaciones en los diferentes puntos del mismo. Esta aceleración, debida a cambio de posición, se llama *convectiva* y está dada por las expresiones contenidas en los primeros paréntesis de las ecuaciones (3.3a), (3.3b) y (3.3c).

2. El término de los segundos paréntesis no proviene del cambio de posición de la partícula, sino de la variación de la velocidad en la posición ocupada por la partícula al transcurrir el tiempo. Se llama *aceleración local*.

Es interesante conocer también la magnitud de las componentes de la aceleración en cualquier punto de una trayectoria. La distancia s, medida desde un origen arbitrario, siguiendo la trayectoria, corresponde a una *coordenada curvilínea local*, a lo largo de la cual se pueden determinar las propiedades del flujo. En cada punto de la trayectoria hay una dirección n, normal a la tangente local, que define la dirección de una coordenada independiente llamada *coordenada normal principal*. Ésta es colineal con el radio instantáneo de curvatura local de la trayectoria, cuya dirección positiva es del centro de curvatura hacia el punto en consideración. Una tercera dirección de otra coordenada se define como la *dirección binormal local* (o *conormal*) b, que es normal, tanto a s como a n. En relación al sistema cartesiano, estas tres coordenadas también se pueden representar por el sistema de vectores unitarios ortogonales **s**, **n**, **b**; el primero tangencial a la curva en cada punto; el segundo en la dirección de la normal principal local de la trayectoria; y, el tercero, según la binormal de la misma (Fig. 3.4a).

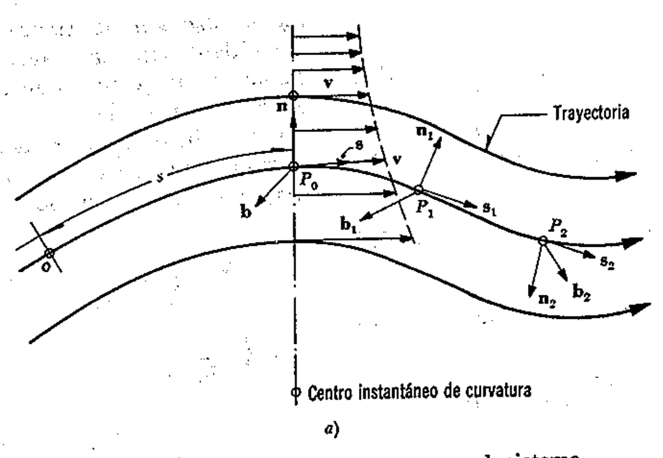


Figura 3.4a. Correspondencia entre el sistema cartesiano de coordenadas y el sistema de vectores unitarios; distribución y gradiente de velocidades sobre la normal principal.

De este modo, los vectores unitarios **s**, **n** y **b** definen un triedro regular en cada punto de la trayectoria; y cualquier vector asociado a un punto de la curva puede referirse a este sistema local de coordenadas curvilíneas, escribiéndolo como una combinación lineal de los tres vectores unitarios. Los tres planos fundamentales (definidos por el triedro) se conocen como: *plano osculador* (aquel cuya normal es **b**), *plano normal* (cuya normal es **s**) y *plano rectificador* (cuya normal es **n**). Los vectores **s** y **n** se encuentran en el plano osculador, el cual contiene también al radio de curvatura. Esto significa que el movimiento en el punto considerado está en dicho plano y, además, el radio de curvatura en la dirección de **b** es infinito.

La velocidad expresada en términos de **s** a través de la Ec. (3.2), es función de la distancia recorrida s y del tiempo t; la aceleración entonces es:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\,\mathbf{s}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{s} + \left(\frac{d\mathbf{s}}{ds}\frac{ds}{dt}\right)$$

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{s} + v^2\frac{d\mathbf{s}}{ds} \quad (3.4)$$

Al pasar de un punto P a otro P' (Fig. 3.4b), el vector unitario **s** será $\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}$; conserva su magnitud, pero modifica su dirección. En el intervalo Δt la partícula habrá recorrido la distancia Δs sobre la curva. La variación de **s** a lo largo de s es

$$\frac{d\mathbf{s}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\mathbf{s}}{\Delta s}$$

de donde resulta que, en el límite, $\Delta\mathbf{s}$ (y también $\frac{\Delta\mathbf{s}}{\Delta s}$) queda dirigido según la normal principal de la curva y hacia el interior de la misma. Por tanto, los vectores $d\mathbf{s}/ds$ y $v^2 d\mathbf{s}/ds$ tendrán idéntica dirección, pero sentido contrario al considerado positivo para **n**. Resulta entonces:

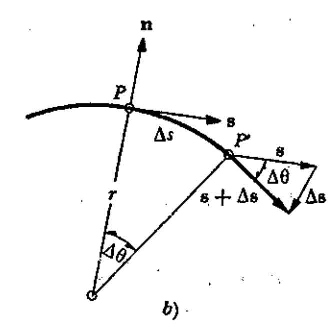


Figura 3.4 b. Cambio en **s** al producirse el recorrido Δs.

$$v^2\frac{d\mathbf{s}}{ds} = -v^2\frac{|d\mathbf{s}|}{ds}\mathbf{n}$$

Por lo que respecta a $\frac{|d\mathbf{s}|}{ds}$ (Fig. 3.4b) con $|\mathbf{s}| = 1$, resulta también

$$\frac{|d\mathbf{s}|}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{|\Delta\mathbf{s}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{2\,|\mathbf{s}|\,\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta s} =$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\text{sen}\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

En el límite, $\text{sen}(\Delta\theta/2)/(\Delta\theta/2) = 1$; entonces:

$$\frac{|d\mathbf{s}|}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}$$

Además, siendo $ds = r\,d\theta$, donde r es el

radio de curvatura en el punto *P*, se tiene que

$$\frac{|d\mathbf{s}|}{ds} = \frac{1}{r}$$

La Ec. (3.4) se convierte entonces en

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_s + \mathbf{a}_n = \frac{dv}{dt}\mathbf{s} - \frac{v^2}{r}\mathbf{n} \quad (3.5a)$$

Esto muestra que el vector aceleración se encuentra en el plano osculador y sólo tiene componentes en las direcciones tangencial y normal. Por tanto, la componente de la aceleración, en la dirección del tercer vector unitario **b**, vale cero. Esto implica que en la inmediata vecindad del punto *P* existe variación de la velocidad únicamente en las direcciones **s** y **n**, más no a lo largo de **b**. Ello se debe a que **n** se ha escogido en la dirección de la normal principal.

La magnitud de la componente de la aceleración tangencial es entonces

$$a_s = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial s} v + \frac{\partial v}{\partial t}$$

O bien, con

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right) = v\frac{\partial v}{\partial s}$$

la componente tangencial resulta

$$\mathbf{a}_s = \left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t}\right]\mathbf{s} \quad (3.5b)$$

y la componente normal:

$$\mathbf{a}_n = -\frac{v^2}{r}\mathbf{n} \quad (3.5c)$$

El signo menos para la componente normal en la Ec. (3.5c) significa que dicha componente tiene sentido contrario al considerado como positivo para **n**. El planteamiento de muchos problemas en la práctica se hace suponiendo el flujo como unidimensional, para el cual es muy conveniente el empleo del sistema de coordenadas y de componentes de la aceleración aquí planteado (Refs. 10, 11 y 12). Finalmente, la componente en la dirección de la binormal es:

$$\mathbf{a}_b = 0 \quad (3.5d)$$

Suele convenirse en expresar la ecuación vectorial (3.5a) en otra forma: sumando y restando el término

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{v^2}{2}\right) = v\frac{\partial v}{\partial n},$$

en la componente $\mathbf{a}_n$ (Ec. 3.5c), resulta:

$$\mathbf{a}_n = \left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{v^2}{2}\right) - v\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \frac{v}{r}\right)\right]\mathbf{n}$$

entonces, la forma vectorial de las ecuaciones 3.5b, c y d también es

$$\mathbf{a} = \text{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) - v\left(\frac{\partial v}{\partial n} + \frac{v}{r}\right)\mathbf{n} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.6)$$

donde

$$\text{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right)\mathbf{s} + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{v^2}{2}\right)\mathbf{n}$$

no existe componente de este vector en la dirección *b*.

3.3.3 El campo rotacional

Además del campo de aceleraciones existe otro campo vectorial derivado del de velocidades: el *rotacional* que evalúa la rotación local de una partícula y se define matemáticamente por el determinante

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (3.7a)$$

cuyo desarrollo es

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \quad (3.7b)$$

que también es función, tanto de punto como de tiempo y es una medida de la *rotación* o *vorticidad* de la partícula dentro del flujo; por esta razón se le conoce también como *campo vorticoso*.

Resulta conveniente intentar una representación física del vector rot **v**, semejante a la presentada en la Ref. 13. Como en el caso del cuerpo rígido, el movimiento de la partícula puede producir rotación local en la misma, además del movimiento de traslación. La rotación pura se puede estudiar localmente —prescindiendo de la traslación— a través del movimiento de giro alrededor de un eje instantáneo que pasa por el centro de gravedad de la partícula y con base en el movimiento de dos líneas ortogonales en forma de cruz, definidas por los puntos *PQRS*, que giran como un cuerpo rígido. El punto P_0 se localiza mediante el vector de posición $\mathbf{r}_0$ referido a un sistema de coordenadas con cualquier orientación, pero cuyo origen, por comodidad, se encuentra en el eje instantáneo de rotación. El punto *P* se halla en el extremo de uno de los brazos de la cruz y en la infinita vecindad de P_0 y se localiza mediante el vector de posición **r**, de tal manera que el vector que los une es $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = d\mathbf{r}$.

La velocidad **v**, tangencial a la trayec-

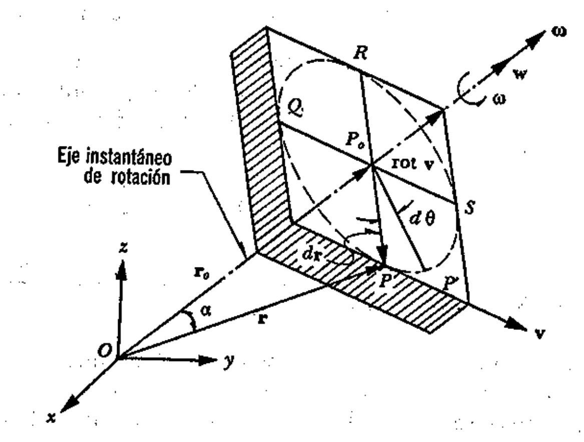


Figura 3.5. Rotación de una partícula.

toria circular que siguen los extremos de esas líneas ortogonales (y, por consiguiente, en el punto P), corresponde a la de traslación propia de ese punto; y en general, es distinta de la que corresponde a P_0. Al producirse la rotación el vector $\mathbf{v}$ se puede calcular en términos de la velocidad angular $\omega = d\theta/dt$ (variación del ángulo de rotación θ con el tiempo) y de un vector unitario $\mathbf{w}$ paralelo al eje instantáneo de rotación con el sentido indicado en la Fig. 3.5 (de acuerdo con la convención normal para la variación de θ), como el producto vectorial; a saber:

$$\mathbf{v} = \omega\,\mathbf{w} \times d\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{w}$ se conoce como vector torbellino.

Por tanto, resulta que

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = \text{rot}\,\boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{r}$$

cuyo desarrollo conduce a

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = \text{rot}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix}$$

$$= \text{rot}\,[(\omega_y\,dz - \omega_z dy)\,\mathbf{i} + (\omega_z\,dx - \omega_x dz)\,\mathbf{j} + (\omega_x dy - \omega_y dx)\,\mathbf{k}]$$

De ahí que, de acuerdo con su definición rot $\mathbf{v}$ es igual al determinante:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (\omega_y dz - \omega_z dy) & (\omega_z dx - \omega_x dz) & (\omega_x dy - \omega_y dx) \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante en la misma forma y, tomando en cuenta que $\boldsymbol{\omega}$ es independiente de $d\mathbf{r}$, al desarrollar las derivadas parciales indicadas se obtiene que:

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = (2\,\omega_x\,\mathbf{i} + 2\,\omega_y\,\mathbf{j} + 2\,\omega_z\,\mathbf{k}) = 2\,\boldsymbol{\omega}$$

Esto es, el vector rot $\mathbf{v}$ es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$ y perpendicular en cada punto a $\mathbf{v}$. Resulta conveniente insistir en que los campos de aceleración y rotación se derivan del campo de velocidad y, conocido éste, se pueden determinar los otros dos. Además, es factible expresar al vector aceleración en función del vector rotacional. Con referencia al sistema de coordenadas ortogonales $\mathbf{s}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$, el movimiento se produce sobre el plano que contiene a $\mathbf{s}$ y $\mathbf{n}$; y la velocidad $\mathbf{v}$ se distribuye a lo largo de $\mathbf{n}$ de acuerdo con un movimiento instantáneo de rotación, según la ley:

$$v = \omega\,r$$

El vector rotacional se obtendría a partir del determinante

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} & \dfrac{\partial}{\partial n} & \dfrac{\partial}{\partial b} \\ \omega r & o & o \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial n}(\omega\,r)\,\mathbf{b}$$

donde $\dfrac{\partial v}{\partial b} = 0$, puesto que no hay variación de $\mathbf{v}$ a lo largo de $\mathbf{b}$. Desarrollando la derivada y tomando en cuenta que $\omega = v/r$ y $\partial r/\partial n = 1$, resulta

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = -\left(\omega\frac{\partial r}{\partial n} + r\frac{\partial \omega}{\partial n}\right)\mathbf{b} =$$

$$= -\left(\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathbf{b}$$

Esto significa que el vector rot $\mathbf{v}$ tiene una sola componente en la dirección de la binormal; además, el producto vectorial rot $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ es:

$$\text{rot}\,\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{s} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \\ o & o & -\left(\dfrac{v}{r} + \dfrac{\partial v}{\partial n}\right) \\ v & o & o \end{vmatrix}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{v} \times \mathbf{v} = -v\left(\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathbf{n}$$

Por tanto, la Ec. (3.6) también se escribe en la forma

$$\mathbf{a} = \text{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \text{rot}\,\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (3.8)$$

La aceleración en un punto está formada por la componente grad $(v^2/2)$ que corresponde al movimiento de traslación pura; la componente rot $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ que equivale al movimiento de rotación (llamada *aceleración de Coriolis*); y la componente $\partial \mathbf{v}/\partial t$ que corresponde a la aceleración local.

Problema 3.1. El viento sopla horizontalmente con velocidad uniforme v_0 y, de modo independiente del tiempo, contra una chimenea vertical de radio R. Supuesto el flujo irrotacional, la variación de la velocidad sobre el eje x, en la proximidad del punto de estancamiento (Fig. 3.6), queda determinada por la expresión: $v_x = v_0 \left(1 - \dfrac{R^2}{x^2}\right)$ (Ec. 10.65a con $y = 0$). (Ref. 14).

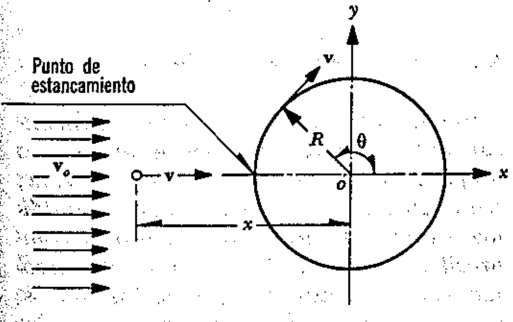


Figura 3.6. Esquema aclaratorio del problema 3.1.

La velocidad v alrededor de la superficie del cilindro es $v_0 = -2\,v_0$ sen θ.

a) Obtener la ecuación de la aceleración del aire, para puntos que quedan sobre el eje $x = -3R$, $x = -2R$ y $x = -R$.

b) Si $v_0 = 1.8$ m/seg; $R = 0.25$ m, calcular la aceleración para $x = -2R$.

c) Determinar las componentes tangencial y normal de la aceleración para $\theta = \pi$, $\theta = 3\pi/4$ y $\theta = \pi/2$.

Solución a) De acuerdo con la Ec. (3.3a) la componente a_x de la aceleración (dado que la velocidad sólo depende de x, (no del tiempo ni de y) vale:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x}v_x =$$

$$= 2\,v_0^2\left(\frac{R^2}{x^3} - \frac{R^4}{x^5}\right)$$

Para $x = -3R$:

$$a_x = 2\,v_0^2\left(-\frac{R^2}{27\,R^3} + \frac{R^4}{243\,R^5}\right) =$$

$$= 2\,v_0^2\left(\frac{1}{243\,R} - \frac{9}{243\,R}\right) = -\frac{16\,v_0^2}{243\,R}$$

Para $x = -2R$:

$$a_x = 2\,v_0^2\left(-\frac{R^2}{8\,R^3} + \frac{R^4}{32\,R^5}\right) = -\frac{3}{16}\frac{v_0^2}{R}$$

Para $x = -R$ (punto de estancamiento):

$$a_x = 2\,v_0^2\left(-\frac{R^2}{R^3} + \frac{R^4}{R^5}\right) = 0$$

Solución b) De acuerdo con los datos para $x = -2\,R$, a_x vale:

$$a_x = -\frac{3}{16}\frac{1.8^2}{0.25} = -\frac{3 \times 3.24}{16 \times 0.25} = -$$

$$a_x = -2.43 \text{ m/seg}^2$$

Solución c) De acuerdo con la Ec. (3.5b) la aceleración tangencial es

$$a_s = \tfrac{1}{2}\frac{\partial (v_\theta^2)}{\partial s} = \tfrac{1}{2}(2\,v_0)^2\frac{\partial(\text{sen}^2\,\theta)}{\partial s} =$$

$$= 2\,v_0^2\,(2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)\frac{\partial\theta}{\partial s}$$

y, puesto que $ds = R\,d\theta$,

$$a_s = 4\frac{v_0^2}{R}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

En la misma forma, de la Ec. (3.5c),

$$a_n = \frac{v_\theta^2}{R} = \frac{4\,v_0^2}{R}\,\text{sen}^2\,\theta$$

substituyendo los valores para v_0 y θ, resulta que

$$a_s = \frac{4 \times 1.8^2}{0.25}\,\text{sen}\,\theta\cos\theta = 51.84\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$a_n = \frac{4 \times 1.8^2}{0.25}\,\text{sen}^2\,\theta = 51.84\,\text{sen}^2\,\theta$$

Para $\theta = \pi$; sen $\theta = 0$ y cos $\theta = -1$;

$a_s = 0$ y $a_n = 0$

Para $\theta = \frac{3\pi}{4}$; sen $\theta = 0.707$ y cos $\theta = -0.707$

$$a_s = -51.84 \times 0.707 \times 0.707 = -25.92 \text{ m/seg}^2$$

$$a_n = 51.84\,(0.707)^2 = 25.92 \text{ m/seg}^2$$

Para $\theta = \pi/2$, sen $\theta = 1$ y cos $\theta = 0$; $a_s = 0$; $a_n = 51.84$ m/seg².

Problema 3.2. A partir de la Ec. (3.7b) encontrar las componentes del vector rotacional para los flujos permanentes cuyos campos de velocidad son:

a) $v_x = A(x+y)$; $v_y = -A(x+y)$;

b) $v_x = 2Axz$; $v_y = A(c^2 + x^2 - z^2)$;

c) $v_x = Ay^2 + By + c$; $v_y = 0$; $v_z = 0$

Solución a) $(\text{rot}\,\mathbf{v})_x = 0$

$(\text{rot}\,\mathbf{v})_y = 0$

$$(\text{rot}\,\mathbf{v})_z = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

$$= (-A - A) = -2A$$

Solución b) $(\text{rot}\,\mathbf{v})_x = -\frac{\partial v_y}{\partial z} = 2A\,z$

$$(\text{rot}\,\mathbf{v})_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} = 2A\,x$$

$$(\text{rot}\,\mathbf{v})_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} = 2A\,x$$

Solución c) $(\text{rot}\,\mathbf{v})_x = 0$

$(\text{rot}\,\mathbf{v})_y = 0$

$$(\text{rot}\,\mathbf{v})_z = -\frac{\partial v_x}{\partial y} =$$

$$= -(2Ay + B)$$

3.4 Clasificación de los flujos

Existen diferentes criterios para clasificar un flujo. Éste puede ser *permanente* o *no permanente*; *uniforme* o *no uniforme*; *tridimensional*, *bidimensional* o *unidimensional*; *laminar* o *turbulento*; *incompresible* o *compresible*; *rotacional* o *irrotacional*; etcétera. Aunque no los únicos, sí son los flujos más importantes que clasifica la ingeniería.

En general, las propiedades de un fluido y las características mecánicas del mismo serán diferentes de un punto a otro dentro de su campo; además, si las características en un punto determinado varían de un instante a otro, el flujo es *no permanente*. Por el contrario, será un flujo *permanente* si las características en un punto permanecen constantes para cualquier instante; o bien, si las variaciones en ellas son muy pequeñas con respecto a sus valores medios y éstos no varían con el tiempo.

Un flujo dado puede ser permanente o no, de acuerdo con el observador. Por ejemplo, el flujo alrededor de la porción aguas arriba de una pila de puente será permanente para un observador colocado sobre la pila, pero no permanente para un observador que flote sobre el agua.

El flujo permanente es más simple de analizar que el no permanente, por la complejidad que adiciona el tiempo como variable independiente. Sin embargo, en la práctica el flujo permanente es la excepción más que la regla; no obstante, muchos problemas se pueden estudiar suponiendo que el flujo es permanente, aun cuando existan pequeñas fluctuaciones de velocidad o de otras características con el tiempo, siempre que el valor medio de cualquier característica permanezca constante sobre un intervalo razonable.

Si en un instante particular el vector velocidad es idéntico en cualquier punto del flujo, se dice que el flujo es *uniforme*. Esto se expresa por $\partial \mathbf{v}/\partial s = 0$, donde ∂s es un desplazamiento en una dirección cualquiera. En caso contrario, el flujo es *no uniforme* y los cambios en el vector velocidad pueden ser en la dirección del mismo o en direcciones transversales. Este último tipo de —no uniformidad— siempre se encuentra cerca de fronteras sólidas por efecto de la viscosidad; sin embargo, en hidráulica suele aceptarse la uniformidad o no uniformidad del flujo cuando se refiere a la variación de la velocidad media en la dirección general del movimiento.

El hecho de que un flujo sea permanente no significa necesariamente que éste sea uniforme; pueden así ocurrir las cuatro diferentes combinaciones posibles.

El flujo puede clasificarse en *tridimensional*, *bidimensional* y *unidimensional*. Es tridimensional cuando sus características varían en el espacio, o sea que los gradientes del flujo existen en las tres direcciones; éste es el caso más general de flujo. Es bidimensional cuando sus características son idénticas sobre una familia de planos paralelos, no habiendo componentes en dirección perpendicular a dichos planos, o bien ellas permanecen constantes; es decir, que el flujo tiene gradiente de velocidad o de presión (o tiene ambos) en dos direcciones exclusivamente. Es unidimensional cuando sus características varían como funciones del tiempo y de una coordenada curvilínea en el espacio, usualmente la distancia medida a lo largo del eje de la conducción. El flujo de un fluido real no puede ser completamente unidimensional debido al efecto de la viscosidad, ya que la velocidad en una frontera sólida es igual a cero, pero en otro punto es distinta de cero; sin embargo, bajo la consideración de valores medios de las características en cada sección, se puede considerar unidimensional. Esta hipótesis es la más importante en hidráulica, por las simplificaciones que trae consigo.

La clasificación de los flujos en *laminar* y *turbulento* es un resultado propiamente de la viscosidad del fluido; y no habría distinción entre ambos en ausencia de la misma. El flujo laminar se caracteriza porque el movimiento de las partículas se produce siguiendo trayectorias separadas perfectamente definidas —no necesaria-

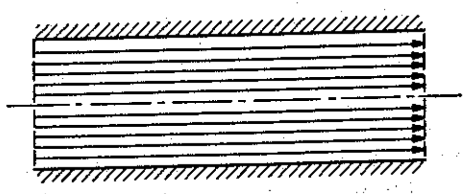


Figura 3.7a. Esquema del flujo laminar.

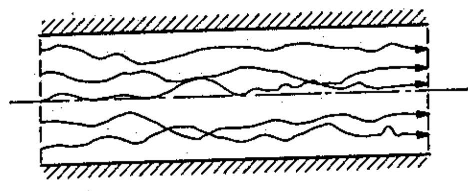


Figura 3.7b. Esquema del flujo turbulento.

mente paralelas— sin existir mezcla macroscópica o intercambio transversal entre ellas. Si se inyecta colorante (de la misma densidad que el líquido) dentro de un flujo laminar, éste se mueve como un filamento delgado que sigue las trayectorias del flujo (Fig. 3.7a).

En un flujo turbulento, las partículas se mueven sobre trayectorias completamente erráticas, sin seguir un orden establecido (Fig. 3.7b). Existen pequeñas componentes de la velocidad en direcciones transversales a la del movimiento general, las cuales no son constantes sino que fluctúan con el tiempo, de acuerdo con una ley aleatoria, aun cuando el flujo general sea permanente. Esto se explica por el hecho de que la permanencia respecto del tiempo se refiere a los valores medios de dichas componentes en un intervalo grande. Las componentes transversales de la velocidad en cada punto origina un mezclado intenso de las partículas que consume parte de la energía del movimiento por efecto de fricción interna y que también, en cierto modo, es resultado de los efectos viscosos del fluido.

Un flujo se considera *incompresible* si los cambios de densidad de un punto a otro son despreciables; en caso contrario, el flujo es *compresible*. Los líquidos y gases a bajas velocidades pueden ser considerados incompresibles. El flujo de un gas con velocidades entre 60 y 90 m/seg se puede considerar incompresible siempre que no exista intercambio de calor con el exterior. En la práctica, sólo en los problemas de *golpe de ariete* es necesario considerar que el flujo de un líquido es compresible.

Cuando en un flujo el campo rot **v** adquiere en alguno de sus puntos valores distintos de cero, para cualquier instante, el flujo se denomina *rotacional*. Por el contrario, si dentro de un campo de flujo el vector rot **v** es igual a cero para cualquier punto e instante, el flujo es *irrotacional*. Si se exceptúa la presencia de singularidades vorticosas, en el caso general, el movimiento de un fluido ideal se puede suponer irrotacional. Los efectos de la viscosidad del fluido constituyen la causa principal de la presencia de dichas singularidades. Sin embargo, el flujo irrotacional ocurre con bastante frecuencia en los problemas de la práctica; y sólo será necesario entender con claridad el concepto físico de irrotacionalidad.

Si bien el término rotación implica un giro de partículas, esto no significa que es rotacional todo movimiento efectuado de acuerdo a una trayectoria curva o bien que todo movimiento rectilíneo es irrotacional.

Ciertos escurrimientos se pueden considerar macroscópicamente como irrotacionales. En otros casos, a pesar de existir trayectorias curvas, la distribución de velocidades puede ser de forma tal que las líneas medianas o las diagonales de una partícula, de forma rectangular, no modifican su orientación durante el movimiento; el flujo es, obviamente, irrotacional. Esto se representa esquemáticamente en las Figs. 3.8 y 3.9 en las cuales el vector rot **v** sería normal al plano del papel (Ref. 15).

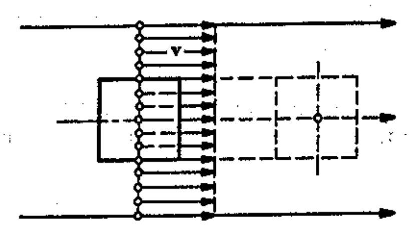


Figura 3.8a. Flujo lineal irrotacional.

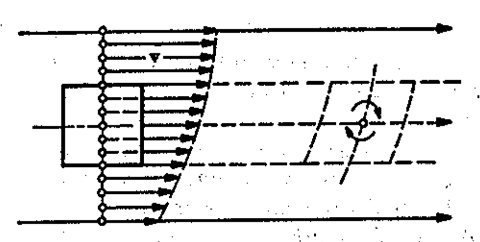


Figura 3.8b. Flujo lineal rotacional.

En el capítulo 10 se demuestra que el movimiento de un fluido ideal (incompresible y no viscoso) se considera irrotacional. El movimiento a bajas velocidades, de un fluido viscoso, es generalmente rotacional.

Problema 3.3. Demostrar que el flujo, cuyo campo de velocidades se indica en seguida, es irrotacional

$$v_x = (2x + y + z)\,t$$
$$v_y = (x - 2y + z)\,t$$
$$v_z = (x + y)\,t$$

Solución. Para que el flujo sea irrotacional se debe satisfacer que: rot **v** = 0; y por tanto, resulta

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = (t-t)\,\mathbf{i} + (t-t)\,\mathbf{j} + (t-t)\,\mathbf{k} = 0$$

lo cual demuestra que el flujo es, efectivamente, irrotacional.

3.5 Métodos para describir un flujo

Con el fin de obtener la representación completa de un flujo, es necesario determinar la posición de cada partícula en cada instante y después encontrar la velocidad en cada posición, a medida que el tiempo transcurre.

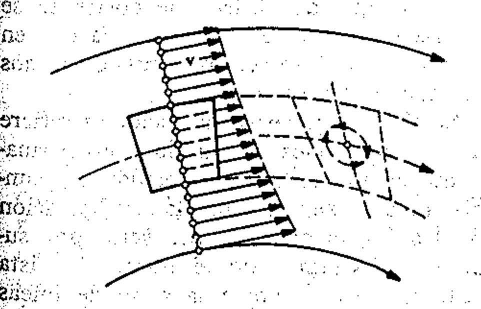


Figura 3.9a. Flujo curvilíneo irrotacional.

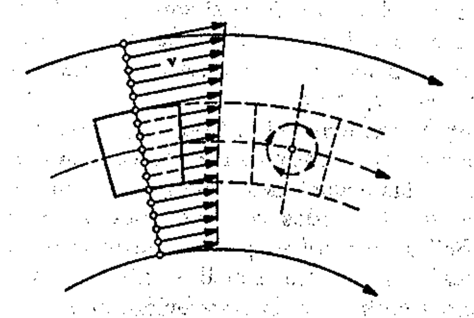


Figura 3.9b. Flujo curvilíneo rotacional.

Es posible estudiar el movimiento de las partículas mediante dos métodos: el *euleriano* o *local* y el *lagrangiano* o *molecular*.

Método euleriano. Consiste en determinar las características cinemáticas en cada punto de un flujo y en cada instante, sin considerar el *destino* que tenga cada partícula individual. Elegida la posición de una partícula en el espacio, sus características cinemáticas son funciones del tiempo, a saber:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$$

Método lagrangiano. Consiste en determinar las características cinemáticas del movimiento de cada partícula, en cada instante, siguiendo su recorrido. Identificada una partícula por su posición inicial $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, en el instante $t = t_0$, en otro instante cualquiera t, la misma partícula se encuentra en la posición $\mathbf{r}(x, y, z)$. Entonces la posición de la partícula se tiene conocida en cualquier instante si el vector de posición $\mathbf{r}$ se determina como función del tiempo t y la posición inicial $\mathbf{r}_0$; o sea

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$$

Las componentes de la velocidad de la partícula, identificada en el instante inicial por el vector de posición $\mathbf{r}_0$, se obtienen de las Ecs. (3.1), donde obviamente la diferenciación debe hacerse considerando a $\mathbf{r}_0$ constante.

Aparentemente el método lagrangiano, tiene aspectos muy convenientes; sin embargo, las ecuaciones generales del movimiento, deducidas con este método, son difíciles de resolver por su naturaleza no lineal; es pues más sencillo utilizar el método euleriano y será preferido en el desarrollo de los siguientes capítulos.

3.6 Línea de corriente, trayectoria y tubo de flujo

Se supone que en un instante t_0 se conoce el campo de velocidades v, de un flujo.

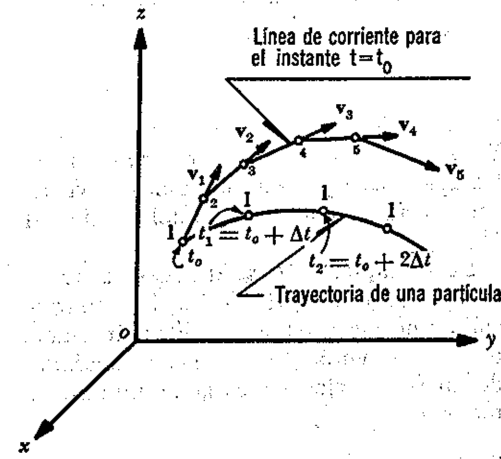


Figura 3.10. Concepto de línea de corriente y trayectoria.

Se define como *línea de flujo* o *de corriente* toda línea trazada idealmente en el interior de un campo de flujo, de manera que la tangente en cada uno de sus puntos proporcione la dirección del vector velocidad correspondiente al punto mismo (Fig. 3.10). Con la excepción de eventuales puntos singulares, no existe posibilidad de que dos líneas de corriente se intersequen, pues ello significaría que en el punto de intersección existieran dos vectores v distintos.

Se observa que esta definición se refiere a las condiciones de un flujo no permanente en un instante particular. Al cambiar de un instante a otro la configuración de las líneas de corriente será, por supuesto, distinta; con el punto de vista euleriano se obtiene una serie de líneas de corriente dentro del flujo para diferentes instantes. De la definición de línea de corriente, el vector diferencial de arco $d\mathbf{s}$ y el vector velocidad son paralelos, de manera que de la Ec. (3.2) se puede escribir:

$$d\mathbf{s} = \mathbf{v}\, dt$$

que representa la *ecuación diferencial de la línea de corriente*. Esta ecuación, en términos de sus componentes, es

$$dx = v_x\, dt$$
$$dy = v_y\, dt$$
$$dz = v_z\, dt$$

o bien, para el instante t_0 considerado, se pueden escribir de la manera siguiente:

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t_0)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t_0)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t_0)} \quad (3.9)$$

que forman un sistema de tres ecuaciones diferenciales.

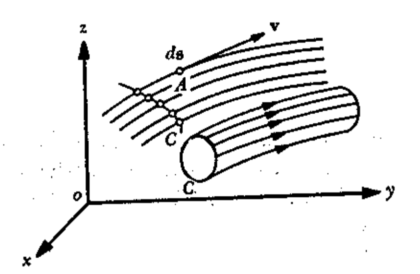


Figura 3.11. Concepto de tubo de flujo.

Se considera ahora, dentro del flujo, la curva C cualquiera de la Fig. 3.11 (que no sea línea de corriente) y las líneas de corriente que pasan por cada punto de esa curva. La totalidad de estas líneas están contenidas en una superficie que se denomina *superficie de flujo* o *de corriente*. Si la curva C es cerrada, la superficie de corriente formada adquiere el nombre de *tubo de flujo* y, el volumen encerrado por esta superficie, el de *vena fluida*.

La trayectoria de una partícula es la línea que une los puntos de posición sucesivamente ocupados por dicha partícula en el transcurrir del tiempo (Fig. 3.10). Las ecuaciones diferenciales de la trayectoria son:

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} \quad (3.10)$$

Este concepto corresponde al tratamiento bajo el punto de vista lagrangiano; si el flujo es permanente, las líneas de corriente coinciden con las trayectorias.

Problema 3.4. Determinar la ecuación de las líneas de corriente de un flujo permanente, bidimensional, simétrico respecto del eje y, dirigido en sentido contrario al positivo del mismo (Fig. 3.12), que choca contra una placa horizontal contenida en el plano x-z, cuyo campo de velocidades está definido por las componentes

$$v_x = 3x$$
$$v_y = -3y$$
$$v_z = 0$$

Solución. De acuerdo con las Ecs. (3.9), la ecuación diferencial de las líneas de corriente es

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{-3y}$$

Cuya integración conduce a la ecuación

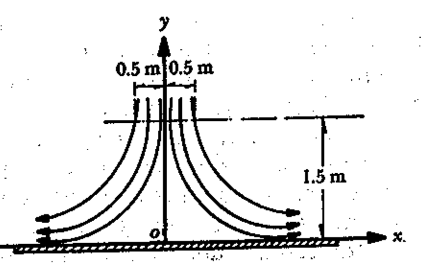


Figura 3.12. Flujo bidimensional contra una placa.

$$\ln x = -\ln y + \ln c$$

o bien

$$x\,y = C$$

que es la ecuación de las líneas de corriente y corresponde a una familia de hipérbolas rectangulares, asintóticas a los ejes x y y.

Problema 3.5. El campo de velocidades del movimiento de un fluido está definido por las componentes

$$v_x = x + t$$
$$v_y = -y + t$$
$$v_z = 0$$

Determinar:

a) la ecuación de las líneas de corriente y, en particular, aquella que en el instante $t = 0$ pasa por el punto $A(-1, -1)$.

b) La trayectoria de la partícula P, que en el instante $t = 0$ se encuentra en el punto $A(-1, -1)$ (Ref. 16).

Solución a) Debido a que la componente $v_z = 0$ y, a que en v_x y v_y, interviene el tiempo t, el flujo es bidimensional y no permanente. Las Ecs. (3.9) de las líneas de corriente, para $t = t_0$ constante, se simplifican a la forma siguiente:

$$\frac{dx}{x + t_0} = \frac{dy}{-y + t_0}$$

Al integrar se obtiene la ecuación

$$\ln (x + t_0) = -\ln (-y + t_0) + \ln c$$

o bien

$$(x + t_0)\,(t_0 - y) = C$$

Esto es, la familia de líneas de corriente queda representada por una familia de hipérbolas. Para determinar la línea de corriente, que en el instante $t_0 = 0$ pasa por el punto $A(-1, -1)$, es suficiente substituir en la ecuación anterior las coordenadas del punto y la condición $t = t_0 = 0$ con lo cual se obtiene

$$(-1)\,(+1) = C$$

esto es, $\quad C = -1$

La ecuación de la línea de corriente buscada es

$$xy = 1$$

Solución b) Para determinar la ecuación de las trayectorias se utilizan las Ecs. (3.10) pero substituyendo a las componentes:

$$\frac{dx}{dt} = x + t$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + t$$

Este sistema de ecuaciones se puede también escribir como

$$\frac{dx}{dt} - x = t$$
$$\frac{dy}{dt} + y = t$$

el cual es un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo, con coeficientes constantes, cuya solución es

$$x = C_1 e^{t} - t - 1$$
$$y = C_2\, e^{-t} + t - 1$$

Para determinar la ecuación de la trayectoria del punto P, que en el instante $t = 0$ se encuentra en el punto $A(-1, -1)$, es necesario determinar la magnitud de las constantes C_1 y C_2. Para ello, es suficiente substituir en las ecuaciones anteriores $t = 0$, $x = -1$ y $y = -1$, con lo cual se obtiene $C_1 = C_2 = 0$. Para la trayectoria buscada resulta

$$x = -t - 1$$
$$y = t - 1$$

Eliminando a t, la ecuación de la trayectoria buscada es

$$x + y = -2$$

que corresponde a la ecuación de una recta, distinta de la hipérbola encontrada para las líneas de corriente.

3.7 Concepto de gasto o caudal

En la Fig. 3.13, un elemento dA, de la superficie S (limitada por la curva C) y que contiene al punto cualquiera P, se puede representar por el vector diferencial de superficie:

$$d\mathbf{A} = dA\,\mathbf{n}$$

donde $\mathbf{n}$ se define como un vector unitario normal a la superficie en el punto P, cuyo sentido positivo se establece por convención.

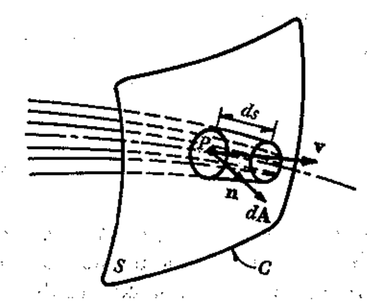


Figura 3.13. Concepto de gasto.

La velocidad $\mathbf{v}$ que corresponde al punto P tiene en general una dirección distinta a la de $d\mathbf{A}$.

En un intervalo dt, el volumen de fluido que atraviesa el elemento de superficie dA queda determinado por el producto escalar de los vectores: el diferencial de arco $d\mathbf{s}$ sobre la línea de corriente que pasa por P y el vector diferencial de superficie $d\mathbf{A}$.

Entonces, considerando que $d\mathbf{s} = \mathbf{v}\,dt$, el volumen de fluido que pasa a través del elemento dA vale:

$$dv = d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}\,dt$$

El flujo de volumen a través de toda la superficie S queda definido por la ecuación

$$Q = \frac{dv}{dt} = \iint_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \qquad (3.11)$$

cuyas dimensiones son $[L^3 T^{-1}]$. Este flujo de volumen se conoce como *gasto* o *caudal*.

Si en un flujo la superficie S se escoge de modo que las líneas de corriente sean normales a ella en cada punto, de la

Ec. (3.11) el gasto se puede calcular de la manera siguiente:

$$Q = \iint_A v\, dA \qquad (3.12)$$

Se llama *velocidad media*, a través de la superficie S de área A, al promedio calculado así:

$$V = \frac{\iint_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}}{A} = \frac{Q}{A} \qquad (3.13)$$

y equivale a suponer que la velocidad se distribuye uniformemente sobre toda la superficie, con un valor constante V y en dirección perpendicular a la misma.

Problema 3.6. En el flujo mencionado en el problema 3.4, determinar el gasto, por unidad de ancho, del chorro que pasa a través de una superficie horizontal localizada a $y = 1.5$ m y limitada por las abscisas $x = -0.50$ m y $x = 0.50$ m.

Solución. El vector velocidad para el flujo es

$$\mathbf{v} = 3\,x\,\mathbf{i} - 3\,y\,\mathbf{j}$$

y el vector diferencial de superficie es

$$d\mathbf{A} = -\,dx\,\mathbf{j}$$

Haciendo el producto escalar indicado en la Ec. (3.11), ésta se escribe como

$$Q = \int_{-0.50}^{0.50} 3\,y\,dx$$

donde los límites de integración corresponden a las abscisas. La integración efectuada con $y = cte$, conduce al siguiente resultado:

$$Q = 3\,y\,[x]_{-0.50}^{0.50} = 3\,y$$

y para $y = 1.5$ m vale

$$Q = 4.5\ \text{m}^3/\text{seg}$$

Problema 3.7. En la descarga de la compuerta, mostrada en la Fig. 3.14, las velocidades del agua medidas en la sección de la misma tienen las magnitudes y direcciones indicadas. La compuerta tiene 3 m de ancho y su abertura es de 1.50 m. Calcular en forma aproximada el gasto total, en m³/seg (Ref. 17).

Solución. El gasto puede calcularse, como primera aproximación, multiplicando cada velocidad por la distancia normal $\Delta n \approx \Delta y \cos\theta$, y sumando los valores resultantes de Δq. Por tanto, el gasto por unidad de ancho de compuerta es

$$q = \Sigma\Delta q = \Sigma(v\,\Delta n) = 3 \times 0.30 \times \cos 28° + 3.6 \times 0.30 \times \cos 22° + 3.3 \times 0.30 \times \cos 16° + 3 \times 0.30 \times \cos 8° + 2.4 \times 0.30 \cos 2°$$

$$q = 4.3585\ \text{m}^3/\text{seg/m}$$

$$Q = 3 \times 4.3585 = 13.076\ \text{m}^3/\text{seg}$$

Puesto que $v(\Delta y \cos\theta) = (v \cos\theta)\,\Delta y = v_x\,\Delta y$, el cálculo anterior no es más que una aproximación de la integral $Q = 3\int v_x\,dy$. Por lo cual, si se dibujan las componentes horizontales de los vectores, según se indica en la Fig. 3.14, el área limitada por la curva obtenida, multiplicada por el ancho de 3 m de la compuerta, representará un valor más preciso de Q.

De la Ec. (3.13), la velocidad media en la sección vale

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{13.076}{3 \times 1.5} = 2.906\ \text{m/seg}$$

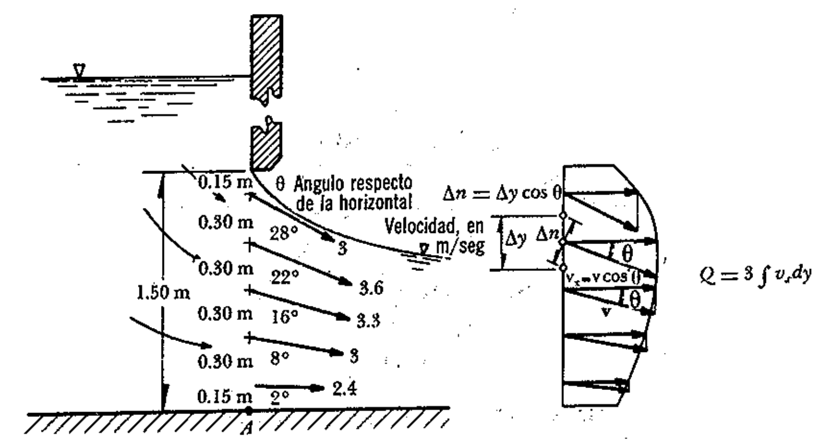


Figura 3.14. Descarga de la compuerta del problema 3.7.

3.8 Función de corriente

Se considera, en un instante determinado, un flujo no permanente, tridimensional incompresible, viscoso o no viscoso, rotacional o irrotacional; asimismo, un tubo de flujo formado por dos sistemas diferentes de superficies de flujo cuyas intersecciones coinciden obviamente con líneas de corriente, como se muestra en la Fig. 3.15. Evidentemente esta misma consideración es válida para un flujo permanente en cualquier instante.

La solución de las ecuaciones diferenciales (3.9) de las líneas de corriente, permite determinar la geometría de éstas y se puede expresar a través de dos relaciones independientes de la forma:

$$\psi(x, y, z) = F \qquad (3.14a)$$

$$\chi(x, y, z) = G \qquad (3.14b)$$

en que F y G representan dos funciones diferentes que adquieren un valor constante cuando se desea definir la geometría de una línea de corriente en particular. Estas dos ecuaciones definen una doble familia de superficies de flujo a través de las funciones ψ y χ, llamadas de *corriente*, escogidas de tal manera que sean mutuamente ortogonales. En el punto P de la Fig. 3.15, sobre una línea de corriente, los vectores grad ψ y grad χ son normales a las superficies ψ = constante, χ = constante, respectivamente. Puesto que $\mathbf{v}$ es tangente a ambas superficie en P y, por lo mismo, perpendicular a ambos vectores, se debe satisfacer que

$$\mathbf{v} = \text{grad}\,\psi \times \text{grad}\,\chi \qquad (3.15)$$

o bien, por definición de gradiente y de producto vectorial (Ref. 18).

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial y} \qquad (3.15a)$$

$$v_y = \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial z} \qquad (3.15b)$$

$$v_z = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\chi}{\partial x} \qquad (3.15c)$$

La substitución de estas componentes en

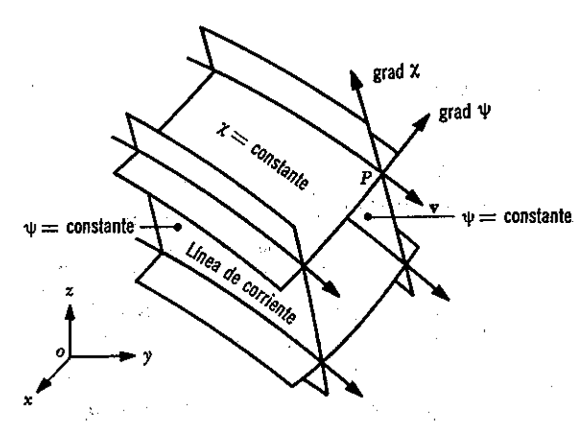


Figura 3.15. Superficies de corriente.

las ecuaciones diferenciales de la línea de corriente 3.9 y las superficies de frontera, permiten determinar las funciones ψ y χ para cada flujo.

En el caso de un flujo bidimensional, la familia de planos paralelos (sobre los cuales la configuración del flujo es idéntica) se hace coincidir con el sistema de superficies χ = constante, donde el eje z es perpendicular a dicha familia. Con esa disposición, el vector grad χ es el mismo vector unitario **k** y la Ec. (3.15) sería:

$$\mathbf{v} = \text{grad}\,\psi \times \mathbf{k}$$

cuyas componentes son:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad (3.16a)$$

$$v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (3.16b)$$

y en coordenadas polares (Fig. 3.16)

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad (3.17a)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \qquad (3.17b)$$

Para el flujo bidimensional la ecuación diferencial de la línea de corriente, según el sistema de Ecs. (3.9), es

$$v_x\,dy - v_y\,dx = 0$$

Substituyendo las Ecs. (3.16) en esta ecuación, se obtiene

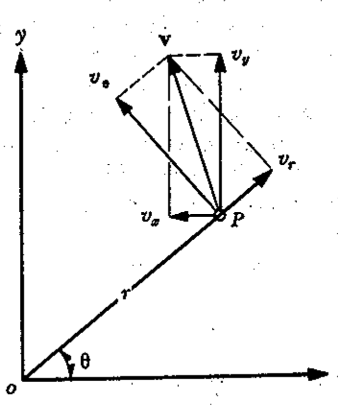


Figura 3.16. Componentes de la velocidad para un flujo plano en coordenadas cartesianas y polares.

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0$$

O bien, por definición de gradiente

$$d\psi = \text{grad}\,\psi \cdot d\mathbf{s} = 0$$

Así, obviamente, el vector diferencial de arco sobre una línea de corriente es perpendicular a grad ψ y, la ecuación de la línea será $\psi\,(x, y)$ = constante, cuya representación es una familia de líneas de corriente como se muestra en la Fig. 3.17. Cada línea de corriente no es más que la intersección de la superficie ψ que corresponde con el plano coordenado x-y.

Por otra parte, si **n** es un vector unitario en la dirección normal a las líneas de corriente, por definición de derivada direccional se tiene que:

$$\text{grad}\,\psi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial\psi}{\partial n}$$

Pero, toda vez que grad ψ y **n** son paralelos, grad ψ · **n** es igual al módulo de grad ψ; el cual, de acuerdo con las ecuaciones (3.16), vale

$$|\,\text{grad}\,\psi\,| = \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{v_y^2 + v_x^2} = v$$

Entonces:

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = v \qquad (3.18)$$

Sin embargo, de esta ecuación, $v\,dn$ es el gasto que pasa entre dos líneas de corriente ψ y $\psi + d\psi$ (Fig. 3.17) por unidad de ancho normal al plano del flujo; esto es

$$dQ = d\psi = v\,dn$$

por lo cual el gasto entre dos líneas de corriente ψ_1 y ψ_2 es:

$$q = \left[\psi\right]_1^2 = \psi_2 - \psi_1 \qquad (3.19)$$

La Ec. (3.19) indica que el gasto que circula entre dos líneas de corriente es igual a la diferencia de los valores que adquiere la función de corriente en esas líneas.

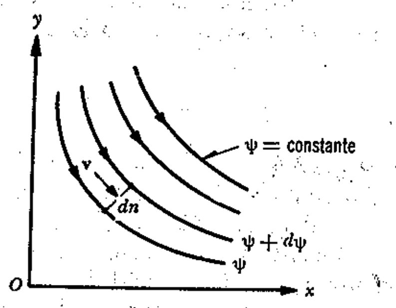


Figura 3.17. Familia de líneas de corriente.

Problema 3.8. Determinar la función de corriente del flujo bidimensional del problema 3.4; ver, además, si éste es rotacional. Calcular también el gasto por unidad de ancho que fluye entre las líneas de corriente que pasan por los puntos $A(1, 1)$ y $B(2, 2)$.

Solución. De la misma manera que el problema 3.7, se tiene:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 3\,x$$

$$v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -3\,y$$

$$\psi = 3\,xy + f(x) + C$$

$$\psi = 3\,xy + f(y) + C$$

$$f(x) = f(y) = 0$$

y, finalmente:

$$\psi = 3\,xy + C$$

que es la ecuación de la familia de líneas de corriente que corresponde a una familia de hipérbolas rectangulares, xy=constante. Asimismo, $[\text{rot}\,\mathbf{v}]_z = 0$, por lo que el flujo es irrotacional. La línea de corriente que pasa por el punto A es: $\psi_A = 3 + C$; y por el punto B: $\psi_B = 12 + C$; entonces el gasto entre las dos líneas de corriente por unidad de ancho, según la Ec. (3.19), es

$$q = \psi_B - \psi_A = 9$$

Problema 3.9. La componente v_x de la velocidad en un flujo incompresible bidimensional, está dada por $v_x = A\,x^3 + B\,y^2$.

a) Encontrar la ecuación para la componente v_y de la velocidad, suponiendo que en $y = 0$, $v_y = 0$ para cualquier valor de x.

b) ¿Es el flujo irrotacional?

Solución a). De la Ec. (3.16a) se tiene que

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y} = A\,x^3 + B\,y^2$$

integrando resulta:

$$\psi = A\,x^3\,y + \frac{1}{3}B\,y^3 + f(x) + C_1$$

De la Ec. (3.16b) se tiene

$$v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -3A\,x^2\,y + \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

Para $y = 0$, $v_y = 0$; esto es:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$$

y, asimismo, $f(x)$ = constante; entonces

$$v_y = -3\,A\,x^2\,y$$

Solución b). La componente única de rot $\mathbf{v}$ es

$$[\text{rot}\,\mathbf{v}]_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -6\,A\,xy - 2\,B\,y \neq 0$$

se concluye que el flujo es rotacional.

PROBLEMAS

1. El campo de velocidades de un flujo está definido a través del vector $\mathbf{v} = -a\,y\,\mathbf{i} + a\,x\,\mathbf{j}$; en que a es una constante. Se desea determinar:

a) la función de corriente y la ecuación de las líneas de corriente;
b) si el flujo es rotacional.

2. El campo de velocidades de un flujo está dado por $\mathbf{v} = 6\,x\,\mathbf{i} + 6\,y\,\mathbf{j} - 7\,t\,\mathbf{k}$.

a) Determinar la velocidad en un punto $x = 10$ m; $y = 6$ m; cuando $t = 10$ seg. Dibujar, aproximadamente, un conjunto de líneas de corriente para el flujo en el instante $t = 0$.
b) Determinar el campo de aceleraciones del flujo y la aceleración de la partícula en el punto e instante antes especificados.

3. *a)* Dado el campo de velocidades: $\mathbf{v} = 10\,\mathbf{i} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{j} - 2\,y\,x\,\mathbf{k}$; determinar la aceleración y su magnitud en el punto (3, 1, 0).
b) Dado el campo de velocidades: $\mathbf{v} = (6 + 2\,x\,y + t^2)\,\mathbf{i} - (x\,y^2 + 10\,t)\,\mathbf{j} + 25\,\mathbf{k}$; determinar la aceleración del punto (3, 0, 2) y en el instante $t = 1$.

4. *a)* En los campos de flujo de los problemas 1 y 2, determinar si son rotacionales o irrotacionales.

b) Demostrar que las siguientes componentes de velocidad representan un flujo irrotacional.

$$v_x = (2\,x + y + z)\,t$$
$$v_y = (x - 2\,y + z)\,t$$
$$v_z = (x + y)\,t$$

5. Clasificar los siguientes flujos como permanente o no permanente, uniforme o no uniforme. Donde haya duda, especificar las condiciones para que el flujo sea como el lector lo establezca.

a) Agua en una manguera de jardín.
b) Agua fluyendo a través de los chiflones de un rociador de jardín.
c) Flujo a lo largo del chiflón colocado en el extremo de una manguera de jardín.
d) Flujo de gases en la descarga de la tobera de un cohete.
e) Flujo del agua sobre un vertedor de cresta ancha en un río.
f) Líquido descargado por un orificio en un tanque pequeño.
g) Gasolina en la línea de combustible de un automóvil: 1) que corre en la ciudad; 2) en una autopista.

6. Clasificar los siguientes flujos como uni, bi o tridimensionales:

a) Flujo de agua sobre un vertedor ancho de un río.
b) Flujo en la curva de un río.
c) ¿Qué flujo se aproxima más al unidimensional: el de un fluido no viscoso a través de una curva en un tubo rectangular o de un fluido viscoso a través de una curva en un tubo cilíndrico?

7. Clasificar los siguientes flujos como laminar o turbulento:

a) Agua saliendo desde una manguera de incendio.
b) Flujo en un río.
c) Flujo en una aguja hipodérmica.
d) Vientos atmosféricos.
e) Flujo de un líquido viscoso a poca velocidad, dentro de un tubo pequeño.
f) Flujo de un líquido de poca viscosidad, a velocidad relativamente grande, en un tubo de gran diámetro.

8. Las componentes de velocidad en un campo de flujo tridimensional incompresible están dadas por $v_x = 2\,x$; $v_y = -y$; $v_z = -z$. Determinar la ecuación de la línea de corriente que pasa por el punto (1, 1, 1).

9. Un campo de velocidades está dado por $\mathbf{v} = -x\,\mathbf{i} + 2\,y\,\mathbf{j} + (5 - z)\,\mathbf{k}$. Encontrar la ecuación de la línea de corriente que pasa por (2, 1, 1).

10. Encontrar la ecuación de las líneas de corriente para el flujo $\mathbf{v} = -3\,y^2\,\mathbf{i} - 6\,x\,\mathbf{j}$, así como la de la línea que pasa por el punto (1, 1).

11. El campo de velocidades de un flujo bidimensional está dado por $v_x = -y/b^2$, $v_y = x/a^2$. Comprobar que la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ es una línea de corriente.

12. El campo de velocidades de un flujo está dado por $\mathbf{v} = 6\,x\,\mathbf{i} + 6\,y\,\mathbf{j} - 7\,t\,\mathbf{k}$. ¿Cuál es la velocidad en el punto $x = 10$ m; $y = 6$ m; cuando $t = 10$ seg? Dibujar, aproximadamente, un conjunto de líneas de corriente para el flujo en el instante $t = 10$ seg.

13. Determinar el gasto (por metro, en la dirección z) a través del cuadrado de vértices en (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0), debido al campo de velocidades $\mathbf{v} = (16\,y - 12\,x)\,\mathbf{i} + (12\,y - 9\,x)\,\mathbf{j}$.

14. La distribución de velocidades entre dos placas planas, separadas una distancia $a = 0.60$ m, está dada por $v = 3\,(a^2/4 - y^2)$

(en m/seg), donde v es la velocidad a una distancia y, desde un plano que queda a la mitad de la distancia entre las dos placas. Encontrar una expresión para la función de corriente y dibujar las líneas de corriente.

15. En un flujo bidimensional alrededor de un cilindro circular (Fig. 10.40), el gasto entre líneas de corriente es de 0.3 l/seg. A una gran distancia desde el cilindro las líneas de corriente están separadas 5 mm y, en un punto próximo al cilindro, están separadas 3 mm. Calcular la magnitud de la velocidad en esos dos puntos.

16. Si la distribución de velocidades en un ducto cilíndrico está dada por $v/v_0 = 1 - (r/r_0)^n$, donde r_0 es el radio del ducto y v_0 la velocidad en el centro, encontrar el gasto y la velocidad media V, como funciones de v_0 y n.

17. Describir el flujo dado por las siguientes funciones de corriente:

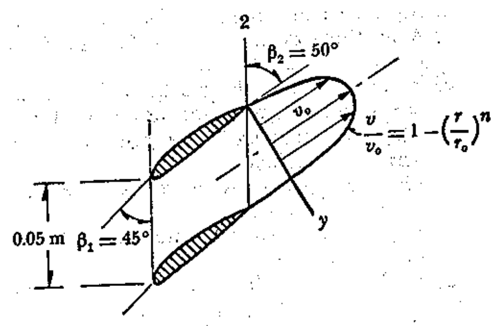
   a) $\psi = -20y$
   b) $\psi = 10x$
   c) $\psi = 5x - 8.66y$
   d) $\psi = x^2$

18. Dada la función de corriente: $\psi = y - x$, determinar

   a) Las componentes v_x, v_y de la velocidad en (0, 0) y (2, 1);
   b) el gasto entre las líneas de corriente que pasan por esos puntos.

19. Dado el campo $v_x = 2y$; $v_y = 2$; determinar la función de corriente para este flujo y esquematizar el aspecto de las líneas de corriente, en el semiplano superior, haciendo que la constante en la función de corriente sea igual al cero.

20. La distribución de velocidades en la descarga de una hilera de álabes se muestra en la figura. Suponiendo que la velocidad es uniforme en la dirección perpendicular al plano ilustrado, calcular la velocidad media y el gasto por unidad de ancho.



Problema 20

4

ECUACIONES FUNDAMENTALES DE LA HIDRÁULICA

4.1 Aspectos generales

4.1.1 Principios básicos en el análisis

En la mecánica de fluidos los métodos de análisis consideran la capacidad de un flujo para transportar materia y el mecanismo por el que cambia sus propiedades de un lugar a otro, para lo cual se establece como axioma que en los fluidos se satisfagan los principios básicos de la mecánica del medio continuo, a saber:

a) Conservación de la materia (principio de continuidad).
b) Segunda ley de Newton (impulso y cantidad de movimiento).
c) Conservación de la energía (primera ley de la termodinámica).
d) Segunda ley de la termodinámica.

El principio de la conservación de la materia o del transporte de masa permite derivar la primera ecuación fundamental o *de continuidad*, que admite diferentes simplificaciones de acuerdo con el tipo de flujo de que se trate o de las hipótesis que se deseen considerar.

La segunda ley de Newton establece la relación fundamental entre la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula y la variación en el tiempo de la cantidad de movimiento. De acuerdo con la forma en que se aplique, puede conducir a dos ecuaciones: la primera (componente escalar según el flujo) llamada *de la energía*, permite calcular las diferentes transformaciones de la energía mecánica dentro del flujo y las cantidades disipadas en energía calorífica que, en el caso de los líquidos, no se aprovecha. La segunda, de tipo vectorial llamada *del impulso y cantidad de movimiento*, permite determinar alguna de las fuerzas que producen el flujo si se conoce el cambio en la cantidad de movimiento y las restantes fuerzas.

En la dinámica de fluidos (especialmente en el flujo de gases) el análisis requiere, además, la inclusión de leyes termodinámicas referentes al transporte de calor debido al flujo y, para ello, el principio de la conservación de la energía permite derivar una ecuación que relaciona la presión, densidad, temperatura, velocidad, elevación, trabajo mecánico y la cantidad de calor comunicado al flujo (o el que éste cede). Esta ecua-

ción admite simplificaciones importantes al analizar el flujo de líquidos, al punto en que se obtiene la misma ecuación de energía que resulta de la ecuación componente de la cantidad de movimiento en la dirección del flujo. La segunda ley de la termodinámica tiene menos interés en el flujo de líquidos.

Puesto que el interés principal de este libro es estudiar el escurrimiento de líquidos, se considera suficiente la obtención de las tres ecuaciones fundamentales de la hidráulica a partir de los dos primeros principios y es el objeto de este capítulo.

4.1.2 Flujo con potencial

Otro método aplicado a la solución de problemas en la dinámica de fluidos y que se presenta en el capítulo 10, consiste en la elaboración de un modelo matemático basado en considerar la existencia de un *flujo con potencial*. Para este tipo de flujo la hipótesis consiste en tratarlo como irrotacional, lo que constituye la base de la hidrodinámica clásica, una rama de la mecánica de fluidos que ocupó la atención de eminentes matemáticos como Stokes, Rayleigh, Rankine, Kelvin y Lamb. En una gran cantidad de problemas prácticos de interés en la hidráulica, esta suposición puede ser aceptada debido a que el agua posee una viscosidad muy pequeña y se acerca a la condición de fluido ideal. En otros problemas, es necesario considerar los efectos viscosos y estudiar las fuerzas de fricción originadas por la turbulencia que acompaña al movimiento. Una parte de la energía de la corriente se utiliza para vencer las fuerzas de resistencia originadas por estos efectos o las debidas a cambios en la geometría de la conducción (cambios de dirección, ampliaciones, reducciones, etc.); también se utiliza en órganos de cierre (válvulas, compuertas, etc.) para regular el gasto. Esa parte de la energía de la corriente se transforma en otro tipo de energía que en los problemas de hidráulica se considera como energía *perdida* en el movimiento y, por supuesto, es necesario determinar.

4.1.3 Método experimental

El tratamiento de un flujo con base exclusivamente en el análisis matemático es insuficiente para resolver todos los problemas, si no es con el auxilio de *métodos experimentales*. El planteamiento racional de un experimento permite continuar, complementar o substituir el análisis en aquellos puntos en que la solución matemática se torna imposible o muy compleja, a tal grado que para obtenerla, sea necesario conceder hipótesis simplificatorias; éstas, además de restar generalidad a la misma, pueden llegar a falsear resultados al punto en que ellos no tengan semblanza alguna con la situación real del problema.

Debido a su importancia, la *teoría de la semejanza*, básica para el método experimental, se presenta en el capítulo 5.

4.2 Métodos de análisis

Los métodos de análisis en la mecánica de fluidos se basan en una extensión de los puntos de vista lagrangiano y euleriano, para describir un flujo, referidos ahora a regiones dentro del mismo sobre las cuales se satisfacen los principios fundamentales enunciados en el inciso 4.1.1.

En el análisis lagrangiano los principios básicos se aplican a una cantidad definida de materia que ocupa cierta región del flujo y que recibe el nombre de *sistema*. Éste puede cambiar de forma, posición y condición térmica dentro del flujo pero debe contener siempre la misma cantidad

de masa en cualquier instante que se considere. La finalidad de tal análisis será predecir el estado del sistema, esto es, determinar sus propiedades siguiendo su movimiento en el espacio dentro del flujo. Se utiliza invariablemente en la mecánica del cuerpo rígido donde el sistema se conoce como *cuerpo libre* y en la termodinámica donde se le llama *sistema cerrado*. Aunque a primera vista parece razonable utilizar el análisis lagrangiano, éste se aplica sólo en casos especiales debido a la dificultad física y matemática para identificar los sistemas de fluidos, a medida que pasan por las distintas configuraciones de frontera. Además, el tipo de información suministrada por esta forma de análisis no siempre es el que se necesita.

El segundo método de análisis tiene aquí mayor aplicación; se llama euleriano y estudia el flujo con base en el análisis de un volumen adecuado de fluido llamado *volumen de control* fijo respecto de un sistema coordenado y de forma y magnitud constantes. El contorno de dicho volumen se llama *superficie de control*.

En el análisis se considera el intercambio de masa, energía y cantidad de movimiento, a través de las fronteras del volumen de control que puede ser de tamaño diferencial o de magnitud finita. El primer tipo ha sido tradicional en la mecánica de fluidos cuando se aplica a volúmenes de control de tamaño muy pequeño —de dimensiones Δx, Δy, Δz— que en el límite expresan las condiciones en el punto de coordenadas (x, y, z) encerrado por dicho volumen. Este tratamiento equivale a describir las características del flujo en un punto fijo (x, y, z), observando el movimiento instantáneo de una partícula del fluido de masa diferencial representada por el punto considerado.

Al aplicar la ley de la conservación de la materia, al volumen de control diferencial, se obtiene la ecuación diferencial de continuidad; si se aplica la segunda ley de Newton, se obtiene la ecuación diferencial de Navier-Stokes, cuya derivación puede consultarse en la Ref. 18. En este capítulo se presentan la ***ecuación diferencial de continuidad*** y las ***ecuaciones del movimiento*** para un volumen de control diferencial orientado según una línea de corriente; tienen utilidad posterior en la solución de algunos problemas locales de flujo. Sin embargo, el intento de una integración general torna las soluciones muy complejas y, por lo mismo, de poca utilidad práctica. Por otra parte, de acuerdo con la naturaleza del problema la información requerida con frecuencia se refiere a resultados gruesos de las características en el conjunto, más que a las variaciones de un punto a otro.

La integración aproximada de las ecuaciones del movimiento dentro de una vena líquida, simplifica la solución y equivale a utilizar volúmenes finitos de control. El procedimiento consiste en suponer que el movimiento de un líquido —en cualquier conducción— se estudie como si fuera una vena líquida limitada, tanto en el caso de conducciones forzadas o a presión (tuberías) por las paredes rígidas de frontera, como en el caso de conducciones abiertas (canales): en parte por paredes rígidas y en parte por la superficie libre del líquido en contacto con la atmósfera. En estas condiciones, la frontera de la vena líquida admite cierta deformación parcial o totalmente y el problema se reduce a estudiar el movimiento a lo largo de una sola dimensión (unidimensional), que corresponde a la dirección en que se produce el flujo, eliminando con ello las complejidades del tratamiento tridimensional. De este modo, las variables características del flujo (velocidad, gasto, presión) se representan a través de la media de los valores que hay en los puntos de una misma sección transversal de la con-

ducción y las magnitudes de dichos promedios concentrados en el centro de gravedad de la sección. De este modo, hay variación de los mismos sólo en la dirección del movimiento general y en el tiempo, aun cuando existan cambios en el área de una sección a otra (que pueden también depender del tiempo). La dirección en que ocurre la variación no es necesariamente rectilínea sino a lo largo del eje del conducto. Esto equivale a estudiar el escurrimiento sobre la línea de corriente hipotética que coincide con dicho eje, y los valores medios de las características en un punto sobre el mismo serán representativos de la sección que contiene al punto tratado, mediante términos correctivos que tomen en consideración la distribución real de velocidades en toda la sección.

En este capítulo se establecen las ecuaciones fundamentales de la hidráulica, referidas al flujo unidimensional; ellas son: *la de continuidad, la de energía* y la de *impulso y cantidad de movimiento*. Para el establecimiento de estas ecuaciones no se hace distinción entre flujo laminar y flujo turbulento, pues en ambos casos son válidas. En el capítulo 8 correspondiente a la teoría de la resistencia al flujo se dará mayor importancia a esta manera de clasificar los flujos. Análogamente, puesto que las ecuaciones obtenidas para el flujo unidimensional se refieren al movimiento de un líquido real dentro de la vena líquida, la clasificación en flujos —rotacional e irrotacional— basada en el tipo de deformación de cada partícula, carece de aplicación en estas ecuaciones.

En la deducción de las mismas, las pérdidas de energía antes mencionadas se tomarán en consideración empleando una fuerza de resistencia, que comprende las fuerzas viscosas y de fricción, sujeta a una valuación empírica o semiempírica. Su importancia y efectos se exponen en los subsiguientes capítulos. En las ecuaciones se incluyen los coeficientes de corrección necesarios para tomar en cuenta la distribución real de velocidades en una sección y se evalúan sus efectos.

4.3 Ecuación de continuidad

4.3.1 Principio de conservación de la materia

De acuerdo con éste, de la masa de fluido que en la unidad de tiempo entra a un volumen especificado dentro del flujo, una parte se queda almacenada en su interior y el resto sale del volumen. Si el volumen que se estudia es de forma y magnitud constantes (volumen de control), el almacenaje no puede ser indefinido.

Matemáticamente es preferible tratar con la cantidad neta de masa que sale y que entra, sumadas algebraicamente; así, el principio de la conservación de la materia, aplicado a un volumen de control fijo completamente arbitrario dentro del flujo, se expresa en la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix}\text{Cantidad neta de masa}\\ \text{que atraviesa la superficie}\\ \text{de frontera del volumen,}\\ \text{en la unidad de tiempo.}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Rapidez de variación}\\ \text{de la masa contenida}\\ \text{en el volumen}\end{bmatrix} = 0$$

Este principio se aplica lo mismo a un volumen de control de tamaño diferencial que a uno finito, de lo cual se deriva la llamada ecuación de continuidad.

4.3.2 Ecuación diferencial de continuidad

Si bien esta ecuación no tiene mucha aplicación en los problemas de flujo unidimensional en hidráulica, aquí se presenta su derivación para ser utilizada en los problemas de flujo con potencial. Para obtenerla se aplica el principio de conservación de la materia al volumen de control diferencial, mostrado en la Fig. 4.1 (de lados dx, dy, dz).

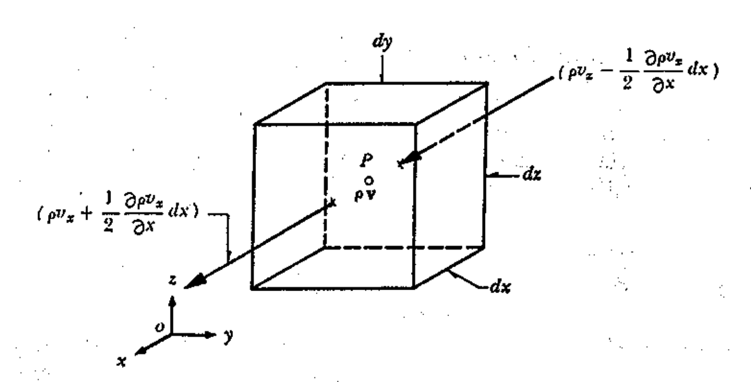


Figura 4.1. Derivación de la ecuación diferencial de continuidad.

En el centro de masa P del volumen considerado corresponden los valores ρ y $\mathbf{v}$ como funciones de punto y del tiempo, o bien, el producto $\rho\mathbf{v}$ como función vectorial.

Al pasar a las caras normales al eje x, que limitan al elemento de fluido, la función $\rho\mathbf{v}$ se incrementa y decrementa en la misma cantidad:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx,$$

donde el subíndice x indica la componente de la función $\rho\mathbf{v}$ según x. De este modo, considerando positiva la masa que sale del volumen y negativa la que entra, la cantidad neta de masa que atraviesa estas caras es:

$$(\rho v_x + \tfrac{1}{2}\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx)\, dy\, dz -$$

$$- (\rho v_x - \tfrac{1}{2}\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx)\, dy\, dz =$$

$$= \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx\, dy\, dz$$

Por un razonamiento semejante, la cantidad neta de masa que atraviesa las caras normales al eje y es:

$$\frac{\partial \rho v_y}{\partial y} dx\, dy\, dz;$$

y, la que atraviesa a las normales al eje z:

$$\frac{\partial \rho v_z}{\partial z} dx\, dy\, dz.$$

Finalmente, la rapidez de variación de la masa contenida en el volumen elemental es

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, dx\, dy\, dz);$$

de tal manera que el principio de conservación de la masa establece lo siguiente:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} dx\, dy\, dz + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} dx\, dy\, dz +$$

$$+\frac{\partial \rho v_z}{\partial z} dx\ dy\ dz + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, dx\ dy\ dz) = 0$$

y, puesto que el volumen elemental escogido no cambia con el tiempo, la ecuación anterior se puede simplificar y resulta:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (4.1a)$$

O bien, recordando que

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z},$$

la ecuación anterior también se expresa en la forma

$$\operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (4.1b)$$

Las Ecs. (4.1a y b) son dos formas de expresar la ecuación diferencial de continuidad, que es la más general para un flujo compresible no permanente; admite las siguientes simplificaciones:

a) Flujo compresible permanente

$(\partial\rho/\partial t = 0)$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad (4.2)$$

b) Flujo incompresible no permanente (ρ = constante)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \qquad (4.3)$$

c) Flujo incompresible permanente

$$\left(\rho = \text{constante}, \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

igual que la Ec. (4.3) para un flujo incompresible, sea o no permanente.

Problema 4.1. Un flujo incompresible permanente, con simetría axial respecto del eje z (Fig. 4.2), está limitado por una superficie sólida (con la misma simetría) cuya forma está definida por la ecuación $z r^2 = b$ (r, radio medido desde el eje z, y b una constante) y tiene un campo de velocidades dado por las componentes en coordenadas cilíndricas: $v_r = a\,r$; $v_\theta = 0$; $v_z = -2\,a\,z$.

a) Demostrar que se satisface la ecuación diferencial de continuidad.

b) Determinar la expresión para el gasto a través de la sección horizontal *A-A* y de la sección cilíndrica *B-B*.

c) Determinar la velocidad en el punto P ($r = z = 1.5$ m) cuando $Q = 10.64$ m³/seg (Ref. 20).

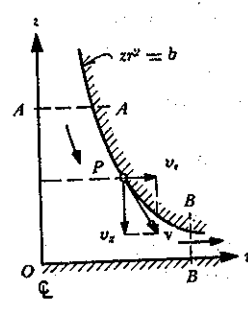


Figura 4.2. Flujo del problema 4.1.

Solución a). El campo de velocidades, definido en coordenadas cilíndricas, equivale a las siguientes expresiones en coordenadas cartesianas

$$v_x = a\,x$$
$$v_y = a\,y$$
$$v_z = -2\,a\,z$$

Resulta entonces que

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = a + a - 2a = 0$$

esto es, se satisface la ecuación de continuidad (4.3) y se verifica que el flujo es incompresible.

Para los restantes puntos conviene más utilizar las coordenadas polares.

Solución b). Para la sección horizontal *A-A*, el gasto es

$$Q = -\int_0^{\sqrt{b/z}} 2\,\pi\, r\,(-2\,a\,z)\, dr$$

$$Q = 4\,\pi\, a\, z \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{b/z}} = 2\,\pi\, a\, b$$

Para la sección cilíndrica *B-B* se tiene:

$$Q = \int_0^{b/r^2} 2\,\pi\, r\,(a\,r)\, dz = 2\,\pi\, a\, r^2\, [z]_0^{b/r^2}$$

$$Q = 2\,\pi\, a\, b$$

c) Para el punto P:

$$b = z\,r^2 = 1.5 \times 2.25 = 3.375\ \text{m}^2$$

y, considerando el valor de Q, se tiene entonces que

$$a = \frac{Q}{2\,\pi\, b} = \frac{10.64}{2 \times 3.1416 \times 3.375} = 0.502\ \text{seg}^{-1}$$

por tanto, la magnitud de la velocidad en el punto P, es:

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_z^2} = a\sqrt{r^2 + 4\,z^2} =$$
$$= 0.502\sqrt{2.25 + 4 \times 2.25}$$
$$v = 1.684\ \text{m/seg}$$

Problema 4.2. Determinar, para los siguientes campos de flujo incompresible, aquellos que satisfagan la ecuación de continuidad e indicar cuáles son rotacionales (típicos de un fluido viscoso) y cuáles irrotacionales (típicos de un fluido no viscoso).

a) $v_x = (x - 2\,y)\,t$; $\quad v_y = -(2\,x + y)\,t$

b) $v_x = x^2 \cos y$; $\quad v_y = -2\,x \operatorname{sen} y$

c) $v_x = x + y$; $\quad v_y = x - y$

d) $v_x = \ln x + y$; $\quad v_y = x\,y - \dfrac{y}{x}$

e) El flujo indicado en el problema 3.2a.

Solución a). En todos los casos la ecuación a satisfacer es la (4.3):

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = t; \qquad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -t$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = t - t = 0$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -2\,t; \qquad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -2\,t$$

$$[\operatorname{rot} \mathbf{v}]_x = 0; \quad [\operatorname{rot} \mathbf{v}]_y = 0; \quad [\operatorname{rot} \mathbf{v}]_z = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

$$[\operatorname{rot} \mathbf{v}]_z = -2\,t + 2\,t = 0$$

El flujo es no permanente, incompresible e irrotacional.

Solución b).

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 2\,x \cos y; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -2\,x \cos y$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -2 \operatorname{sen} y; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -x^2 \operatorname{sen} y$$

$$[\operatorname{rot} \mathbf{v}]_z = (x^2 - 2) \operatorname{sen} y \neq 0$$

El flujo es permanente, incompresible y rotacional.

Solución c).

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -1; \quad \text{div}\,\mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 1; \quad \text{rot}\,\mathbf{v} = 0$$

El flujo es permanente, incompresible e irrotacional.

Solución d).

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = x - \frac{1}{x};$$

$$\text{div}\,\mathbf{v} = x$$

no satisface la ecuación de continuidad, por lo cual no puede existir un flujo incompresible con el campo de velocidades propuesto.

Solución e). En el problema 3.2a se demostró que el flujo es rotacional para el campo de velocidades propuesto. Además:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = A; \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -A; \quad \text{div}\,\mathbf{v} = 0$$

luego, el flujo es permanente, incompresible y rotacional.

4.3.3 Ecuación de continuidad para una vena líquida

La vena líquida mostrada en la Fig. 4.3 está limitada por la superficie 3 (que generalmente coincide con una frontera sólida, o por ésta y una superficie libre) y por las secciones transversales 1 y 2, normales al eje que une los centros de gravedad de todas las secciones. Las velocidades en cada punto de una misma sección transversal poseen un valor medio V, que se considera representativo de toda la sección y de dirección tangencial al eje de la vena.

Se considera el volumen elemental de líquido —mostrado en la Fig. 4.3— limitado lateralmente por la superficie que envuelve a la vena líquida, así como por dos secciones transversales normales al eje de la vena, separadas la distancia ds, donde s representa la coordenada curvilínea siguiendo el eje de la vena.

La cantidad neta de masa que atraviesa la superficie de frontera, del volumen elemental en estudio, es:

$$\left[\rho V A + \frac{\partial(\rho V A)}{\partial s}\,ds\right] - \rho V A = \frac{\partial(\rho V A)}{\partial s}\,ds$$

y, la rapidez con que varía la masa dentro del mismo, es $\partial(\rho A\,ds)/\partial t$. Por tanto, el principio de conservación de la masa establece que

$$\frac{\partial(\rho V A)}{\partial s}\,ds + \frac{\partial}{\partial t}(\rho A\,ds) = 0 \quad (4.4)$$

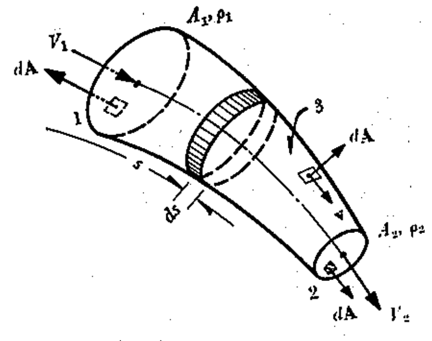


Figura 4.3. Ecuación de continuidad para una vena líquida.

Sin cometer prácticamente error se puede aceptar, en la mayoría de los problemas, que la longitud ds del elemento de volumen considerado, no depende del tiempo. Éste puede salir de la derivada del segundo término de la ecuación anterior y simplificarse con el que aparece en el primero, de lo cual resulta:

$$\frac{\partial(\rho V A)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0 \quad (4.5a)$$

Recordando que ρ, V, A son funciones de s y t, al desarrollar las derivadas parciales indicadas se obtiene:

$$\rho A \frac{\partial V}{\partial s} + \rho V \frac{\partial A}{\partial s} + V A \frac{\partial \rho}{\partial s} + $$

$$+ \rho \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.5b)$$

o bien, con $V = ds/dt$:

$$\rho A \frac{\partial V}{\partial s} + \rho\left(\frac{\partial A}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t}\right) + $$

$$+ A\left(\frac{\partial \rho}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0 \quad (4.5c)$$

Dividiendo la Ec. (4.5c) entre ρA y recordando el desarrollo de la derivada total, resulta entonces:

$$\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{A}\frac{dA}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (4.5d)$$

que es la ecuación de continuidad para una vena líquida donde se produce un flujo no permanente y compresible. Un ejemplo clásico de su aplicación lo constituye el problema de golpe de ariete. En problemas de flujo no permanente a superficie libre (tránsito de ondas de avenida en canales y de mareas en estuarios), donde se considera que el líquido es incompresible, desaparece el último término de la Ec. (4.5d).

Si el escurrimiento es permanente las derivadas con respecto a t que aparecen en la Ec. (4.5a) se eliminan y esta ecuación resulta:

$$\frac{\partial(\rho V A)}{\partial s} = 0 \quad (4.6a)$$

o bien,

$$\rho V A = \text{constante} \quad (4.6b)$$

Si, además, el fluido es incompresible:

$$V A = \text{constante} \quad (4.7a)$$

Esto significa que es constante el gasto que circula por cada sección de la vena líquida en un flujo permanente; o bien, que para dos secciones transversales 1 y 2 de la misma, se cumple lo siguiente:

$$Q = V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (4.7b)$$

Problema 4.3. En la Fig. 4.4 se muestra la bifurcación de un tubo circular que tie-

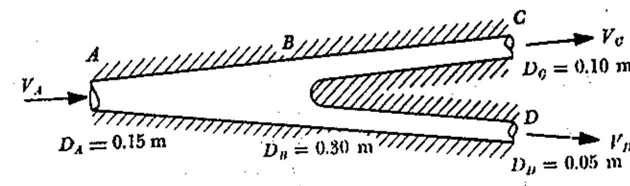


Figura 4.4. Flujo en la bifurcación del problema 4.3.

ne los diámetros indicados. El agua que escurre dentro del tubo, entra en A y sale en C y D. Si la velocidad media en B es de 0.60 m/seg, y en C es de 2.70 m/seg, calcular las velocidades medias en A y D; el gasto total; y el gasto en cada rama de la tubería.

Solución. La ecuación de continuidad (4.7) aplicada a la vena líquida, considerada en la Fig. 4.4, conduce a que:

$$V_A \frac{\pi D_A^2}{4} = V_B \frac{\pi D_B^2}{4}$$

de donde

$$V_A = 0.60\left(\frac{0.30}{0.15}\right)^2 = 2.40 \text{ m/seg}$$

En forma análoga:

$$V_B \frac{\pi D_B^2}{4} = V_C \frac{\pi D_C^2}{4} + V_D \frac{\pi D_D^2}{4}$$

$$V_D = 0.60\left(\frac{0.30}{0.05}\right)^2 - 2.7\left(\frac{0.10}{0.05}\right)^2 = = 21.6 - 10.8 = 10.8 \text{ m/seg}$$

El gasto total es

$$Q = V_A \frac{\pi D_A^2}{4} = V_C \frac{\pi D_C^2}{4} + V_D \frac{\pi D_D^2}{4}$$

$$Q = 2.4 \times 0.785 \times 0.0225 = 0.042 \text{ m}^3\text{/seg}$$

El gasto por el tubo C es entonces:

$$Q_C = V_C \frac{\pi D_C^2}{4} = 2.70 \times 0.785 \times \times 0.01 = 0.021 \text{ m}^3\text{/seg}$$

y, el gasto por el tubo D, el siguiente:

$$Q_D = V_D \frac{\pi D_D^2}{4} = 10.8 \times 0.785 \times \times 0.0025 = 0.021 \text{ m}^3\text{/seg}$$

Esto es, el gasto total vale

$$Q = Q_C + Q_D = 0.021 + 0.021 = = 0.042 \text{ m}^3\text{/seg}$$

que comprueba el resultado anterior.

Problema 4.4 En la contracción del ducto, mostrado en la Fig. 4.5, encontrar la relación que debe existir entre d y s para proporcionar una aceleración uniforme de la sección 1 a la 2. Suponer que el flujo es permanente y unidimensional (Ref. 12).

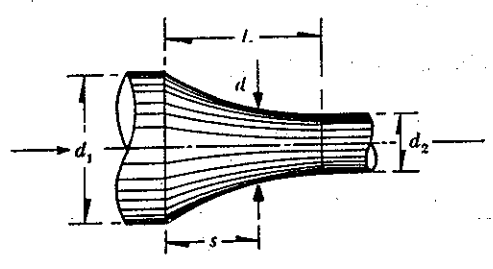


Figura 4.5. Esquema aclaratorio del problema 4.4.

Solución. Considerando que el flujo es unidimensional, las velocidades en cada sección transversal, normal al eje del conducto, quedan representadas por la velocidad media V. La aceleración para flujo permanente es (Ec. 3.5a):

$$a = \frac{d}{ds}\left(\frac{V^2}{2}\right) = C_1$$

y, para ser uniforme a lo largo de la contracción, se requiere que sea constante. Integrando resulta

$$\frac{V^2}{2} = C_1 s + C_2$$

donde C_1 y C_2 son dos constantes que se obtienen de las condiciones de frontera, a saber:

$$\text{para} \quad s = 0; \quad V = V_1; \quad C_2 = \frac{V_1^2}{2}$$

$$\text{para} \quad s = L; \quad V = V_2; \quad C_1 = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2L}$$

Luego:

$$V^2 = (V_2^2 - V_1^2)\frac{s}{L} + V_1^2$$

Por otra parte, de la ecuación de continuidad

$$V = \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 V_1$$

$$V_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 V_1$$

que, substituidas en la ecuación anterior, resulta

$$\frac{d_1^4}{d^4} V_1^2 = \left(\frac{d_1^4}{d_2^4} V_1^2 - V_1^2\right)\frac{s}{L} + V_1^2$$

y, de aquí, la relación buscada es:

$$d = d_1 \sqrt[4]{\frac{1}{(d_1^4/d_2^4 - 1)\frac{s}{L} + 1}}$$

4.4 Ecuación de la energía

4.4.1 Ecuaciones del movimiento

Si no se incluyen los efectos termodinámicos en el flujo ni la adición o extracción de energía mecánica desde el exterior (bomba o turbina), es posible derivar las ecuaciones del movimiento —aplicables al flujo de líquidos— a partir de la segunda ley de Newton. Para ello es necesario considerar las fuerzas que se oponen al movimiento, las cuales desarrollan un trabajo mecánico equivalente a la energía disipada al vencer dichas fuerzas.

Cuando se aplica la segunda ley de Newton a un elemento diferencial de masa de líquido, en la forma $d\mathbf{F} = dm\,\mathbf{a}$, se obtienen las ecuaciones del movimiento —a lo largo de una línea de corriente— para el flujo de un líquido real, no permanente; puede generalizarse para una vena líquida en flujo unidimensional. La derivación de dicha ecuación corresponde a las condiciones particulares del movimiento según el sistema natural de coordenadas explicado en el subcapítulo 3.3 al derivar las componentes de la aceleración dadas por las Ecs. (3.5), con las características del movimiento en la forma ahí explicada.

Para el planteo de las ecuaciones es necesario establecer el equilibrio dinámico de las fuerzas en las direcciones tangencial, normal y binormal, que actúan sobre el elemento líquido (mostrado en las figuras 4.6), con la fuerza de peso como única fuerza de cuerpo. Dicho elemento encierra al punto P, en el cual existen los valores v, p, ρ, τ (velocidad, presión, densidad, esfuerzo de fricción). Las componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento en la dirección $+s$ son las siguientes:

a) La fuerza de superficie resultante de un gradiente de presiones en la dirección del movimiento; para la dirección positiva de la coordenada curvilínea s (Fig. 4.6b) es:

$$\left(p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial s}ds\right)dn\,db - \left(p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial s}ds\right)dn\,db = = -\frac{\partial p}{\partial s}ds\,dn\,db$$

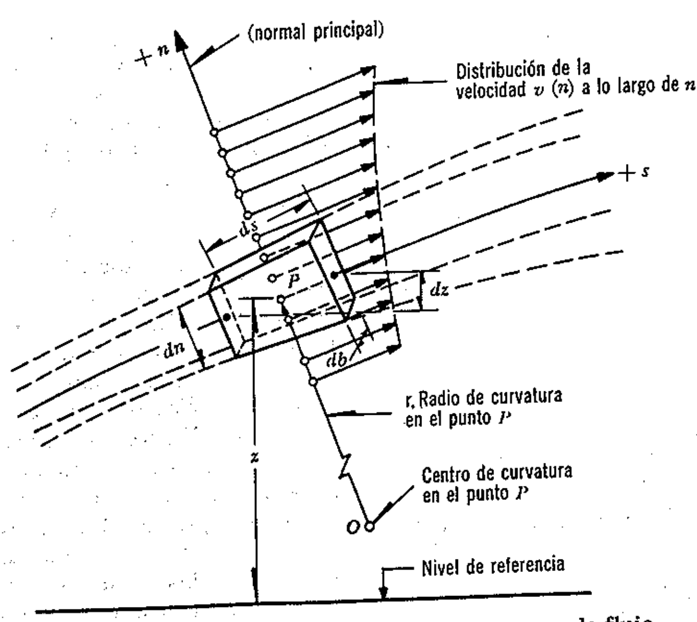


Figura 4.6 a). Elemento de líquido en un campo de flujo.

b) La fuerza de superficie, debida a la resistencia al movimiento, se puede evaluar en términos del esfuerzo tangencial de fricción τ, el cual varía únicamente en la dirección n dado que en la inmediata vecindad del punto P no hay variación de la velocidad en la dirección b. Esta fuerza es:

$$\left(\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial \tau}{\partial n} dn\right) ds\ db -$$

$$\left(\tau - \frac{1}{2}\frac{\partial \tau}{\partial n} dn\right) ds\ db = \frac{\partial \tau}{\partial n} dn\ ds\ db$$

c) La componente de la fuerza de cuerpo, debida al propio peso del elemento. Con $\cos\theta = \partial z/\partial s$, vale:

$$-\rho g\, ds\ dn\ db \cos\theta = -\rho g\, ds\ dn\, db \frac{\partial z}{\partial s}$$

La segunda ley de Newton —aplicada al elemento— establece que la suma de estas fuerzas es igual a la masa del elemento, multiplicada por la componente a_s de la aceleración dada por la Ec. (3.5a). Puesto que en todos los términos que representan fuerzas aparece el volumen del elemento $ds\ dn\ db$, resulta entonces:

$$\left[-\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial n} - \rho g \frac{\partial z}{\partial s}\right] ds\ dn\ db =$$

$$= \rho\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t}\right] ds\ dn\, db$$

Dado que $\rho\ ds\ dn\ db$ representa la masa del elemento, si los términos de la ecuación anterior se dividen entre aquella, cada término representará una fuerza por unidad de masa. Resulta entonces que

NOTA: Las dimensiones del elemento son ds, dn y db, medidas a través de su centro; v, p, ρ y τ, los valores medidos en P.

Figura 4.6 b). Componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento.

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial n} - g\frac{\partial z}{\partial s} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (4.8a)$$

ésta es la primera ecuación diferencial del movimiento. El primer término es debido al gradiente de presiones en la dirección de la línea de corriente; el segundo, la fuerza de resistencia causada por la fricción interna y que induce la disipación de energía; el tercero, la fuerza de peso (todas estas fuerzas son por unidad de masa); finalmente, el cuarto término (segundo miembro) es el cambio de energía cinética (aceleración convectiva) que experimenta la unidad de masa a lo largo de la línea de corriente; y, el último, la aceleración local de la misma.

La Ec. (4.8a) se ha derivado por simplicidad para un elemento de área transversal constante. Sin embargo, el mismo resultado se obtiene si el elemento es divergente (Ref. 12).

En la misma forma se establece el equilibrio dinámico del elemento, ahora en la dirección de la normal principal a la línea de corriente, sobre la cual la componente de la aceleración está dirigida en sentido negativo de n y está expresada por la Ec. (3.5b) y donde, además, no existe fuerza de fricción. Resulta:

$$-\frac{\partial p}{\partial n} dn\ ds\ db - \rho g\, ds\ dn\ db \frac{\partial z}{\partial n} =$$

$$= -\rho\frac{v^2}{r} ds\ dn\ db$$

donde r es el radio local de curvatura de la línea de corriente. Dividiendo entre $\rho\ ds\ dn\ db$, se tiene:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} - g\frac{\partial z}{\partial n} = -\frac{v^2}{r} \quad (4.8b)$$

La Ec. (4.8b) permite determinar la distribución de la presión en la dirección de la normal principal de la línea de corriente, si se conoce la distribución de v sobre la misma. Es válida para el flujo compre-

sible permanente o no permanente y sus diferentes términos representan a las fuerzas por unidad de masa.

En el caso de que la línea de corriente sea de curvatura despreciable ($r = \infty$), el segundo término de la Ec. (4.8b) vale cero.

Finalmente, del equilibrio dinámico según la dirección de la binormal, resultaría:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b} - g\frac{\partial z}{\partial b} = 0 \qquad (4.8c)$$

debido a que $a_b = 0$ Ec. (3.5c). La ecuación (4.8c) es válida para el flujo permanente o no permanente y sus términos también representan a fuerzas por unidad de masa.

Si se trata del flujo de líquidos los efectos térmicos no tienen influencia en ρ y, además, es común que los cambios de p y τ, con la posición del punto, sean más importantes que los que pueda experimentar ρ (aun en golpe de ariete). Por tanto, las Ecs. (4.8) para el flujo de líquidos se pueden escribir en la forma:

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\rho}\right) - g\frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\tau}{\rho}\right) = $$
$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{\partial v}{\partial t} \qquad (4.9a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{p}{\rho}\right) - g\frac{\partial z}{\partial n} = -\frac{v^2}{r} \qquad (4.9b)$$

$$-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{p}{\rho}\right) - g\frac{\partial z}{\partial b} = 0 \qquad (4.9c)$$

Todavía más, considerando las ecuaciones (3.6) y (3.8), la forma vectorial de las ecuaciones del movimiento (4.9a, b, c) es (Ref. 12):

$$-\,\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho} + g\,z\right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\tau}{\rho}\right)\mathbf{s} =$$
$$= \mathrm{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \mathrm{rot}\,\mathbf{v}\times\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \qquad (4.9)$$

4.4.2 Ecuaciones del movimiento sobre una línea de corriente

Es importante el poder efectuar la integración de la Ec. (4.9a) a lo largo de una línea de corriente. Sin embargo, debido al carácter tensorial del esfuerzo de fricción τ, dicha integración es compleja si no se hacen consideraciones simplificatorias.

Puesto que los términos de la Ec. (4.9a) representan fuerzas por unidad de masa, al dividir la misma entre g dichos términos expresarán ahora fuerzas por unidad de peso. Haciendo esta operación con $\gamma = \rho g$, y ordenando, resulta:

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\tau}{\gamma}\right) = \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} \qquad (4.10a)$$

Si, además, los términos de la ecuación anterior se multiplican por ds, los resultantes expresarán los trabajos mecánicos realizados por las fuerzas (por unidad de peso) a lo largo de la línea de corriente, o bien, las energías equivalentes (también por unidad de peso):

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}\right) ds +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\tau}{\gamma}\right) ds = \frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}\, ds \quad (4.10b)$$

La integración de esta ecuación sobre una línea de corriente conduce a que:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} - \int_s \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\tau}{\gamma}\right) ds =$$
$$= C(t) - \frac{1}{g}\int_s \frac{\partial v}{\partial t}\, ds$$

El término $-\int_s \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\tau}{\gamma}\right) ds$ se interpreta como la energía, por unidad de peso, utilizada para vencer las fuerzas de fricción y que se transforma en energía calorífica no aprovechable en el movimiento. Por esta razón se considera una *pérdida de energía* que se designará por h_r. De esta manera, la Ec. (4.10) será:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h_r = C(t) - \frac{1}{g}\int_s \frac{\partial v}{\partial t}\, ds \qquad (4.11)$$

donde $C(t)$ es una constante de integración que es función únicamente del tiempo. Esta es la *ecuación del movimiento para una línea de corriente* en un flujo de un líquido real (rotacional) no permanente; asimismo, relaciona las diferentes transformaciones de la energía por unidad de peso a lo largo de una misma línea de corriente. Su forma diferencial, equivalente a la Ec. (4.10b), es

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h_r\right) = -\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t} \qquad (4.12)$$

La Ec. 4.11 admite las siguientes simplificaciones:

a) Si el flujo es permanente, la integral de la Ec. (4.11) desaparece y $C(t) = C_1$ (constante).

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} + h_r = C_1 \qquad (4.13)$$

b) Si en el flujo, además, no hay fricción, la Ec. (4.13) toma la expresión:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = C_2 \qquad (4.14)$$

que es la *ecuación de Bernoulli* para una línea de corriente.

Por lo que respecta a la componente dada por la Ec. (4.9b), es interesante la integración para el caso en que las líneas de corriente fuesen rectas o de curvatura despreciable, en un flujo permanente. Para este caso, $r = \infty$ o muy grande y dicha ecuación es:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{p}{\rho} + gz\right) = 0$$

Por tanto, la integración en la dirección de la normal a la línea de corriente conduce a:

$$\frac{p}{\gamma} + z = \text{constante} \qquad (4.15)$$

lo cual significa que la presión se distribuye de manera hidrostática en la dirección de la normal principal. Un resultado análogo se obtiene para la componente en la dirección de la binormal.

4.4.3 Ecuación de la energía para una vena líquida

El considerar que los valores de z, ρ, p, h_r y v, sobre una línea de corriente ideal que coincidiera con el eje de una vena líquida, fueran representativos de cada sección, no implicaría un error apreciable y la Ec. (4.12) sería igualmente válida para la vena líquida de la Fig. 4.3. Esta consideración es suficientemente precisa por lo que respecta a los términos que contienen las cuatro primeras magnitudes, pero será menos exacta en lo que se refiere a los que contienen a v. En efecto; al existir una distribución de velocidades en la sección, que además se aparta del valor medio V (Fig. 4.7), se comete un error en el cálculo de dicho valor medio.

Puesto que en las ecuaciones (4.11) y (4.12) el término $v^2/2g$ representa la energía cinética que posee la unidad de peso,

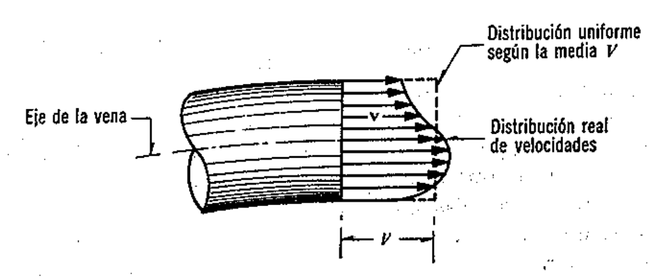


Figura 4.7. Distribución de velocidades en una sección.

la que corresponde al peso del líquido que atraviesa el área dA en la unidad de tiempo será: $\gamma\, v\, dA\, v^2/2g$. En la misma forma, la energía cinética que posee todo el peso del líquido que fluye a través de una sección de la vena líquida, en la unidad de tiempo, es $\gamma V A \alpha V^2/2g$, donde α corrige el error de considerar el valor medio de la velocidad. Se debe entonces satisfacer lo siguiente:

$$\alpha \frac{V^2}{2g} \gamma V A = \iint_A \frac{v^2}{2g} \gamma v\, dA$$

Puesto que γ representa el valor medio del peso específico en toda la sección, resulta que

$$\alpha = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA \qquad (4.16)$$

Por un razonamiento análogo con el último término de la Ec. (4.12), se tiene

$$\beta V \rho V A = \iint_A v \rho v\, dA$$

$$\beta = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA \qquad (4.17)$$

Los coeficientes α y β se conocen como *coeficientes de Coriolis y de Boussinesq*, respectivamente. Con estas correcciones la Ec. (4.12) resulta así:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} + h_r \right) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \beta V}{\partial t} \qquad (4.18)$$

que es la *ecuación diferencial de la energía para una vena líquida*, llamada también *ecuación dinámica*. Si esta ecuación se integra entre dos secciones, 1 y 2 de la vena líquida, se obtiene:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r + \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial(\beta V)}{\partial t} ds \qquad (4.19)$$

es decir, *la ecuación general de la energía para una vena líquida*, donde $\sum_1^2 h_r$ representa la disipación de energía interna del flujo, entre las secciones 1 y 2, que además, incluye la constante de integración $C(t)$.

4.4.4 Interpretación de la ecuación de la energía

Con el objeto de entender mejor las diferentes aplicaciones de la Ec. (4.19), es adecuado hacer una interpretación física de los diferentes términos que intervienen en ella. El análisis de cada uno de sus

términos muestra que corresponden a los de una longitud o *carga*. El término z, medido desde un plano horizontal de referencia, se llama *carga de posición*; p/γ es la *carga de presión*; $\alpha\, V^2/2g$ la *carga de velocidad*; $\sum_1^2 h_r$ la *pérdida de carga* y $\frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial \beta V}{\partial t} ds$ la *carga* correspondiente al cambio local de la velocidad.

La Ec. (4.19) establece las relaciones entre las diferentes transformaciones de la energía mecánica del líquido, por unidad de peso del mismo $[F\,L/F]$. La carga de posición es la *energía potencial*; la carga de presión es la energía correspondiente al *trabajo mecánico ejecutado por las fuerzas debidas a la presión*; la carga de velocidad es la *energía cinética* de toda la vena líquida; la pérdida de carga es la *energía transformada en otro tipo de energía* (transferencia de calor) que, en el caso de los líquidos, no es utilizable en el movimiento; y, finalmente, la carga correspondiente al cambio local de la velocidad es la energía utilizada para efectuar dicho cambio.

a) Si el flujo es permanente, $\frac{\partial \beta V}{\partial t} = 0$ y la Ec. (4.19) se reduce a la expresión:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^2 h_r \qquad (4.20)$$

b) Si, además, no hay pérdida de energía, $\sum_1^2 h_r = 0$ y los coeficientes $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, la Ec. (4.20) adopta la forma llamada *ecuación de Bernoulli para una vena líquida*, esto es:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \qquad (4.21)$$

c) Si $H = z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g}$ representa la energía por unidad de peso que tiene el líquido en una determinada sección, la cual es medida desde el plano horizontal de referencia, la Ec. (4.20) se simplifica así:

$$H_1 = H_2 + \sum_1^2 h_r \qquad (4.22)$$

En una determinada sección la energía de un volumen v del líquido, respecto del plano horizontal de referencia, es:

$$E = \gamma H v$$

y, por definición de energía y potencia, en esa sección esta última vale:

$$P = \frac{dE}{dt} = \gamma H \frac{dv}{dt}$$

Además, por definición de gasto, la *energía del líquido en la unidad de tiempo*, esto es, su *potencia*, vale

$$P = \gamma Q H \qquad (4.23)$$

donde:

- γ peso específico del líquido, en kg/m³;
- H energía total respecto del plano de referencia, en m;
- Q gasto en la sección considerada, en m³/seg;
- P potencia del líquido, en kg m/seg.

Esto es, si se multiplican ambos miembros de la Ec. (4.22) por γQ, para el flujo permanente, esta ecuación se puede también expresar en la forma

$$P_1 = P_2 + \sum_1^2 P_r \qquad (4.24)$$

Una interpretación física de cada uno de los términos de la Ec. (4.19) para una conducción forzada con escurrimiento no permanente, se muestra en la Fig. 4.8, la cual tendría validez para un instante determinado. Con este esquema se pueden hacer las siguientes definiciones.

1. La *línea de energía* une los puntos que indican en cada sección la energía de la corriente.

2. La *línea de cargas piezométricas* o gradiente de cargas de presión, une los puntos que marcan en cada sección la suma de las cargas $z + \frac{p}{\gamma}$ por arriba del plano de referencia.

De acuerdo con estas definiciones la línea de cargas piezométricas está separada de la línea de energía, una distancia vertical $\alpha \frac{V^2}{2g} + \frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial \beta V}{\partial t}\, ds$, correspondiente a cada sección. Al mismo tiempo se pueden hacer las siguientes generalizaciones.

1. La línea de energía no puede ser horizontal o con inclinación ascendente en la dirección del escurrimiento, si el líquido es real y no adquiere energía adicional desde el exterior. La diferencia de nivel de la línea de energía en dos puntos distintos representa la pérdida de carga o disipación de energía por unidad de peso del líquido fluyente.

2. La línea de energía y la de cargas piezométricas coinciden y quedan al nivel de la superficie libre para un volumen de líquido en reposo (por ejemplo, un depósito o un embalse).

3. En el caso de que la línea de cargas piezométricas quede en algún tramo por debajo del eje de la vena líquida, las presiones locales en ese tramo son menores que la presión cero de referencia que se utilice (comúnmente la presión atmosférica).

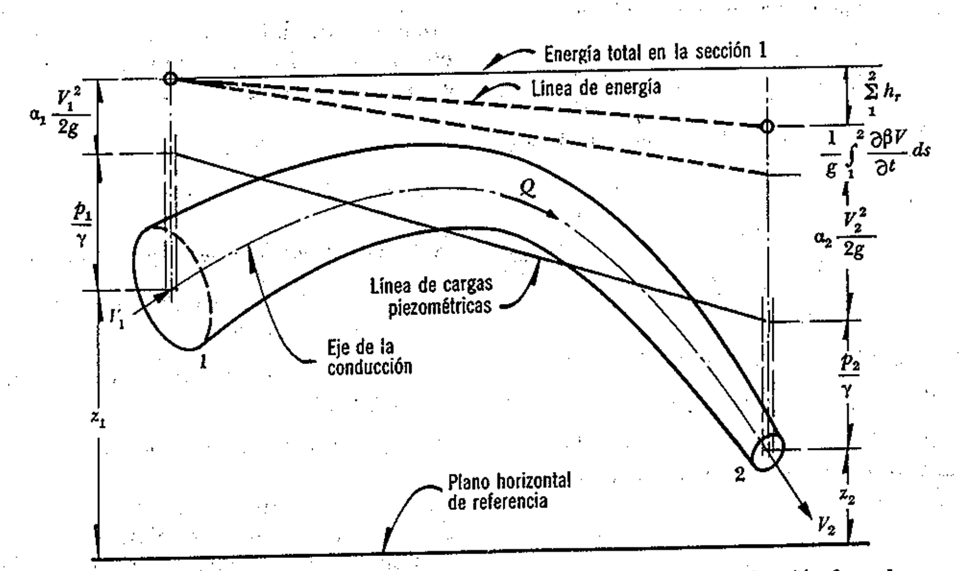


Figura 4.8. Interpretación de la ecuación de la energía para una conducción forzada.

En la Fig. 4.9 se muestra la disposición de las líneas de energía, y de cargas piezométricas, de una instalación hidroeléctrica donde el flujo es permanente; la turbina aprovecha la energía disponible $H_{a,b}$. En la Fig. 4.10 se muestra el mismo esquema, pero en este caso se trata de una instalación de bombeo. Para los dos casos la Ec. (4.19) se escribe como sigue:

$$z_1 = z_2 + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \sum_1^a h_r + \sum_b^2 h_r + H_{a,b} \qquad (4.25)$$

En la instalación hidroeléctrica la turbina queda generalmente muy próxima a la sección 2 y el término $\sum_b^2 h_r$ es despreciable.

Por lo que respecta al término $H_{a,b}$ éste se ha empleado en la Ec. (4.25) como una energía cedida o añadida al flujo y tiene las dimensiones de una longitud. En efecto, por definición de potencia (Ec. 4.23) tenemos que:

$$H_{a,b} = \frac{P}{\gamma Q}$$

es la energía neta por unidad de peso que cede o se transmite al líquido por efecto de la máquina; tiene signo positivo en la Ec. (4.25) cuando el líquido cede energía (turbina) o negativo cuando la recibe (bomba). Aún más, si P_n es la potencia nominal de la máquina y η su eficiencia, entonces

$$H_{a,b} = \frac{P_n}{\eta \gamma Q} \qquad (4.26a)$$

si se trata de una turbina; y

$$H_{a,b} = -\frac{\eta P_n}{\gamma Q} \qquad (4.26b)$$

si es una bomba.

En el caso de una conducción a superficie libre en escurrimiento continuo (figura 4.11), con líneas de corriente de curvatura despreciable y paralelas, es más adecuado medir la carga de posición desde el plano de referencia hasta el punto más bajo de la sección transversal, esto es, hasta la plantilla del canal. La carga de presión coincide con el tirante y de la sección, es decir, con el desnivel entre

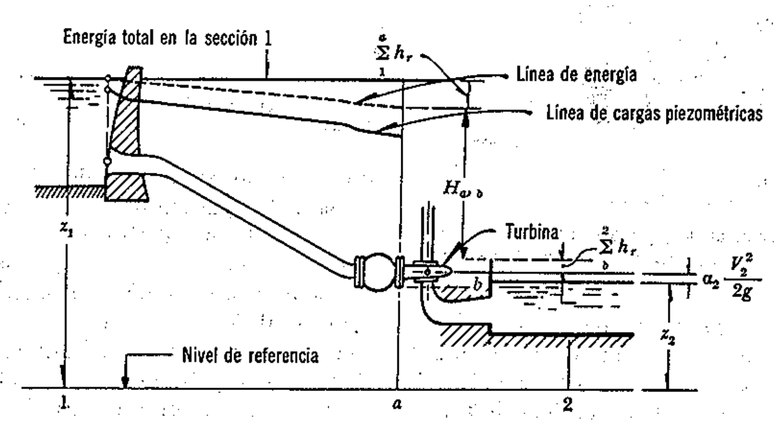


Figura 4.9. Líneas de energía y de cargas piezométricas en una instalación hidroeléctrica.

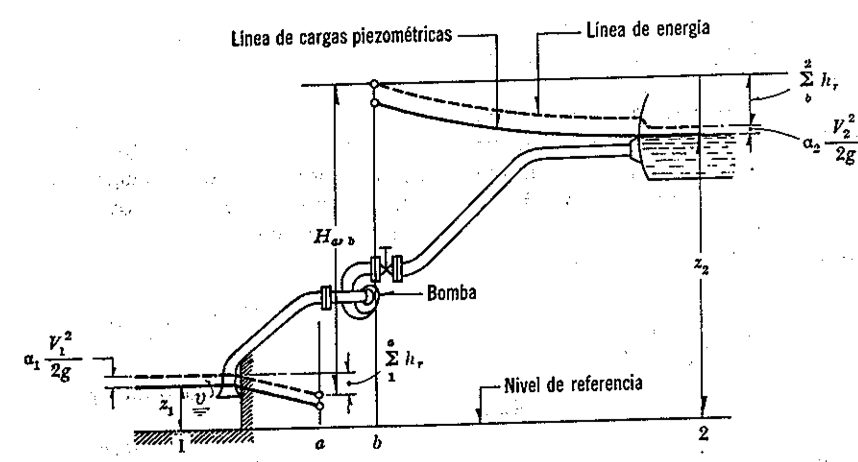


Figura 4.10. Líneas de energía y de cargas piezométricas en una instalación de bombeo.

la superficie libre y la plantilla, siempre que sea pequeño el ángulo θ de inclinación de la plantilla. Esto equivale a considerar que la distribución de presiones es hidrostática y que no existen componentes de la aceleración normales a la dirección del flujo.

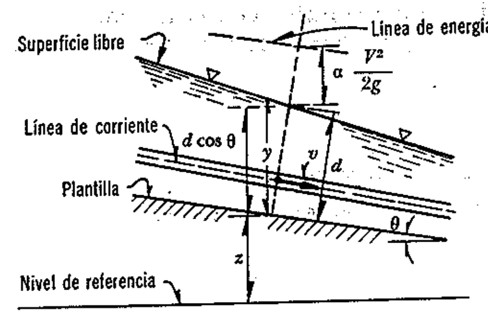


Figura 4.11. Cargas de posición, presión y de velocidad en un escurrimiento a superficie libre.

Finalmente, la carga de velocidad se mide desde el nivel de la superficie libre del agua hasta la línea de energía. En el caso de que sean los ángulos $\theta > 10°$, la carga de presión es distinta y se evalúa como $\frac{p}{\gamma} = d \cos \theta$, en que d es el tirante medido en dirección perpendicular a la plantilla del canal; o bien, siendo $y \cos \theta = d$, $\frac{p}{\gamma} = y \cos^2 \theta$, donde y es el tirante medido verticalmente. De este modo, la suma de las cargas de posición, presión y velocidad es

$$H = z + d \cos \theta + \frac{V^2}{2g} \qquad (4.27a)$$

o bien

$$H = z + y \cos^2 \theta + \frac{V^2}{2g} \qquad (4.27b)$$

donde V representa la velocidad media en la sección perpendicular a la plantilla correspondiente al tirante d.

La pérdida de energía que se produce al escurrir un líquido real puede deberse no sólo al efecto de fricción entre las partículas del líquido y las fronteras que confinan a la vena líquida, sino —además— al efecto de separación o turbulencias inducidas en el movimiento al presentarse obstáculos o cambios bruscos en la geometría. El primer tipo de pérdida se conoce como *pérdida de energía por fricción*; es proporcional a la longitud de recorrido y suele adquirir gran importancia en estructuras largas. El segundo tipo de pérdida se conoce como *pérdida menor* y se concentra en el sitio mismo en que se origina.

4.5 Ecuación de la cantidad de movimiento

La ecuación de la cantidad de movimiento en un cuerpo libre o volumen de control se deriva de la segunda ley de Newton. Se conoce como la cantidad de movimiento de un elemento de masa M al producto de ésta por su velocidad. Por tanto, la segunda ley de Newton establece lo que sigue.

La suma vectorial de todas las fuerzas $\mathbf{F}$ que actúan sobre una masa de fluido es igual a la rapidez del cambio del vector lineal *cantidad de movimiento de la masa de fluido*, es decir:

$$\mathbf{F} = \frac{d(M\mathbf{v})}{dt} \qquad (4.28)$$

Las fuerzas externas son de dos tipos:

a) Fuerzas de superficie que actúan sobre la masa de fluido y, a su vez, pueden ser (subcapítulo 1.2):

Fuerzas $\mathbf{F}_p$, normales a la frontera de la masa, que se pueden evaluar en términos de las intensidades de presión sobre la misma. Conviene aquí observar que la presión comprende, además de la presión estática, la dinámica ejercida por el flujo.

Fuerzas $\mathbf{F}_T$, tangenciales a las fronteras de la masa, que se pueden medir en términos del esfuerzo tangencial sobre la misma.

b) Fuerzas de cuerpo $\mathbf{F}_c$, generalmente las de peso propio.

La masa que fluye en la unidad de tiempo, a través de un elemento de superficie dA de la que encierra al volumen de con-

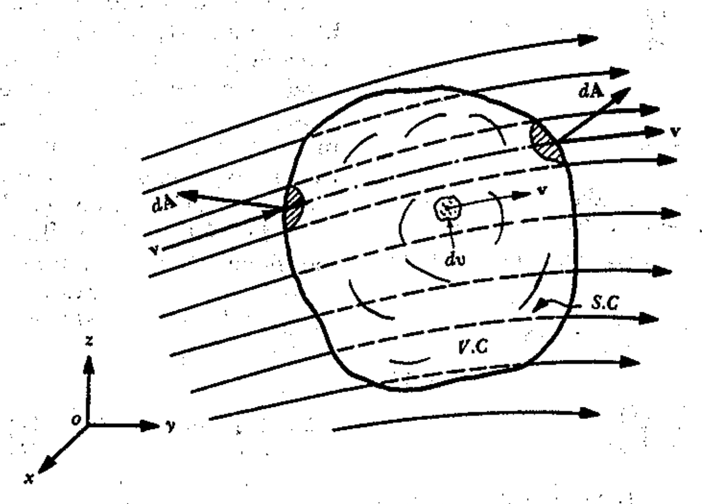


Figura 4.12. Derivación de la ecuación de la cantidad de movimiento para un volumen de control.

trol (mostrado en la Fig. 4.12), es $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$. Se recuerda que la magnitud del vector $d\mathbf{A}$ es igual al área del elemento de superficie; su dirección normal al mismo elemento; y —por convención— positivo si se dirige hacia afuera del volumen. Por tanto, $\rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$ es positivo si el fluido sale del volumen, dado que el producto escalar tendría ese signo, y negativo en caso contrario.

La variación en el tiempo, de la cantidad de movimiento a través del elemento dA, será entonces

$$\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A})$$

En cualquier instante la masa de un elemento diferencial es ρdv, donde la densidad del elemento depende del instante que se considere y de la posición del mismo dentro del volumen de control. La cantidad de movimiento de dicho elemento de volumen será entonces: $\mathbf{v} \rho \, dv$.

El cambio total de la cantidad de movimiento en el tiempo, en todo el volumen de control, será entonces:

$$\frac{d(M\mathbf{v})}{dt} = \iint_{SC} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \mathbf{v} \rho \, dv \tag{4.29}$$

La Ec. (4.29) aplicada al volumen de fluido —de la Fig. 4.12— fijo respecto de un marco de referencia, conduce a que

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_c = \iint_{SC} \mathbf{v} \rho (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \mathbf{v} \rho \, dv \tag{4.30}$$

o sea, la ecuación de la cantidad de movimiento para un volumen de control fijo.

Si en esta ecuación se considera que el flujo ocurre únicamente a través de porciones de la superficie SC, siendo los vectores velocidad aproximadamente normales a la sección (con valores medios para $\mathbf{v}$ y ρ), la primera integral de la Ec. (4.30) para cada porción de la SC, es de la forma siguiente:

$$\iint_A v \rho v \, dA = \iint_A \rho v^2 dA = = \rho V Q \left[\frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{v}{V}\right)^2 dA\right] = \rho V Q \beta$$

donde β es el mismo coeficiente de corrección de la Ec. (4.17). De este modo, la Ec. (4.30) resulta así:

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_c = \Sigma (\rho Q \beta \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \mathbf{v} \rho \, dv \tag{4.31}$$

llamada *ecuación de la cantidad de movimiento*, y es la más general que pueda obtenerse para un volumen de control fijo. El término $\Sigma (\rho Q \beta \mathbf{V})$ corresponde a la suma de las cantidades de movimiento del total de partes de área en que se ha dividido la superficie de control. La última integral representa la variación que en el tiempo experimenta la cantidad de movimiento de la masa contenida en el volumen de control. Si el flujo fuese unidimensional el cuerpo libre estudiado sería como el que se muestra en la Fig. 4.3 y la integral de la Ec. (4.31) se podría calcular como sigue:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} v \rho \, dv = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} v \rho \, dA \, ds = = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \rho \, ds \iint_A v \, dA = \frac{\partial}{\partial t} \int_s \rho Q \, ds$$

y la Ec. (4.31) para el flujo unidimensional sería

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_c = \Sigma (\rho Q \beta \mathbf{V}) + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \rho Q \, ds \tag{4.32}$$

Si el flujo es permanente la integral en las Ecs. (4.31) y (4.32) vale cero. Si además de permanente es incompresible, ρ es constante y la Ec. (4.32) resulta:

$$\mathbf{F}_p + \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_c = \rho \Sigma (Q \beta \mathbf{V}) \tag{4.33}$$

ecuación vectorial que obviamente se puede escribir a través de sus componentes, a saber:

$$F_{px} + F_{Tx} + F_{cx} = \rho \Sigma (Q \beta V_x) \tag{4.33a}$$

$$F_{py} + F_{Ty} + F_{cy} = \rho \Sigma (Q \beta V_y) \tag{4.33b}$$

$$F_{pz} + F_{Tz} + F_{cz} = \rho \Sigma (Q \beta V_z) \tag{4.33c}$$

La Ec. (4.33) será la ecuación de la cantidad de movimiento de mayor aplicación en este libro; para ello conviene observar los siguientes pasos:

a) Se elige el volumen de control con la amplitud que tenga interés en el estudio y se trata como un cuerpo libre; dicho volumen debe estar completamente lleno de líquido.

b) Las fuerzas de superficie $\mathbf{F}_p$ y $\mathbf{F}_T$ se consideran acciones debidas a la presión y esfuerzo cortante, respectivamente, que se aplican desde el exterior hacia el VC (las acciones del líquido sobre sus fronteras son iguales pero de sentido opuesto). Por lo que respecta a las fuerzas de presión éstas pueden ser de tipo estático y dinámico y, en ocasiones, conviene separarlas en la forma:

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{F}_{pe} + \mathbf{F}_{pd}$$

Las fuerzas debidas al esfuerzo cortante se consideran como la acción de la fricción desde la frontera hacia el líquido y, en ocasiones, puede ser difícil evaluarlas.

c) Las fuerzas de cuerpo pueden ser de cualquier tipo pero, en general, serán fuerzas debidas al peso del volumen de control y aplicadas en su centro de gravedad.

d) $\mathbf{V}$ representa el vector velocidad media del gasto Q que atraviesa una cierta porción de la superficie de control; se considera aplicado en el centro de gravedad y en la dirección normal a las porciones de área de la SC. De esta manera, cada producto $Q \beta \mathbf{V}$ que integran el término $\Sigma (Q \beta \mathbf{V})$ de las Ecs. (4.31) ó (4.33) será un vector con la misma dirección que $\mathbf{V}$ y con el sentido que lleva el flujo al pasar sobre la porción de área analizada. Además del signo que les corresponda en la suma, según la dirección y sentido de $\mathbf{V}$, se deberá afectar cada término con un signo: positivo si el gasto sale del volumen de control y negativo en caso contrario. Finalmente, β representa el coeficiente de Boussinesq para corregir el efecto de considerar una velocidad media en lugar de la verdadera distribución de velocidades sobre la porción de área.

4.6 Sobre la aplicación de las ecuaciones de la energía y de la cantidad de movimiento

Las ecuaciones de la energía y de la cantidad de movimiento se aplican de manera diferente y, si se hace correctamente, ellas describirán un flujo con idénticos grados de exactitud. Sus principales diferencias se encuentran en su estructura: mientras la ecuación de la cantidad de movimiento es vectorial y engloba fuerzas totales y condiciones externas —sin tomar

en cuenta los cambios internos de energía— la ecuación de la energía es por el contrario escalar y toma en cuenta los cambios internos de energía y no las fuerzas totales y condiciones externas.

En muchos casos, una de las dos ecuaciones es suficiente para el análisis de un problema; la elección entre ellas depende que sean las fuerzas totales o la energía del flujo la que se necesita en la solución. En otros casos, por el contrario, la naturaleza del problema es tal que resulta necesario usar las dos ecuaciones simultáneamente para estudiar la solución completa.

En general, cualquiera que sea el sistema de ecuaciones por usar, éste se deberá plantear entre secciones finales con condiciones de frontera perfectamente definidas, es decir, entre aquellas secciones de la conducción en las que se conozcan con exactitud los valores de la energía de posición, de presión y de velocidad y, por lo misma, la energía total.

Estas secciones son las siguientes.

a) La superficie libre del líquido, en un recipiente al cual se conecta el conducto.

b) La sección final de un chorro descargado por un chiflón a las condiciones atmosféricas (o dentro de un espacio lleno de gas a presión constante).

c) Secciones intermedias de una conducción a las cuales confluyen o se bifurcan ramales, donde la energía sea común para todas las ramas.

También es conveniente conocer la importancia de los coeficientes de Coriolis y Boussinesq que afectan, tanto a la ecuación de la energía como a la de la cantidad de movimiento. Dada su magnitud, por las Ecs. (4.16) y (4.17) se observa que ésta depende principalmente de la forma que tiene la distribución de velocidades en la sección considerada.

Suponga que la distribución de velocidades en una sección cualquiera de una vena líquida es como la mostrada en la Fig. 4.13, con un valor medio V, de la velocidad. Si se considera que la velocidad en un punto cualquiera de la sección se puede determinar con el valor de la media, más una fracción de la misma, se puede escribir que:

$$v = V + kV = (1 + k)V$$

en que $-1 < k \leqslant 1$, siendo k una función de punto.

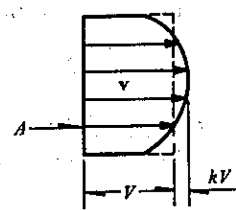


Figura 4.13. Distribución de velocidades en una sección.

Entonces, el coeficiente de Coriolis vale:

$$\alpha = \frac{1}{A}\iint_A \left(\frac{v}{V}\right)^3 dA =$$

$$= \frac{1}{A}\iint_A (1+k)^3\, dA =$$

$$= \frac{1}{A}\iint_A (1 + 3k + 3k^2 + k^3)\, dA$$

o bien,

$$\alpha = 1 + \frac{3}{A}\iint_A k\, dA + \frac{3}{A}\iint_A k^2\, dA + \frac{1}{A}\iint_A k^3\, dA \qquad (4.34)$$

Por otra parte:

$$A = \frac{1}{V}\iint_A v\, dA =$$

$$= \iint_A (1+k)\, dA = A + \iint_A k\, dA$$

Se deduce que la integral $\iint_A k\, dA$ debe valer cero. Además, para $k < 1$, $k^3 \approx 0$; así resulta que

$$\alpha \approx 1 + \frac{3}{A}\iint_A k^2\, dA \qquad (4.35)$$

En la misma forma, β resulta:

$$\beta = \frac{1}{A}\iint_A (1+k)^2\, dA =$$

$$= \frac{1}{A}\iint_A (1 + 2k + k^2)\, dA =$$

$$= 1 + \frac{1}{A}\iint_A k^2\, dA$$

Si se combina esta ecuación con la (4.35), se deduce que

$$\beta \approx 1 + \frac{\alpha - 1}{3} \qquad (4.36)$$

y es suficiente calcular α para conocer de inmediato a β.

Se observa que por ser $k \leqslant 1$, los coeficientes α y β son siempre mayores de 1. En el caso de escurrimientos donde la distribución de velocidades se aproxima a la media (escurrimientos turbulentos), los valores de α y β se aproximan a 1; y en caso contrario (escurrimientos laminares), α y β alcanzan los valores máximos de 2 y 1.33, respectivamente. Sin embargo, en el caso de escurrimientos laminares, la carga de velocidad es pequeña en comparación con las restantes.

La evaluación de los coeficientes α y β requiere, obviamente, el conocimiento previo de la distribución de velocidades en cada sección; en la mayoría de los problemas de hidráulica los escurrimientos son turbulentos y es común considerar que $\alpha \approx \beta \approx 1$. Sin embargo, debe tenerse presente que es posible inducir con ello un error de consideración, sobre todo en aquellos escurrimientos, aun turbulentos, en que existan problemas locales de separación o de otra índole, que modifiquen completamente el perfil de velocidades respecto del uniforme.

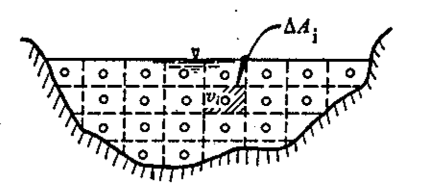


Figura 4.14. Sección transversal de un río.

A menos de ser indispensable, es común suponer que ambos coeficientes valen 1 y que son más importantes otros factores —de índole estimativa— que el error que por este concepto pueda cometerse.

Cuando se conoce por medición directa la magnitud de la velocidad en diferentes puntos de una sección, a cada punto se le considera una área de influencia ΔA_i (Fig. 4.14) y, tanto la magnitud de la velocidad media como la de los coeficientes, se puede determinar por incrementos finitos en la forma aproximada

$$V \approx \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{n} v_i\, \Delta A_i \qquad (4.37)$$

$$\alpha \approx \frac{1}{A V^3}\sum_{i=1}^{n} v_i^3\, \Delta A_i \qquad (4.38)$$

$$\beta \approx \frac{1}{A V^2}\sum_{i=1}^{n} v_i^2\, \Delta A_i \qquad (4.39)$$

donde n es el número de elementos ΔA_i elegidos. Es más, si los incrementos de área ΔA_i, son todos iguales, las ecuaciones anteriores se simplifican a la manera siguiente:

$$V \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i \qquad (4.40)$$

$$\alpha \approx \frac{1}{n V^3} \sum_{i=1}^{n} v_i^3 \qquad (4.41)$$

$$\beta \approx \frac{1}{n V^2} \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \qquad (4.42)$$

4.7 Dispositivos de medición y de aforo

4.7.1 Sondas de presión, tubos de Pitot y de Prandtl

Existe una serie de aparatos y dispositivos para la medición de las características de un flujo, como presión, velocidad, gasto, etcétera, cuyas mediciones se interpretan con base en las ecuaciones fundamentales.

Cuando se desea medir la presión o la velocidad en un punto del interior de un líquido en movimiento, se presenta la dificultad de que la introducción de cualquier aparato, dentro del escurrimiento, produce distorsiones del flujo en el sitio mismo donde se desea efectuar la medición. A pesar de esto, mediante un diseño adecuado del dispositivo, se pueden reducir dichos problemas al mínimo posible.

En el inciso 2.3.1 se mostraron algunos dispositivos para medir los valores medios de la presión en la pared o en una sección del conducto. En el caso de que se desee medir la presión en un punto dentro de un líquido, se utiliza la *sonda de presión* (Fig. 4.15a), que consiste en un tubo doblado en ángulo recto, con orificios de entrada en la rama horizontal corta, localizados a una distancia igual a tres veces el diámetro del tubo a partir del extremo ojival del mismo.

Un tubo doblado, como el de la figura 4.15b, se conoce como *tubo de Pitot*; si el extremo abierto del tubo se coloca en un punto dentro de un líquido en movimiento, en dirección normal a la corriente, la diferencia de niveles Δh entre las ramas verticales de un manómetro de mercurio (o bien directamente de un tubo piezométrico) mide la carga total $\frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$, en el punto considerado.

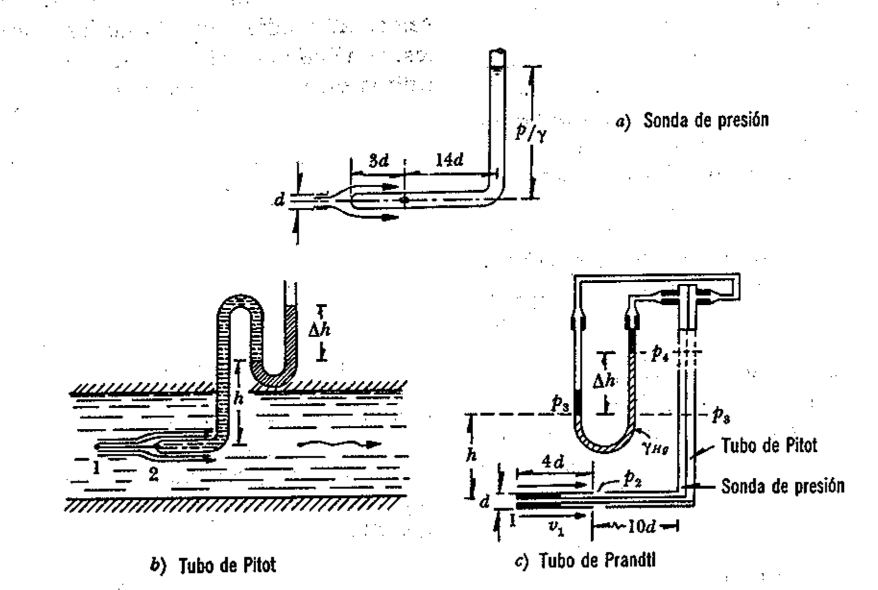


Figura 4.15. Medidores de presión y velocidad.

Debido a que en el punto extremo del tubo (punto 2 de la Fig. 4.15b) el cual se coloca dentro del flujo, corresponde a un punto de estancamiento (velocidad $v_2 = 0$), la carga de presión en dicho punto se puede determinar a partir de la ecuación de Bernoulli aplicada sobre una línea de corriente horizontal, a saber:

$$p_2 = p_1 + \gamma \frac{v_1^2}{2g}$$

Para que se satisfaga el equilibrio estático con el manómetro de mercurio, se debe cumplir:

$$p_2 = \gamma_m \Delta h + \gamma h$$

donde γ_m es el peso específico del líquido en el manómetro.

De esta manera se conoce p_2, midiendo h y Δh, y se puede determinar v_1 si se mide también la presión estática p_1.

Un aparato que permite hacer la medición directa de la velocidad, es el conocido *tubo de Prandtl* (Fig. 4.15c) que combina el funcionamiento de la sonda de presión y del tubo de Pitot, de manera que se puede medir directamente la carga de velocidad $v_1^2/2g$. Para satisfacer el equilibrio estático, entre las columnas del líquido y del manómetro, se debe cumplir con lo siguiente:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + h$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_4}{\gamma} + (h + \Delta h)$$

Pero, además, $p_3 = p_4 + \gamma_m \Delta h$ y por un proceso de eliminación tenemos que:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1\right)\Delta h$$

y con $p_1 = p_2$ se tiene además

$$v_1 = \sqrt{2g\,\Delta h\left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1\right)}$$

Por ejemplo, se desea determinar la velocidad del agua en un punto, mediante un tubo de Prandtl, donde se ha registrado una diferencia de niveles en el manómetro de mercurio ($\gamma_m = 13\,595$ kg/m³), $\Delta h = 8.9$ cm.

De la última ecuación se obtiene

$$v_1 = \sqrt{19.6 \times 0.089\left(\frac{13.595}{1} - 1\right)} =$$

$$= 4.687 \text{ m/seg}$$

4.7.2 Molinete y rotámetro

Otro dispositivo para medir la velocidad del agua en conductos de grandes dimensiones es el molinete hidráulico, que consta de una hélice pequeña conectada a un cuerpo fuselado. Éste, a su vez, queda sujeto a una barra graduada para saber la profundidad del punto en que se desea hacer la medición (Fig. 4.16).

Al producirse la rotación de la hélice el dispositivo eléctrico contenido en el cuerpo fuselado envía una serie de señales: luminosas a una lámpara o acústicas a un audífono.

El molinete se calibra previamente en un canal de aguas tranquilas de manera que se tenga una curva que relacione el número de impulsos registrados, con la velocidad del flujo. Este dispositivo es de gran utilidad para el aforo en conductos forzados de gran diámetro o en corrientes naturales. Del conocimiento de la distribución de velocidades en la sección, se

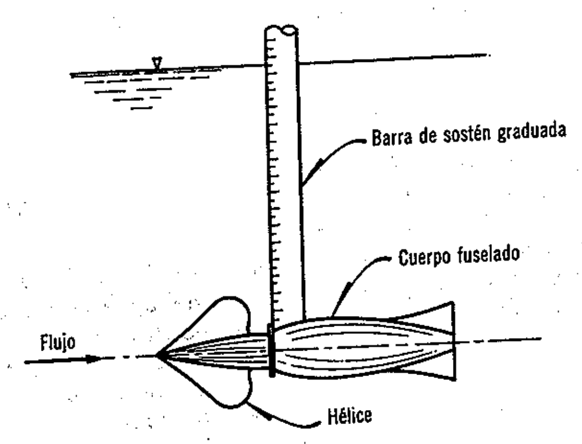


Figura 4.16. Molinete hidráulico.

puede determinar la velocidad media, el gasto, los coeficientes de corrección α y β, etcétera.

Un medidor de lectura directa de la velocidad es el rotámetro, mostrado en la Fig. 4.17. Consiste de un flotador conte-

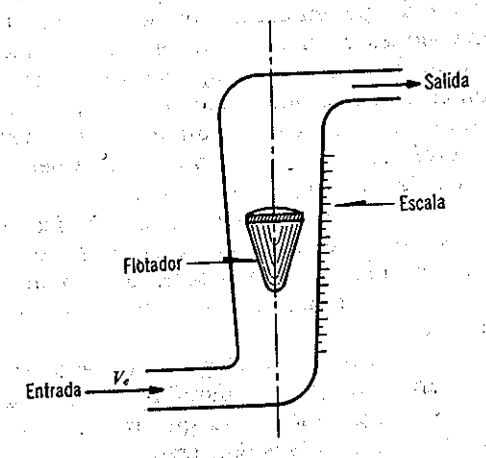


Figura 4.17. Rotámetro.

nido dentro de un tubo transparente, de diámetro variable desde la entrada hasta la salida. Por la ecuación de continuidad, el gasto que entra al tubo es

$$Q = A_e V_e = A V$$

donde A_e es el área del tubo a la entrada; V_e la velocidad del flujo en la misma; A el área variable del tubo transparente; y V la velocidad. La velocidad V del flujo —dentro del tubo— cambiará con el área del mismo al ascender o descender el flotador, estrangulando el área en que se encuentre.

Conocida la geometría del aparato se puede calibrar en la fábrica, de tal manera que sobre una escala graduada se lea directamente el valor de la velocidad V_e. El gasto que sale por el tubo puede regresarse nuevamente a la corriente mediante un segundo tubo paralelo al primero. Para asegurar que el flotador no se adhiera a las paredes del tubo transparente se construye con una serie de muescas que lo hacen girar en presencia del flujo, de modo que su eje se desliza siempre sobre el del tubo transparente.

Existen otros dispositivos de tipo eléctrico o electrónico para medir la velocidad de un flujo. Dentro de ellos se encuentra el anemómetro de placa caliente, de gran sensibilidad y precisión.

4.8 Pérdida debida a una ampliación brusca de sección. Fórmula de Borda-Carnot

La ampliación brusca de la sección en un tubo trae consigo una pérdida de energía por efecto de la separación del líquido de las paredes y la formación de grandes turbulencias, que es de índole diferente a la de fricción. Para calcular la pérdida se usan las tres ecuaciones fundamentales de la hidráulica.

Para la aplicación de las ecuaciones se considera el volumen de control limitado: aguas arriba por la sección 1 dentro ya de la zona de ampliación; aguas abajo por la sección 2 suficientemente alejada de la ampliación donde ya el líquido ha recuperado una distribución uniforme de las velocidades; y lateralmente por la pared del tubo (Fig. 4.18).

En la sección 1 actúa la presión p_1 y la velocidad media del líquido es V_1. La presión total en esta sección está compuesta por la suma de las presiones sobre la superficie central de área A_1 más la correspondiente a la zona de separación. En la sección 2 dominan la presión p_2 y la velocidad V_2.

Considerando una distribución uniforme de velocidades y esfuerzos de fricción cero, de la ecuación del impulso y cantidad de movimiento resulta:

$$p_1 A_2 - p_2 A_2 = \frac{\gamma}{g} Q (V_2 - V_1)$$

o bien

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{1}{g}\frac{Q}{A_2}(V_2 - V_1) = \frac{V_2}{g}(V_2 - V_1) \qquad (4.43)$$

Por otra parte, de la ecuación de energía entre las secciones 1 y 2, se tiene que:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta h_r$$

Podemos escribir que la pérdida de energía vale

$$\Delta h_r = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} \qquad (4.44)$$

Substituyendo la Ec. (4.43) en la (4.44) se obtiene:

$$\Delta h_r = \frac{V_2}{g}(V_2 - V_1) + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$$

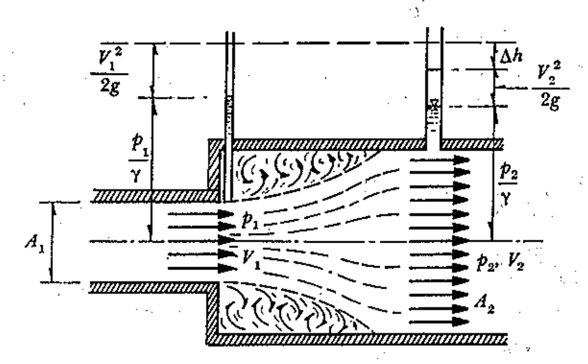


Figura 4.18. Ampliación brusca de la sección.

Al simplificar, la pérdida de energía resulta finalmente:

$$\Delta h_r = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} \qquad (4.45a)$$

Esta ecuación se conoce como *fórmula de Borda*. Del principio de continuidad.

$$V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2$$

y la Ec. (4.45a) se transforma a

$$\Delta h_r = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \frac{V_2^2}{2g} \qquad (4.45b)$$

En aquellos casos en que no existan datos más exactos para calcular una pérdida de energía local, se puede usar la ecuación de Borda para obtener un resultado aproximado. Esto puede hacerse extensivo a los flujos a superficie libre.

Problema 4.5. Considere un flujo laminar bidimensional y permanente, entre dos placas paralelas horizontales (Fig. 4.19), el cual se produce por el movimiento de la placa superior —de velocidad U en la dirección x— con la placa inferior fija y el eje z vertical.

a) Determinar la distribución del esfuerzo tangencial y de velocidades sobre el eje vertical; las velocidades máxima y media; el gasto por unidad de ancho; y los coeficientes α y β, para el caso en que $U = 0$.

Figura 4.19. Flujo laminar entre placas paralelas.

b) Un amortiguador consiste de un cilindro de 7 cm de diámetro, dentro del cual se desliza un émbolo de 8 cm de largo, con un espacio entre ambos de 1 mm. El cilindro está lleno de aceite cuya viscosidad es de 1 poise. Calcular la velocidad del pistón y el gasto del aceite cuando actúa sobre el pistón una fuerza de 18 kg.

Solución a) Para el flujo permanente $\partial v/\partial t = 0$. Por continuidad $\partial v/\partial x = 0$, para cualquier valor de x, siendo $v = f(z)$. Si las placas son horizontales, $\partial z/\partial x = 0$. Con estas consideraciones la Ec. (4.9a), aplicable en este caso, se simplifica en la forma

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$$

Por otra parte, de la Ec. (1.1):

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$$

por lo que

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \qquad (a)$$

Además, puesto que las líneas de corriente son rectas y, por lo mismo, su radio de curvatura es infinito, ya que $\partial z/\partial z = 1$, de la Ec. (4.9b) resulta que

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma}\right) = -1$$

cuya integración da:

$$p = -\gamma z + f(x)$$

Esto significa que la distribución de presiones coincide con la presión hidrostática en la dirección normal al flujo. Por tanto, $\partial p/\partial x$ es independiente de z y puede escribirse como dp/dx.

De este modo, al integrar dos veces la Ec. (a) resulta

$$\frac{dp}{dx}\frac{z^2}{2} = \mu v + C_1 z + C_2$$

Con las condiciones de frontera: para $z = 0$, $v = 0$ y para $z = a$, $v = U$, se obtiene

$$v = \frac{Uz}{a} - \frac{a z}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(1 - \frac{z}{a}\right) \qquad (b)$$

Por definición, la velocidad media es:

$$V = \frac{1}{a}\int_0^a \left[\frac{Uz}{a} - \frac{az}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(1 - \frac{z}{a}\right)\right] dz =$$

$$= \frac{U}{2} - \frac{a^2}{12\mu}\frac{dp}{dx} \qquad (c)$$

y el gasto por unidad de ancho:

$$q = V a = \frac{U a}{2} - \frac{a^3}{12\mu}\frac{dp}{dx} \qquad (d)$$

Si $dp/dx = 0$, el flujo se conoce como flujo de Couette, donde, de acuerdo con la Ec. (b), la ley de distribución de velocidades es lineal: $v = U z/a$, y la velocidad media y el gasto unitario son $V = U/2$ y $q = Ua/2$, respectivamente.

Cuando $dp/dx \neq 0$, pero $U = 0$, se tiene un flujo laminar entre placas fijas conocido como flujo bidimensional de Poiseuille, donde la distribución de velocidades es parabólica de acuerdo con la Ec. (b):

$$v = \frac{a}{2\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)\left(z - \frac{z^2}{a}\right) \qquad (e)$$

La velocidad máxima se presenta para $z = a/2$ y vale

$$v_{máx} = \frac{a^2}{8\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)$$

Por lo cual, la Ec. (e) también se puede expresar así:

$$v = 4\, v_{máx}\left(\frac{z}{a} - \frac{z^2}{a^2}\right) \qquad (f)$$

De las Ecs. (c) y (d) la velocidad media y el gasto por unidad de ancho son

$$V = \frac{a^2}{12\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right) = \frac{2}{3} v_{máx}$$

$$q = \frac{a^3}{12\mu}\left(-\frac{dp}{dx}\right)$$

Para el segundo tipo de flujo, la ley de distribución de velocidades se escribe también en la forma:

$$\frac{v}{V} = 6\left(\frac{z}{a} - \frac{z^2}{a^2}\right)$$

De la Ec. (4.16) el coeficiente α es

$$\alpha = \frac{216}{a}\int_0^a \left(\frac{z}{a} - \frac{z^2}{a^2}\right)^3 dz =$$

$$= \frac{216}{a}\int_0^a \left[\left(\frac{z}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{z}{a}\right)^4 + 3\left(\frac{z}{a}\right)^5 - \left(\frac{z}{a}\right)^6\right] dz$$

Integrando y tomando límites resulta que

$$\alpha = \frac{216}{140} = 1.543$$

En la misma forma, de la Ec. (4.17) se puede calcular β:

$$\beta = \frac{36}{a}\int_0^a\left(\frac{z}{a}-\frac{z^2}{a^2}\right)^2 dz = \frac{6}{5}$$

Solución b) Debido al movimiento, el aceite es forzado a fluir entre las paredes del cilindro y del pistón. El espacio entre ambas paredes es muy pequeño si se compara con el diámetro del pistón, razón por la cual el flujo puede ser tratado como si las superficies fueran paralelas.

La presión sobre la superficie del pistón vale

$$p = \frac{4\,P}{\pi\,d^2} = \frac{4 \times 18\,000}{3.1416 \times 49} = 468 \text{ g/cm}^2$$

y el gradiente de presiones sobre la longitud del pistón de 8 cm es

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{468}{8} = -58.2 \text{ g/cm}^3$$

Suponiendo —inicialmente— despreciable la velocidad U del pistón, con $\mu = 1$ poise $= 0.00102$ g seg/cm², de la Ec. (d) resulta:

$$Q = B\,q = (\pi\,d)\left(-\frac{a^3}{12\mu}\frac{dp}{dx}\right) =$$

$$= 3.1416 \times 7\left(\frac{0.001 \times 58.5}{12 \times 0.00102}\right)$$

$$Q = 105 \text{ cm}^3\text{/seg}$$

La velocidad aproximada del pistón es entonces

$$v_p = U = \frac{Q}{A_p} = \frac{105}{0.785 \times 49} = 2.73 \text{ cm/seg}$$

con este valor de U, de la Ec. (d) el incremento de gasto es:

$$Q = \pi\,d\left(\frac{U\,a}{2}\right) =$$

$$= 3.1416 \times 7\left(\frac{2.73 \times 0.1}{2}\right) =$$

$$Q = 3 \text{ cm}^3\text{/seg}$$

y el gasto total de aceite:

$$Q = 105 + 3 = 108 \text{ cm}^3\text{/seg}$$

Por último, el valor final de la velocidad del pistón será:

$$v_p = U = \frac{108}{0.785 \times 49} = 2.81 \text{ cm/seg}$$

Problema 4.6. Determinar la velocidad media y los coeficientes α y β en un conducto cilíndrico donde se produce: *a)* un escurrimiento laminar cuya distribución de velocidades sigue la ley

$$v = v_{máx}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

b) Un escurrimiento turbulento cuya distribución de velocidades sigue la ley

$$v = v_{máx}\left(1-\frac{r}{R}\right)^{1/7} = v_{máx}\left(\frac{y}{R}\right)^{1/7}$$

En ambos casos $v_{máx}$ es la velocidad en el eje del tubo; R el radio del mismo; y $y = R - r$ la distancia a la pared de los puntos de radio r y velocidad v (Fig. 4.20).

Solución a) La velocidad media es

$$V = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v_{máx}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]2\pi\,r\,dr = \frac{v_{máx}}{2}$$

La ley de distribución de velocidades se escribe en la forma:

$$\frac{v}{V} = 2\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

El coeficiente α:

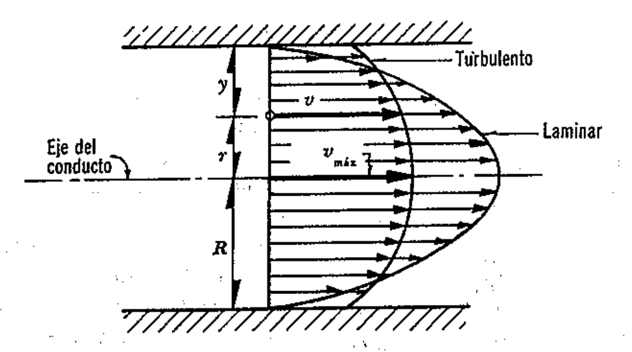


Figura 4.20. Esquema ilustrativo del problema 4.7.

$$\alpha = \frac{8}{\pi R^2}\int_0^R\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3 2\,\pi r\,dr =$$

$$= -8\int_0^R\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^3\left(-\frac{2\,r\,dr}{R^2}\right) = 2$$

De la Ec. (4.36) el valor aproximado de β es

$$\beta = 1 + \frac{2-1}{3} = 1.33$$

Solución b) La velocidad media V, resulta de su definición, a saber:

$$\pi R^2\,V = 2\pi\int_0^R v\,r\,dr$$

donde $r = R - y$, $dr = -dy$. Haciendo caso omiso del signo menos, se tiene que:

$$\pi R^2\,V = 2\pi v_{máx}\int_0^R (R-y)\left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} dy =$$

$$2\pi v_{máx}\int_0^R\left(R^{6/7}\,y^{1/7} - \frac{y^{8/7}}{R^{1/7}}\right)dy$$

resolviendo la integral resulta así:

$$V = \frac{49}{60}\,v_{máx}$$

La ecuación para la distribución de velocidades puede expresarse como

$$\frac{v}{V} = \frac{60}{49}\left(\frac{y}{R}\right)^{1/7}$$

El coeficiente de Coriolis α resulta de la Ec. (4.16):

$$\alpha = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R\left(\frac{60}{49}\right)^3\left(\frac{y}{R}\right)^{3/7} 2\pi\,r\,dr =$$

$$= 2\left(\frac{60}{49}\right)^3\frac{1}{R^2}\int_0^R (R-y)\left(\frac{y}{R}\right)^{3/7} dy$$

$$\alpha = 1.06$$

Esto es, un valor próximo a 1.

De la Ec. (4.36) el valor aproximado de β es

$$\beta = 1 + \frac{1.06-1}{3} = 1.02$$

Problema 4.7. En una sección de una tubería cilíndrica (0.46 m de diámetro) se midieron las velocidades que se anotan en la segunda columna de la tabla que se muestra abajo —contra las relaciones r/R en la primera columna— donde r es el radio del punto en consideración y R el radio de la tubería. Determinar la velocidad media y los coeficientes α y β.

$\left(\frac{r_i}{R}\right)^2$	v_i m/seg	v_i^2	v_i^3
0.05	1.615	2.608	4.212
0.15	1.610	2.592	4.173
0.25	1.605	2.576	4.134
0.35	1.590	2.528	4.020
0.45	1.585	2.512	3.982
0.55	1.560	2.434	3.796
0.65	1.545	2.387	3.688
0.75	1.505	2.265	3.409
0.85	1.420	2.016	2.863
0.95	1.280	1.638	2.097
Total	15.315	23.556	36.374

Solución. Observe en la tabla que iguales incrementos de la relación $(r_i/R)^2$, significan iguales incrementos de áreas ΔA_i; así, es posible la aplicación de las Ecs. (4.40), (4.41) y (4.42).

Con $n = 10$ la velocidad media es

$$V \approx \frac{15.315}{10} = 1.53 \text{ m/seg}$$

Los coeficientes α y β, como sigue:

$$\alpha \approx \frac{36.374}{10 \times 1.53^3} = 1.015$$

$$\beta \approx \frac{23.556}{10 \times 1.53^2} = 1.006$$

De acuerdo con la Ec. (4.36), β sería:

$$\beta = 1 + \frac{1.015 - 1}{3} = 1.005$$

que es prácticamente el mismo valor antes obtenido.

Si el área del tubo es:

$$A = 0.7854 \times 0.46^2 = 0.1662 \text{ m}^2$$

El gasto en la tubería será:

$$Q = V\,A = 1.53 \times 0.1662 = 0.254 \text{ m}^3\text{/seg}$$

Problema 4.8. Una bomba se utiliza para abastecer un chiflón que descarga directamente a las condiciones atmosféricas el agua tomada desde un depósito (como se muestra en la Fig. 4.21); la bomba tiene una eficiencia $\eta = 85\,\%$ y una potencia de 5 H P cuando descarga un gasto de 57 lt/seg. Bajo estas condiciones la presión manométrica leída en el punto 1 es $p_1 = 0.05$ kg/cm². Determinar la línea de energía y la línea de cargas piezométricas, así como también indicar los valores numéricos de las elevaciones de las dos líneas, en lugares apropiados, tomando el valor de $\alpha = 1$ (Ref. 17).

Solución. La velocidad media en la tubería y en el chiflón; y las correspondientes cargas de velocidad son:

$$V_t = \frac{Q}{A} = \frac{0.057}{0.785 \times 0.04} = 1.814 \text{ m/seg};$$

$$\frac{V_t^2}{2g} = \frac{(1.814)^2}{19.6} = 0.168 \text{ m}$$

$$V_c = \frac{0.057}{0.785 \times 0.0225} = 3.226 \text{ m/seg};$$

$$\frac{V_c^2}{2g} = \frac{(3.226)^2}{19.6} = 0.531 \text{ m}$$

Si la lectura de la presión manométrica en el punto 1 es $p_1 = 0.05$ kg/cm², la carga de presión en ese punto (inmediatamente antes de la bomba) es:

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{0.05 \times 10^4}{1\,000} = 0.5 \text{ m}$$

De acuerdo con la Ec. (4.26b) ($1\,HP = 76$ kg m/seg), la bomba incrementa la energía del líquido en la cantidad siguiente:

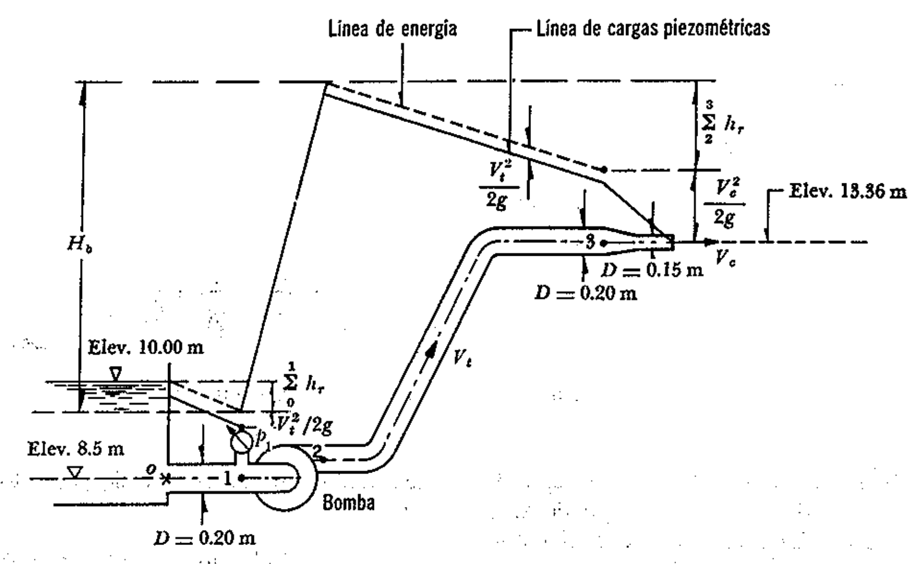


Figura 4.21. Instalación del problema 4.8.

$$H_b = \frac{\eta P \times 76}{\gamma Q} = \frac{0.85 \times 5 \times 76}{1\,000 \times 0.057} = 5.667 \text{ m}$$

La elevación de la línea de energía (E_t) y de cargas piezométricas (E_p) en diferentes puntos del conducto es:

Punto 0, $E_t = 10$ m;
$E_p = 10 - 0.168 = 9.832$ m.

Punto 1, $E_t = 8.5 + 0.5 + 0.168 = 9.168$ m;
$E_p = 9.168 - 0.168 = 9$ m.

Punto 2, $E_t = 9.168 + 5.667 = 14.835$ m;
$E_p = 14.835 - 0.168 = 14.667$ m

Punto 3, $E_t = 13.36 + \frac{V_c^2}{2g} = 13.891$ m;
$E_p = 13.891 - 0.168 = 13.723$ m.

Las pérdidas de energía en cada tramo son:

de 0 a 1, $\sum_0^1 h_r = 10 - 9.168 = 0.832$ m;

de 2 a 3, $\sum_2^3 h_r = 14.835 - 13.891 = 0.944$ m.

Las líneas de energía y de cargas piezométricas se indican en la Fig. 4.21.

Problema 4.9. Dos tanques de agua (figura 4.22) están conectados por una tubería de 1 220 m de longitud y 0.25 m de diámetro. El nivel en el recipiente superior está a 37 m por encima del nivel del tanque inferior. El gasto que transporta la tubería es de 0.128 m³/seg. Determinar: *a*) la pérdida de carga total (energía disponible para ser disipada); *b*) la presión que existe en la sección, a la mitad de la tubería, si dicha sección se encuentra a la misma elevación que el nivel del tanque inferior, siendo que la mitad de la energía disponible se pierde desde el tanque superior hasta dicha sección.

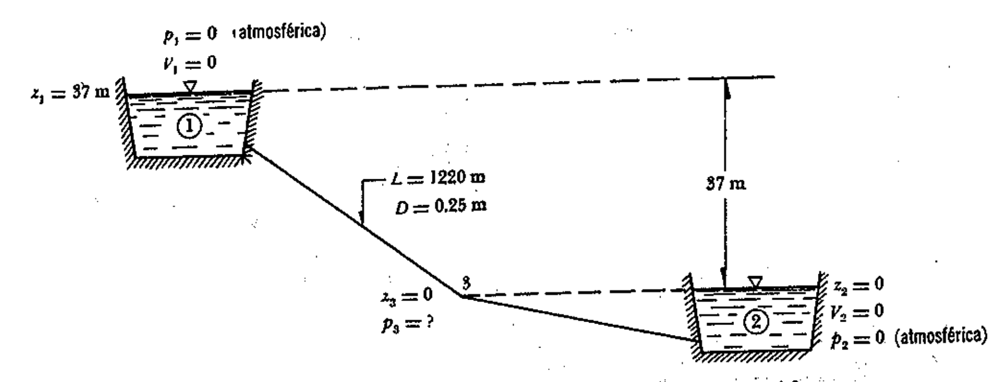


Figura 4.22. Esquema de la instalación del problema 4.9.

Solución a) Considerando que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, la Ec. (4.20) de la energía se puede aplicar entre los tanques 1 y 2, con el plano de referencia coincidiendo con la superficie libre del tanque 2:

$$37 + 0 + 0 = 0 + 0 + 0 + \sum_1^2 h_r$$

$$\sum_1^2 h_r = 37 \text{ m}$$

Esto es, el desnivel total de 37 m se consume en pérdidas de energía.

Solución b) Si el área del tubo es:

$$A = \frac{\pi}{4}(0.25)^2 = 0.0491 \text{ m}^2$$

la velocidad media en el mismo vale

$$V_3 = \frac{0.128}{0.0491} = 2.607 \text{ m/seg}$$

En la misma forma, la Ec. (4.20) aplicada ahora entre el tanque 1 y la sección 3 (con $\Delta h_r = 18.50$ m entre ambos), permite calcular la presión p_3, como sigue:

$$37 + 0 + 0 = 0 + \frac{p_3}{\gamma} + \frac{(2.607)^2}{19.6} + 18.50$$

Efectuando operaciones y despejando p_3, resulta que

$$p_3 = 18\,153 \text{ kg/m}^2 = 1.815 \text{ kg/cm}^2$$

Dicha presión, obviamente, cambia si cambia z_3.

Problema 4.10. *a*) Un chorro de agua es descargado desde un chiflón con un diámetro efectivo $d' = 0.075$ m y una velocidad $V = 23$ m/seg. Calcular la potencia del chorro.

b) Si el chiflón es alimentado por una tubería desde un almacenamiento cuyo nivel se encuentra 30 m arriba del chiflón, calcular la pérdida de energía en la conducción y la eficiencia de la misma (figura 4.23).

Solución a) El gasto descargado por el chiflón vale:

$$Q = \frac{\pi}{4} d^2 V = 0.785\,(0.075)^2 \times 23 =$$

$$= 0.102 \text{ m}^3/\text{seg}$$

y la energía total en la base del chiflón es igual a la carga de velocidad en la boquilla:

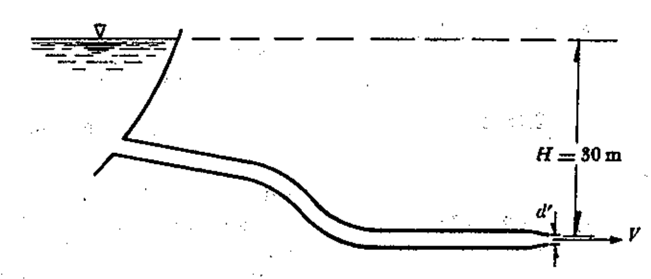


Figura 4.23. Tubería y chiflón.

$$H = \frac{V^2}{2g} = \frac{(23)^2}{19.6} = 27 \text{ m}$$

La potencia del chorro en el chiflón, de acuerdo con la Ec. (4.23), vale

$$P_r = 1\,000 \times 0.102 \times 27 = 2\,754 \text{ kg m/seg}$$

y su equivalente en caballos de vapor es:

$$P_r = \frac{2\,754}{75} = 36.72\, CV$$

Solución b) La potencia teórica que debe proporcionar el sistema, para $H = 30$ m, y el mismo gasto, es

$$P_t = 1\,000 \times 0.102 \times 30 = 3\,060 \text{ kg m/seg}$$

y la eficiencia del sistema es entonces:

$$\eta = \frac{P_r}{P_t} \times 100 = \frac{2\,754}{3\,060}$$

$$\eta = 90\,\%$$

La pérdida de energía es $\Delta h = 30 - 27 = 3$ m.

Problema 4.11. El ancho de un canal rectangular abierto se reduce de 1.80 m a 1.50 m y la plantilla se eleva a 0.30 m de la primera a la segunda sección (Fig. 4.24). El tirante en la primera sección es de 1.20 m y la caída en el nivel de la superficie libre hasta la segunda sección es de 0.08 m. Determinar el gasto Q, de agua en el canal, despreciando las pérdidas de energía.

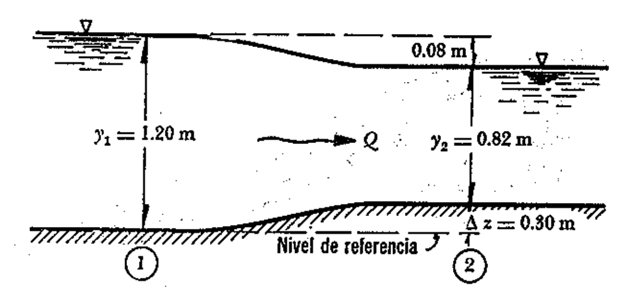


Figura 4.24. Flujo en la contracción de un canal.

Solución. El área hidráulica en las secciones 1 y 2 es:

$$A_1 = 1.20 \times 1.8 = 2.16\ \text{m}^2;$$

$$A_1^2 = 4.666\ \text{m}^4$$

$$A_2 = 1.50 \times 0.82 = 1.23\ \text{m}^2;$$

$$A_2^2 = 1.513\ \text{m}^4$$

De la ecuación de Bernoulli resulta que

$$y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = \Delta z + y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

pero

$$V_1 = \frac{Q}{A_1}; \quad V_2 = \frac{Q}{A_2}$$

entonces

$$y_1 + \frac{Q^2}{2g\,A_1^2} = \Delta z + y_2 + \frac{Q^2}{2g\,A_2^2}$$

Despejando Q

$$Q = \sqrt{\frac{2\,g\,A_2^2\,A_1^2}{A_1^2 - A_2^2}\,(y_1 - \Delta z - y_2)}$$

De acuerdo con los datos

$$Q = \sqrt{\frac{19.6 \times 1.513 \times 4.666}{4.666 - 1.513}\,(1.20 - 0.30 - 0.82)}$$

$$Q = 1.874\ \text{m}^3/\text{seg}$$

Problema 4.12. El agua fluye en un canal rectangular de 3 m de ancho como se muestra en la Fig. 4.25. Sin considerar las pérdidas de energía, calcular el tirante en la sección 2.

Solución. El área hidráulica, la carga de velocidad y el gasto en la sección 1 son:

$$A_1 = 3 \times 1.20 = 3.6\ \text{m}^2$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{4.9^2}{19.6} = 1.23\ \text{m}$$

$$Q = 4.9 \times 3.6 = 17.64\ \text{m}^3/\text{seg}$$

De la ecuación de Bernoulli resulta que

$$z_1 + y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$2.4 + 1.20 + 1.23 = y_2 + \frac{V_2^2}{2g}$$

o bien

$$y_2 + \frac{Q^2}{2g\,(3)^2\,y_2^2} = 4.83\ \text{m}$$

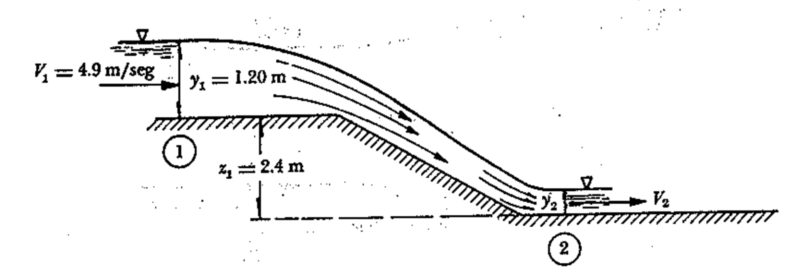


Figura 4.25. Flujo en la caída de un canal.

Con los datos y, ordenados los términos, se obtiene la ecuación

$$y_2^3 - 4.83\,y_2^2 + 1.764 = 0$$

la cual, por la regla de signos de Descartes, posee dos raíces reales; es decir, son los tirantes representados por:

$$y_2 = 0.65\ \text{m}$$

$$y_2 = 4.75\ \text{m}$$

que satisfacen la ecuación. Sin embargo, el valor correcto debe ser $y_2 = 0.65$ m, pues éste es menor que y_1, lo cual ocurre al acelerarse el líquido cuando pasa de la sección 1 a la 2. La explicación de la existencia de dos tirantes se aclarará debidamente en el capítulo 3 correspondiente a la energía específica, en el Vol. 2.

Problema 4.13. Para el chorro de líquido que se muestra en la Fig. 4.26 se desea determinar la ecuación de su trayectoria cayendo libremente. Si se desprecian los efectos viscosos con la atmósfera, el estudio de la forma del chorro se puede hacer con base a la forma de la línea de corriente central.

Solución. Debido a que todo el chorro se encuentra en contacto con la atmósfera, se tiene que $p_1 = p_2$ y la ecuación de Bernoulli (con $h_r = 0$) aplicada entre el punto 1 en la descarga del chiflón y otro arbitrario 2, sobre la misma línea de corriente, es

$$z_1 + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} \qquad \text{(a)}$$

y de esta ecuación

$$V_2^2 = V_1^2 - 2g\,(z_2 - z_1) = V_1^2 - 2\,g\,y \qquad \text{(b)}$$

Además, si x representa la distancia horizontal entre 1 y 2; y la distancia vertical con los subíndices x y y; las componentes de la velocidad media; y θ el ángulo de inclinación en la salida del chorro respecto de la horizontal; entonces para encontrar a y en términos de x y θ se deben usar las leyes de la cinemática. Las relaciones entre las componentes de velocidad en los puntos 1 y 2 están dadas por

$$V_{2_x} = V_{1_x}$$

$$V_{2_y} = V_{1_y} - g\,t$$

Las coordenadas del punto 2 son

$$x = V_{1_x}\,t$$

$$y = V_{1_y}\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2$$

Eliminando a t de las ecuaciones anteriores, se obtiene para y la ecuación del perfil del chorro que es de forma parabólica, a saber:

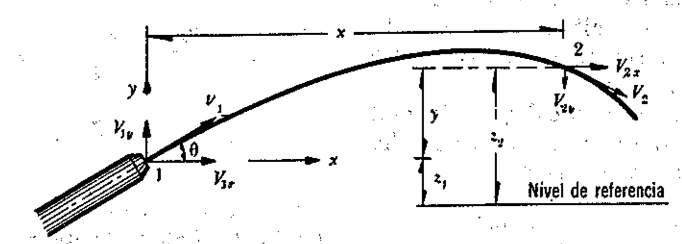


Figura 4.26. Trayectoria de un chorro libre.

$$y = \frac{V_{1_y}}{V_{1_x}}x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{V_{1_x}^2} \qquad \text{(c)}$$

Pero $V_{1_y}/V_{1_x} = \tan\theta$; y $V_{1_x}^2 = V_1^2\cos^2\theta$. De este modo, la substitución de la ecuación anterior en la Ec. (b) conduce a:

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 - 2g\left(x\tan\theta - \frac{g\,x^2}{2\,V_1^2\cos^2\theta}\right)} \qquad \text{(d)}$$

Cuando $\theta = 0$, las dos ecuaciones anteriores se simplifican a la forma siguiente:

$$y = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{V_1^2} \qquad \text{(e)}$$

$$V_2 = \sqrt{V_1^2 + \left(\frac{gx}{V_1}\right)^2}$$

En tales ecuaciones se puede substituir V_1 por Q/A_1. Con ello, estos resultados se utilizan para aforar el gasto descargado por un tubo o un orificio —si se miden directamente las coordenadas del eje del chorro— con la aclaración de que los gastos sólo son aproximados, pues en estos desarrollos no se considera la influencia de la fricción con el aire que puede llegar a ser muy importante.

Por ejemplo, si el chorro de agua (figura 4.26) es descargado por un chiflón con un ángulo de inclinación $\theta = 60°$, a una velocidad $V_1 = 6$ m/seg, calcular la ecuación del chorro y la distancia horizontal requerida para que toque el piso a 0.90 m abajo del chiflón, así como la velocidad del chorro en el punto mismo en que alcanza el piso.

Las componentes vertical y horizontal de la velocidad del chorro, en la boquilla del chiflón, son respectivamente:

$$V_{1_x} = V_1\cos\theta = 6 \times 0.5 = 3 \text{ m/seg}$$

$$V_{1_y} = V_1 \operatorname{sen}\theta = 6 \times 0.866 = 5.196 \text{ m/seg}$$

y, con estos resultados, la ecuación del perfil del chorro es

$$y = \frac{5.196}{3}x - \frac{9.8}{2}\frac{x^2}{9}$$

$$y = 1.732\,x - 0.544\,x^2$$

Para $y = -0.90$ m resulta que

$$x^2 - 3.184\,x - 1.654 = 0$$

La distancia x a la que el chorro toca el piso es

$$x = 1.59 + \sqrt{(1.59)^2 + 1.654} = 3.63 \text{ m}$$

La velocidad del chorro para $x = 3.63$ m; $y = -0.90$ m se puede obtener de la Ec. (b) o de la Ec. (d) (es más sencillo utilizar la primera).

$$V = \sqrt{(6)^2 - 19.6\,(-0.90)} = 7.32 \text{ m/seg}$$

Problema 4.14. La Fig. 4.27 muestra la descarga de un recipiente cuyo nivel permanece constante. El tubo vertical con el cual se efectúa la descarga posee un estrangulamiento a la altura z_e. Determinar las condiciones necesarias para que exista flujo del recipiente R a la tubería.

Solución. De acuerdo con la ecuación de Bernoulli, para el tubo principal la ecuación siguiente vale:

$$z_0 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = z_e + \frac{p_e}{\gamma} + \frac{V_e^2}{2g} = \frac{p_a}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \qquad \text{(a)}$$

donde p_a representa la presión atmosférica del lugar. Esta ecuación se puede también escribir en la forma siguiente:

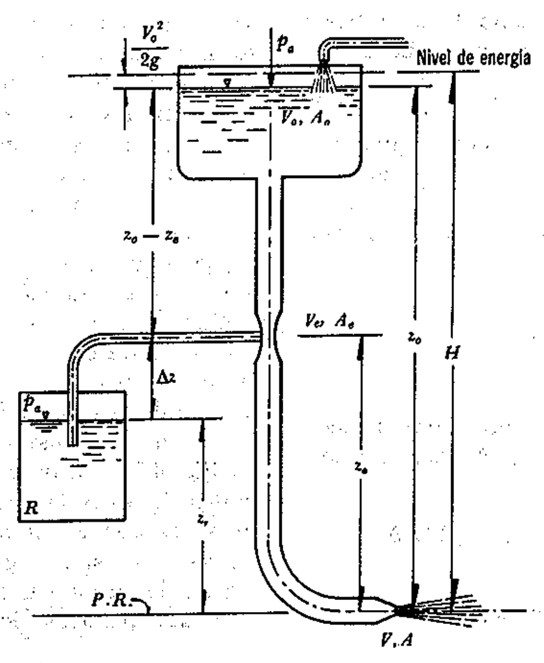


Figura 4.27. Instalación del problema 4.14.

$$\frac{p_a - p_e}{\gamma} = \frac{V_e^2 - V_0^2}{2g} - (z_0 - z_e) \qquad \text{(b)}$$

Por otra parte, de la ecuación de continuidad resulta que

$$V_e = \frac{VA}{A_e}; \qquad V_0 = \frac{VA}{A_0}$$

con lo cual, la Ec. (b) se transforma a

$$\frac{p_a - p_e}{\gamma} = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{A^2}{A_e^2} - \frac{A^2}{A_0^2}\right) - (z_0 - z_e) \qquad \text{(c)}$$

Además, de la Ec. (a) se obtiene

$$H = z_0 + \frac{V_0^2}{2g} = \frac{V^2}{2g}$$

y, por tanto, en la Ec. (c) tenemos:

$$\frac{p_a - p_e}{\gamma} = H\left(\frac{A^2}{A_e^2} - \frac{A^2}{A_0^2}\right) - (z_0 - z_e) \qquad \text{(d)}$$

Puesto que $A_0 > A_e$, entonces $\left(\frac{A^2}{A_e^2} - \frac{A^2}{A_0^2}\right)H > 0$; por tanto, para que $\frac{p_a - p_e}{\gamma} > 0$, es necesario que

$$H\left(\frac{A^2}{A_e^2} - \frac{A^2}{A_0^2}\right) > (z_0 - z_e)$$

El hecho de que $\frac{p_a - p_e}{\gamma} > 0$ significa que $\frac{p_e}{\gamma} < \frac{p_a}{\gamma}$; es decir, que en el estrangulamiento se produce una presión por debajo de la atmosférica. Si en esta sección se conecta un tubo que comuni-

que a otro recipiente lleno de agua, hasta el nivel z_r, se formará un gradiente por efecto de la presión $\frac{p_e}{\gamma} < \frac{p_a}{\gamma}$. El líquido alcanzará la sección estrangulada si la diferencia de cargas de presión $\frac{p_a - p_e}{\gamma}$ es mayor que $\Delta z = z_e - z_r$, o sea se debe cumplir:

$$\frac{p_a - p_e}{\gamma} > \Delta z$$

Si se substituye esta condición en la ecuación (d), despreciando A^2/A_0^2, resulta

$$H\left(\frac{A^2}{A_e^2}\right) - (z_0 - z_e) > \Delta z$$

o bien, debe cumplirse que

$$\frac{A}{A_e} > \sqrt{\frac{\Delta z + (z_0 - z_e)}{H}} \qquad \text{(e)}$$

La ecuación anterior indica la relación que debe haber entre las áreas, para que se produzca succión en el estrangulamiento. Además, la carga de succión máxima Δz queda limitada por el hecho de que las presiones menores que la presión de vaporización (sección 1.7) originan burbujas de vapor de agua que pueden conducir a la separación de la vena líquida de las paredes del tubo. Se puede suponer en la práctica que esto ocurre con valores de cargas de succión entre 7 y 8 m.

Con base en este principio funcionan varios aparatos de uso común, como los atomizadores de líquidos y, dentro del campo de la ingeniería, la llamada bomba eyectora, cuya instalación se presenta en la Fig. 4.28. La bomba se hace funcionar antes de abrir la válvula de descarga y, una vez que en el manómetro de vacío se lee la presión negativa y se alcanza la carga de succión necesaria, se procede a efectuar dicha maniobra.

Problema 4.15. Las pilas de un puente están separadas una distancia, centro a centro, de 6.10 m. Aguas arriba, cerca del puente, el tirante es de 3.05 m y la velocidad media de 3.05 m/seg; y en una sección de aguas abajo, el tirante medido es de 2.90 m. Despreciando la pendiente del cauce del río y las pérdidas de fricción, encontrar el empuje dinámico F_p sobre cada pila (Fig. 4.29).

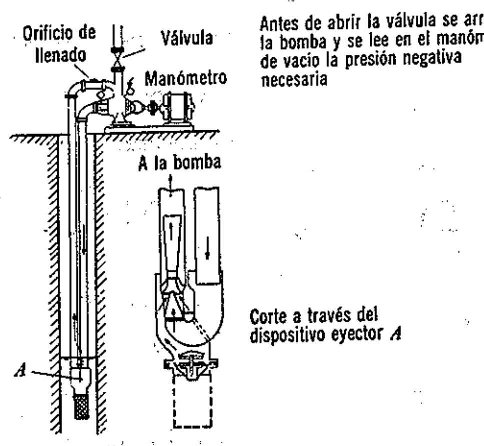


Figura 4.28. Instalación de una bomba eyectora en un pozo.

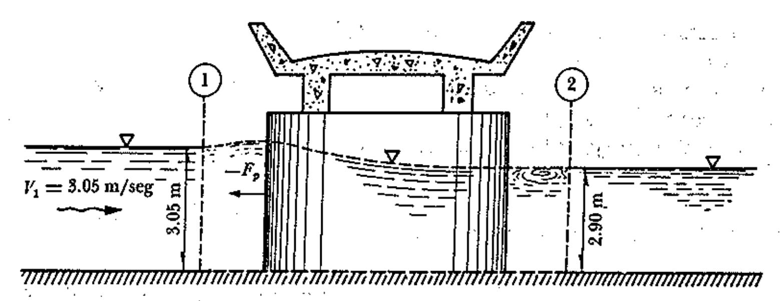


Figura 4.29. Esquema aclaratorio del flujo del problema 4.15.

Solución. Se elige un volumen de control —con ancho de 6.10 m normal a la corriente— y limitado por las secciones 1 y 2 de la Fig. 4.29. El gasto que entra por la sección 1 y sale por la 2 es:

$$Q = 6.1 \times 3.05 \times 3.05 = 56.745 \text{ m}^3/\text{seg}$$

por lo que la velocidad en 2 será:

$$V_2 = \frac{56.745}{6.1 \times 2.9} = 3.208 \text{ m/seg}$$

Suponiendo que en las secciones 1 y 2 la distribución de presiones es hidrostática, de la ecuación de la cantidad de movimiento (4.33) ($F_T = 0$) aplicada en la dirección de la corriente resulta que

$$\frac{\gamma B y_1^2}{2} - \frac{\gamma B y_2^2}{2} - F_p =$$

$$= \frac{\gamma}{g} Q (V_2 - V_1)$$

Substituyendo datos y despejando F_p, resulta entonces:

$$\frac{1000 \times 6.1}{2}(3.05^2 - 2.90^2) - F_p =$$

$$= \frac{1000}{9.8} 56.745 (3.208 - 3.05)$$

$$F_p = 1\,807 \text{ kg}$$

En la ecuación anterior se ha considerado la acción de la pila sobre el agua. El empuje del agua sobre la pila es de la misma magnitud pero en la dirección indicada en la Fig. 4.29.

Problema 4.16. Como se muestra en la Fig. 4.30, los tirantes a una distancia pequeña, aguas arriba y aguas abajo, de una compuerta deslizante que descarga agua a un canal horizontal, son $y_1 = 2.40$ m y

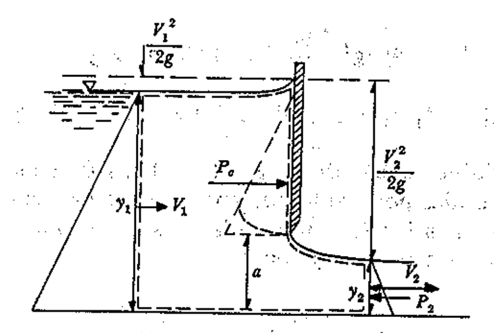


Figura 4.30. Compuerta del problema 4.16.

$y_2 = 0.60$ m. El canal es de sección rectangular de 3.00 m de ancho.

a) Despreciando las pérdidas, calcular el gasto que descarga la compuerta.

b) Determinar el empuje total P_c, sobre la compuerta.

Solución a) De la ecuación de Bernoulli se tiene que:

$$2.40 + \frac{V_1^2}{2g} = 0.60 + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = 1.80$$

De la ecuación de continuidad, por otra parte:

$$3 \times 2.4\, V_1 = 3 \times 0.6\, V_2$$

y entonces

$$\frac{V_2^2}{2g} = 16\,\frac{V_1^2}{2g}$$

Por tanto, con los resultados de ambas ecuaciones, resulta que

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = 15\,\frac{V_1^2}{2g} = 1.80$$

luego entonces

$$V_1 = \sqrt{2g\left(\frac{1.80}{15}\right)} = 1.534 \text{ m/seg}$$

$$Q = A_1 V_1 = 3 \times 2.4 \times 1.534 = 11.04 \text{ m}^3\text{/seg}$$

Solución b) De la Ec. (2.15) las fuerzas totales por unidad de ancho sobre las secciones 1 y 2, debidas a la presión (supuesta hidrostática) son:

$$P_1 = \frac{\gamma\, y_1^2}{2}; \qquad P_2 = \frac{\gamma\, y_2^2}{2}$$

Aplicando la ecuación de la cantidad de movimiento para el volumen de control de ancho unitario limitado por la plantilla del canal, la superficie y las secciones 1 y 2, además con $\beta_1 = \beta_2 = 1$, se obtiene:

$$\gamma\,\frac{y_1^2}{2} - \gamma\,\frac{y_2^2}{2} - P_c = \frac{\gamma q}{g}\,(V_2 - V_1)$$

donde q es el gasto por unidad de anchó; esto es, $V = \dfrac{q}{y}$ y, por tanto, da

$$P_c = \gamma\left(\frac{y_1^2 - y_2^2}{2}\right) - \frac{\gamma\, q^2}{g}\left(\frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1}\right)$$

Substituyendo los datos, con $q = \dfrac{11.04}{3} =$ $= 3.68$ m³/seg/m entonces:

$$P_c = 1\,000\left(\frac{5.76 - 0.36}{2}\right) - $$

$$- \frac{1\,000 \times (3.68)^2}{9.8}\left(\frac{1}{0.60} - \frac{1}{2.40}\right) = 973 \text{ kg}$$

y el empuje total es

$$973 \times 3 = 2\,919 \text{ kg}$$

En el capítulo correspondiente a orificios y compuertas (capítulo 6) se comprueba que para una compuerta deslizante, en función de la abertura el tirante es

$$y_2 = C_c\, a$$

$$a = \frac{y_2}{C_c} = \frac{0.60}{0.611} = 0.98 \text{ m}$$

Suponiendo que la distribución de presiones sobre la compuerta es hidrostática, el empuje total vale

$$P_c = \frac{1\,000\,(2.40 - 0.98)^2}{2} \times 3 = 3\,025 \text{ kg}$$

es decir, mayor que el calculado como fuerza hidrodinámica.

Problema 4.17. Para un chorro de agua incidiendo sobre una placa inclinada un ángulo θ respecto de la dirección del chorro (Fig. 4.31a), se desea conocer la fuerza dinámica ejercida por el chorro contra la placa.

Solución. Para un chorro libre, la presión estática es la misma en todos los puntos de contacto con la placa; de este modo, las velocidades son:

$$V_0 = V_1 = V_2 \qquad \text{(a)}$$

Por otra parte, se desprecia la fricción entre el líquido y la placa, ya que no existen fuerzas paralelas a la misma. Con un volumen de control como el mostrado en la Fig. 4.31a, la fuerza que la placa impone al flujo, en la dirección normal a la misma, se puede determinar de la ecuación de la cantidad de movimiento (4.33), para $\beta = 1$, que es:

$$F = \rho\, Q_0 V_0 \,\text{sen}\,\theta = \frac{\gamma}{g}\, Q_0 V_0 \,\text{sen}\,\theta \qquad \text{(b)}$$

Luego, la fuerza del chorro sobre la placa es igual y de sentido contrario. La fuerza dinámica en la dirección del chorro con $Q_0 = A_0 V_0$, será así:

$$F_x = F\,\text{sen}\,\theta = \frac{\gamma}{g}\, Q_0 V_0 \,\text{sen}^2\,\theta =$$

$$= 2\,\gamma\, A_0 \frac{V_0^2}{2g}\,\text{sen}^2\,\theta \qquad \text{(c)}$$

Se puede calcular la repartición de los gastos Q_1 y Q_2 por la aplicación de la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección tangencial a la placa sobre la cual no existe fuerza de fricción. Esto es:

$$(\rho\, Q_1 V_1 - \rho\, Q_2 V_2) -$$

$$- \rho\, V_0 Q_0 \cos\theta = 0 \qquad \text{(d)}$$

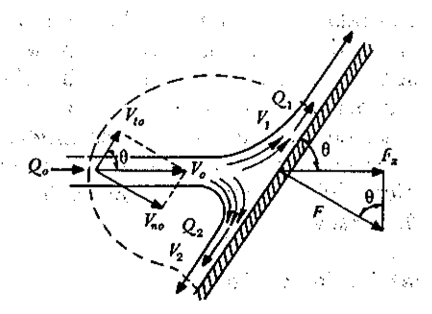
La ecuación de continuidad indica que

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 \qquad \text{(e)}$$

Tomando en consideración las Ecs. (a) y (e) en la (d), resulta que:

$$Q_1 = \frac{Q_0}{2}(1 + \cos\theta) \qquad \text{(f)}$$

$$Q_2 = \frac{Q_0}{2}(1 - \cos\theta) \qquad \text{(g)}$$



a) Incidencia de un chorro contra una placa. *b*) Incidencia de un chorro normal a la placa.

Figura 4.31.

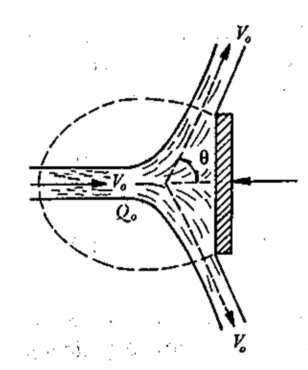


Figura 4.32a. Incidencia de un chorro contra una placa circular.

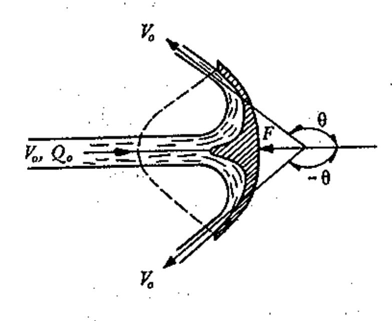


Figura 4.32b. Incidencia de un chorro contra un cangilón.

Si el chorro incide en dirección normal a la placa, $\theta = 90°$ (Fig. 4.31b); de las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$F = F_x = \frac{\gamma}{g} Q_0 V_0 = 2\gamma A_0 \frac{V_0^2}{2g} \quad \text{(h)}$$

$$Q_1 = Q_2 = \frac{Q_0}{2}$$

Si la placa es redonda y pequeña, y el chorro incide normalmente sobre su centro de gravedad, todas las partículas de agua saldrán con el mismo ángulo (figura 4.32a). La fuerza total que la placa le impone al chorro vale

$$F = \frac{\gamma}{g} Q_0 (V_0 - V_0 \cos\theta) =$$

$$= 2\gamma A_0 \frac{V_0^2}{2g}(1 - \cos\theta) \quad \text{(i)}$$

Cuando la desviación se haga a un ángulo $\theta > 90°$, la fuerza dinámica aumenta; es el caso del cangilón de una rueda Pelton (Fig. 4.32b) donde la fuerza F, de la ecuación (i) vale:

$$F = \frac{\gamma}{g} Q_0 V_0 (1 - \cos\theta) =$$

$$= 2\gamma A_0 \frac{V_0^2}{2g}(1 - \cos\theta) \quad \text{(j)}$$

El valor máximo de F se obtiene para $\theta = 180°$, de lo que resulta:

$$F = 2\frac{\gamma}{g} Q_0 V_0 = 4\gamma A_0 \frac{V_0^2}{2g} \quad \text{(k)}$$

Esto es, lo doble de la fuerza para el chorro normal a la placa (Ec. h).

Los valores de F, obtenidos con estas ecuaciones, apenas difieren de los medidos experimentalmente. Las diferencias, según Reich, son del orden de 4 a 6% (Ref. 9).

Por ejemplo, se desea calcular la fuerza ejercida por un chorro de agua con velocidad de 30 m/seg y un gasto de 1.3 m³/seg, sobre una placa, con un ángulo de incidencia $\theta = 60°$. Determine la fuerza:

a) cuando la placa no se mueve;

b) cuando la placa se mueve en la dirección del chorro con una velocidad de 15 m/seg.

a) De la Ec. (b)

$$F = \frac{1\,000}{9.8} \times 1.3 \times 30 \times \text{sen}\, 60° = 3\,446 \text{ kg}$$

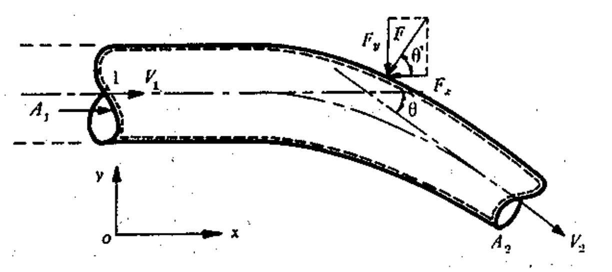


Figura 4.33. Fuerzas en un cambio de dirección y de sección.

De las Ecs. (f) y (g) el gasto se reparte en la forma siguiente:

$$Q_1 = \frac{1.3}{2}(1 + \cos 60°) = 0.975 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_2 = \frac{1.3}{2}(1 - \cos 60°) = 0.325 \text{ m}^3/\text{seg}$$

b) Al desplazarse la placa con velocidad de 15 m/seg, la velocidad efectiva de impacto es

$$V = 30 - 15 = 15 \text{ m/seg}$$

La fuerza normal es entonces:

$$F = \frac{15}{30} \times 3\,446 = 1\,723 \text{ kg}$$

Problema 4.18. El cambio en la cantidad de movimiento, de un líquido que se mueve dentro de un tubo, induce fuerzas sobre el mismo. En el caso del tramo de tubería mostrado en la Fig. 4.33, el líquido llega con velocidad V_1 a través del área A_1 y sale con velocidad V_2 a través del área A_2, después de cambiar de dirección según el ángulo θ. Se desea determinar la fuerza F impuesta por el tubo al líquido, para modificar las características del movimiento; así como F_x y F_y, sus componentes en las direcciones x y y indicadas.

Solución. Se pueden aplicar las ecuaciones (4.33a y b) para determinar la magnitud de la fuerza F. Considerando despreciable el peso propio del volumen de control, las fuerzas de superficie que obran sobre él son los empujes totales en las secciones (1) y (2), además de la fuerza F repartida sobre la superficie lateral. Así, para la dirección x, se tiene que:

$$-F_x + p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta =$$
$$= \rho Q (V_2 \cos\theta - V_1) \quad \text{(a)}$$

y para la dirección y, será:

$$-F_y + p_2 A_2 \,\text{sen}\,\theta = \rho Q(-V_2 \,\text{sen}\,\theta + 0) \quad \text{(b)}$$

Entonces, la resultante F es:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \Big\{\rho^2 Q^2 \big(V_1^2 + V_2^2 - 2 V_1 V_2 \cos\theta\big) + p_1^2 A_1^2 + p_2^2 A_2^2 - 2 p_1 p_2 A_1 A_2 \cos\theta + 2\rho Q \big[p_1 V_1 A_1 + p_2 V_2 A_2 - (p_2 V_1 A_2 + p_1 V_2 A_1)\cos\theta\big]\Big\}^{1/2} \quad \text{(c)}$$

Pero, de la ecuación de continuidad, resulta:

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1$$

que al substituirla en la Ec. (c) se obtiene

$$F = \left\{ \rho^2 Q^2 V_1^2 \left(1 - 2\frac{A_1}{A_2}\cos\theta + \frac{A_1^2}{A_2^2}\right) + 2\rho Q^2\left[p_1 + p_2 - \left(p_1\frac{A_1}{A_2} + p_2\frac{A_2}{A_1}\right)\cos\theta\right] + p_1^2 A_1^2\left[1 + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\cos\theta\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (d)$$

Asimismo, se puede determinar la dirección de F en términos de F_x y F_y.

Si el tubo es de sección constante, entonces $A_1 = A_2$ y la Ec. (d) se reduce a:

$$F = \left\{ 2\rho Q^2 (1 - \cos\theta)(\rho V_1^2 + p_1 + p_2) + p_1^2 A_1^2\left[1 + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 - 2\frac{p_2}{p_1}\cos\theta\right]\right\}^{1/2} \qquad (e)$$

y si, además, $\theta = 90°$, la fuerza para un tubo de área constante es

$$F = \left\{ 2\rho Q^2 (\rho V_1^2 + p_1 + p_2) + p_1^2 A_1^2\left[1 + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2\right]\right\}^{1/2} \qquad (f)$$

Cuando existe contracción en el tubo ($A_1 \neq A_2$) pero éste es de eje recto ($\theta = 0$), la Ec. (d) se reduce a la forma:

$$F = \left\{ \rho^2 Q^2 V_1^2 \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 + 2\rho Q^2\left[p_1 + p_2 - \left(p_1\frac{A_1}{A_2} + p_2\frac{A_2}{A_1}\right)\right] + p_1^2 A_1^2\left(1 - \frac{p_2 A_2}{p_1 A_1}\right)^2\right\}^{1/2} \qquad (g)$$

La fuerza que el líquido impone al tubo es igual y de sentido contrario a F, por lo cual es de mucha importancia en el análisis estructural de los apoyos de un conducto a presión.

Por ejemplo, el tramo de tubería de la Fig. 4.33 está contenida en un plano vertical, de diámetros $D_1 = 1.83$ m, $D_2 = 1.22$ m; el gasto $Q = 8.5$ m³/seg; el ángulo $\theta = 120°$; y la presión $p_1 = 2.72$ kg/cm². La pérdida de carga en el codo es $0.5\, V_2^2/2g$ y el desnivel entre las secciones 1 y 2 es de 3 m. Determinar la fuerza total impuesta por el líquido a la tubería, considerando despreciable el peso.

Las velocidades en las secciones 1 y 2 son:

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{8.5}{\frac{\pi}{4}(1.83)^2} = \frac{8.5}{2.63} = 3.232 \text{ m/seg}$$

$$V_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{8.5}{\frac{\pi}{4}(1.22)^2} = \frac{8.5}{1.17} = 7.272 \text{ m/seg}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli, entre las secciones 1 y 2, resulta que

$$3 + \frac{2.72 \times 10^4}{1\,000} + \frac{(3.23)^2}{19.6} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{(7.27)^2}{19.6} + 0.5\frac{(7.27)^2}{19.6}$$

$$3 + 27.2 + 0.533 = \frac{p_2}{\gamma} + 2.702 + 1.356$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = 26.68 \text{ m}$$

$$p_2 = 2.668 \times 10^4 \text{ kg/m}^2 = 2.668 \text{ kg/cm}^2$$

De las Ecs. (a) y (b), para $\cos 120° = -0.5$ y $\operatorname{sen} 120° = 0.867$, se tiene:

$$F_x = p_1 A_1 - p_2 A_2 \cos\theta - \rho Q (V_2\cos\theta - V_1)$$

$$F_x = 2.72 \times 10^4 \times 2.63 + 2.668 \times 10^4 \times 1.17 \times 0.5 + \frac{1\,000}{9.8} \times 8.5 \times (7.277 \times 0.5 + 3.23)$$

$$F_x = 93\,101 \text{ kg}$$

$$F_y = p_2 A_2 \operatorname{sen}\theta + \rho Q V_2 \operatorname{sen}\theta = 2.668\,(10^4)\,(1.17)\,(0.867) + \frac{1\,000}{9.8}\,(8.5)\,(7.27)\,(0.867)$$

$$F_y = 32\,531 \text{ kg}$$

La fuerza total, que también puede ser calculada directamente de la Ec. (d), vale

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(93\,101)^2 + (32\,531)^2} = 98\,621 \text{ kg}$$

El ángulo de inclinación de F, respecto de la fuerza F_y, es:

$$\theta' = \text{áng tan}\frac{F_y}{F_x} = \text{áng tan}\frac{32\,531}{93\,101} = 19° 16'$$

Su punto de aplicación se encuentra en el cruce de las líneas que representan el eje de la tubería, antes y después de las secciones 1 y 2.

Problema 4.19. Calcular la fuerza dinámica del agua sobre el chiflón mostrado en la Fig. 4.34, cuando la presión manométrica, en la sección 1, es 2.07 kg/cm². Se desprecian las pérdidas de carga en el chiflón.

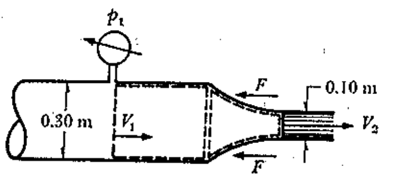


Figura 4.34. Empuje dinámico sobre el chiflón del problema 4.19.

Solución. De la ecuación de Bernoulli, entre las secciones 1 y 2 colocadas al mismo nivel y con descarga a las condiciones atmosféricas, resulta:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}$$

Por otra parte, de la ecuación de continuidad se tiene:

$$V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1 = \frac{\frac{\pi}{4}(0.30)^2}{\frac{\pi}{4}(0.10)^2} V_1 = \frac{0.0708}{0.00785} V_1$$

$$V_2 = 9\, V_1$$

Substituyendo, en la ecuación de Bernoulli, nos da:

$$\frac{V_1^2}{2g}(81 - 1) = \frac{2.07 \times 10^4}{1\,000} = 20.7$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 20.7}{80}} = 2.25 \text{ m/seg}$$

$$V_2 = 9 \times 2.25 = 20.25 \text{ m/seg}$$

y el gasto será

$$Q = 0.0708 \times 2.25 = 0.159 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Para calcular F se puede aplicar la Ec. (a) del problema 4.18, haciendo $p_2 = 0$ (por ser la descarga a la atmósfera) y $\theta = 0$.

$$-F = \rho Q (V_2 - V_1) - p_1 A_1 = \frac{1\,000}{9.8} \times$$

$$\times 0.159\,(20.25 - 2.25) - 2.07 \times 10^4 \times$$

$$\times 0.0708$$

$$F = 1\,173.5 \text{ kg}$$

Problema 4.20. Calcular la fuerza dinámica del agua al fluir en la bifurcación (Fig. 4.35), la cual está contenida en un plano horizontal. Despreciar las pérdidas de carga.

Solución. Las áreas en las tres secciones son:

$$A_1 = \frac{\pi}{4}(0.46)^2 = 0.1662 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4}(0.15)^2 = 0.01767 \text{ m}^2$$

$$A_3 = \frac{\pi}{4}(0.30)^2 = 0.0707 \text{ m}^2$$

las velocidades respectivas, las siguientes:

$$V_1 = \frac{0.567}{0.1662} = 3.41 \text{ m/seg}$$

$$V_2 = \frac{0.226}{0.01767} = 12.79 \text{ m/seg}$$

$$V_3 = \frac{0.341}{0.0707} = 4.82 \text{ m/seg}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli, entre las secciones 1 y 2, resulta que

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

$$p_2 = p_1 + \gamma\left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}\right) = 1.7 \times 10^4 +$$

$$+ 10^3\left[\frac{(3.41)^2 - (12.79)^2}{19.6}\right]$$

$$p_2 = 0.925 \times 10^4 \text{ kg/m}^2$$

Con la ecuación de Bernoulli, entre las secciones 1 y 3, se obtiene p_3

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{V_3^2}{2g}$$

$$p_3 = p_1 + \gamma\left(\frac{V_1^2 - V_3^2}{2g}\right) = 1.7 \times 10^4 +$$

$$+ 10^3\left[\frac{(3.41)^2 - (4.82)^2}{19.6}\right]$$

$$p_3 = 1.641 \times 10^4 \text{ kg/m}^2$$

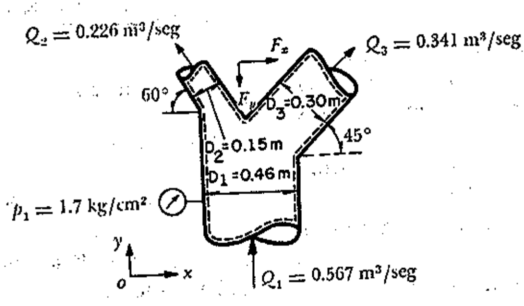


Figura 4.35. Bifurcación referente al problema 4.20.

Proyectando las fuerzas según el eje x y considerando el cambio de cantidad de movimiento, se obtiene:

$$F_x = \frac{\gamma}{g}(-Q_2 V_2 \cos 60° + Q_3 V_3 \cos 45°) -$$

$$-(p_2 A_2 \cos 60° - p_3 A_3 \cos 45°)$$

Substituyendo valores, resulta:

$$F_x = \frac{10^3}{9.8}[-0.226 \times 12.79\,(0.5) +$$

$$+ 0.341 \times 4.82\,(0.707)] -$$

$$-[0.925 \times 10^4\,(0.01767)\,0.5 -$$

$$- 1.641 \times 10^4\,(0.0707)\,0.707]$$

Por tanto:

$$F_x = 708.6 \text{ kg}$$

Análogamente, proyectando las fuerzas según el eje y, además de considerar el cambio en cantidad de movimiento, se tiene:

$$F_y = \frac{\gamma}{g}[-Q_2 V_2 \operatorname{sen} 60° -$$

$$- Q_3 V_3 \operatorname{sen} 45° - (-Q_1 V_1)] -$$

$$-(-p_1 A_1 + p_2 A_2 \operatorname{sen} 60° +$$

$$+ p_3 A_3 \operatorname{sen} 45°)$$

Substituyendo valores, se obtiene lo siguiente:

$$F_y = \frac{10^3}{9.8}[-0.226 \times 12.79\,(0.866) -$$

$$- 0.341 \times 4.82\,(0.707) + 0.567 \times$$

$$\times 3.41] - [-1.7 \times 10^4\,(0.1662) +$$

$$+ 0.925 \times 10^4\,(0.01767)\,0.866 +$$

$$+ 1.641 \times 10^4\,(0.0707)\,0.707]$$

De donde

$$F_y = 1687 \text{ kg}$$

La fuerza dinámica total es:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$F = 1830 \text{ kg}$$

Problema 4.21. En la instalación de gran velocidad, mostrada en la Fig. 4.36, calcular el momento flexionante en los puntos A y B, así como la presión que debe existir en B si se desprecian las pérdidas de carga. Determinar, también, la potencia de la bomba si su eficiencia es del 80 %.

Solución. El área de la boquilla del chiflón y de la tubería son, respectivamente:

$$A_o = 0.25 \times 0.07 = 0.0175 \text{ m}^2$$

$$A_t = \frac{\pi}{4}(0.30)^2 = 0.07068 \text{ m}^2$$

El gasto es

$$Q = 40 \times 0.0175 = 0.700 \text{ m}^3\text{/seg}$$

y la velocidad media en la tubería:

$$V_t = \frac{0.700}{0.07068} = 9.90 \text{ m/seg}$$

También, las cargas de velocidad son

$$\frac{V_o^2}{2g} = \frac{(40)^2}{19.6} = 81.63 \text{ m}$$

$$\frac{V_t^2}{2g} = \frac{(9.90)^2}{19.6} = 5 \text{ m}$$

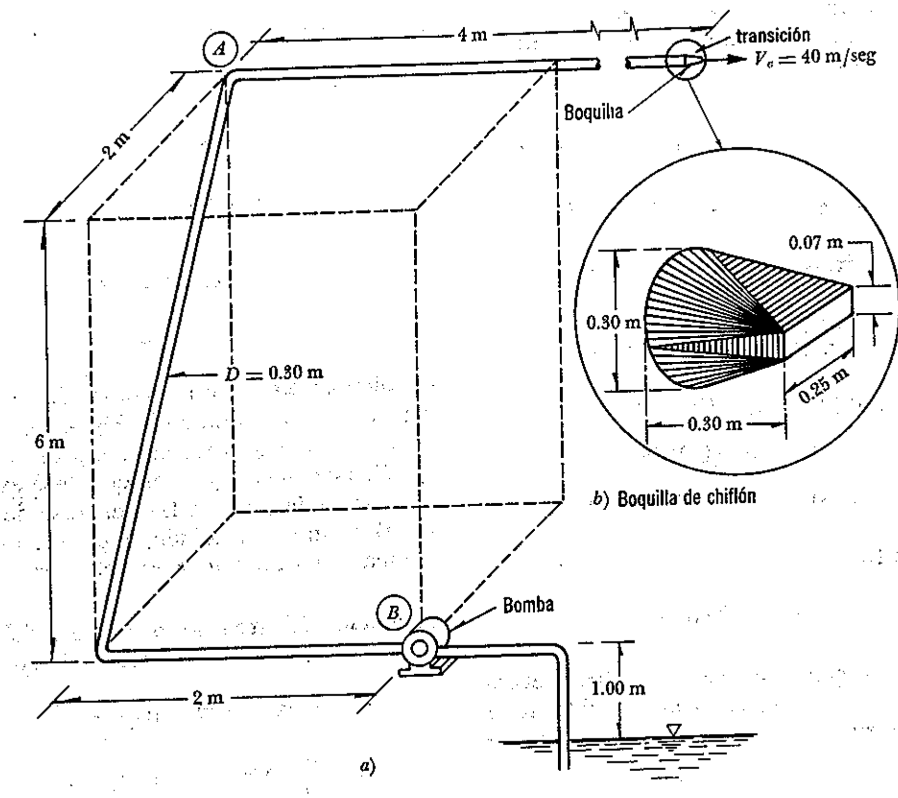


Figura 4.36. Instalación del problema 4.21.

La presión en la sección, antes del chiflón, se calcula como sigue:

$$\frac{p_o}{\gamma} + \frac{V_t^2}{2g} = \frac{V_o^2}{2g}$$

$$\frac{p_o}{\gamma} = \frac{V_o^2}{2g} - \frac{V_t^2}{2g} = 81.63 - 5.0 = 76.63 \text{ m}$$

$$p_o = 76630 \text{ kg/m}^2 = 7.66 \text{ kg/cm}^2$$

que es la misma en el punto A, ya que se han despreciado las pérdidas. En la misma forma, la carga de presión en B es:

$$\frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_t^2}{2g} = 6 + \frac{V_o^2}{2g}$$

$$\frac{p_B}{\gamma} = 76.63 + 6 = 82.63 \text{ m}$$

$$p_B = 82630 \text{ kg/m}^2 = 8.26 \text{ kg/cm}^2$$

que es la misma en todo el tramo horizontal de la tubería, que coincide con B.

La carga que debe vencer la bomba es:

$$H_B = \frac{p_B}{\gamma} + \frac{V_t^2}{2g} + 1 = 82.63 +$$

$$+ 5 + 1 = 88.63 \text{ m}$$

así, la potencia de la bomba será entonces:

$$P = \frac{\gamma Q H_B}{75 \eta} = \frac{1\,000 \times 0.700 \times 88.63}{75 \times 0.8} =$$

$$= 1034 \text{ CV}$$

La fuerza que el agua impone a la tubería en el chiflón se calcula de la ecuación de la cantidad de movimiento, como sigue:

$$p_o A_t - F = \frac{\gamma Q}{g}(V_o - V_t)$$

$$-F = \frac{\gamma Q}{g}(V_o - V_t) - p_o A_t$$

$$-F = \frac{1\,000 \times 0.700}{9.8}(40 - 9.90) -$$

$$- 76630 \times 0.07065$$

$$F = 3264 \text{ kg}$$

Debido a que la dirección de esta fuerza coincide con la del tubo, además de que la fuerza debida al cambio de dirección pasa por el punto A, el momento flexionante en A vale cero.

El cálculo de las fuerzas en los cambios de dirección conviene hacerlo, en términos de sus componentes, en las direcciones de las ramas de la tubería y de acuerdo con la nomenclatura indicada en la Fig. 4.37 para el punto A.

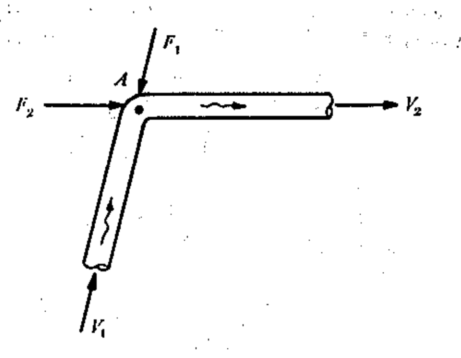


Figura 4.37.

Las constantes $\gamma Q/g$ y pA_t valen:

$$\frac{\gamma Q}{g} = \frac{1\,000 \times 0.700}{9.8} = 71.43$$

$$pA_t = 76\,630 \times 0.07068 = 5\,414 \text{ kg}$$

Así, de la ecuación de la cantidad de movimiento

$$5\,414 - F_1 = -71.43 \times 9.91$$

$$F_1 = 6\,121.9 \text{ kg}$$

$$F_2 - 5\,414 = 71.43 \times 9.91$$

$$F_2 = 6\,121.9 \text{ kg}$$

Para el otro cambio de dirección, en forma análoga se tiene que

$$pA_t = 82\,630 \times 0.07068 = 5\,840.3 \text{ kg}$$

$$F_1 = F_2 = 5\,840.3 \text{ kg}$$

Puesto que las acciones del agua sobre la tubería son de sentido contrario, el momento flexionante en B es:

$$M_B = -3\,264 \times 6.33 + 6\,122 \times 6.33 +$$

$$+ 5\,840 \times 2 - 6\,122 \times 2$$

$$M_B = 17\,327 \text{ kg m}$$

Problema 4.22. El empuje D en la dirección del flujo sobre una pila cilíndrica de diámetro d, construida en un canal de ancho a donde el flujo tiene una velocidad uniforme v_0 en la sección 1-2, se puede determinar indirectamente midiendo la distribución de velocidades en una sección 2-4, aguas abajo y próxima a la pila, tal como se muestra en la Fig. 4.38. La energía (sin considerar pérdidas) se supone constante al pasar de la sección 1-3 a la 2-4.

a) Determinar la magnitud de ese empu-

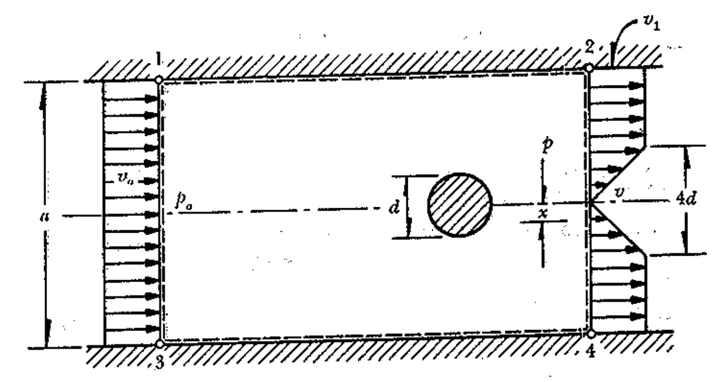


Figura 4.38. Flujo del problema 4.22.

je D sobre la pila por unidad de longitud de la misma, atendiendo a las modificaciones que sufre la distribución de velocidades.

b) Definido el coeficiente de arrastre por la ecuación:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho v_0^2 d}$$

calcular su magnitud en términos de d/a y el valor que tendría si $d/a \to 0$.

Solución a) De acuerdo con la ecuación de continuidad se debe satisfacer que

$$v_0 a = v_1 (a - 4d) + 2 v_1 d$$

$$v_1 = \frac{v_0}{1 - \frac{2d}{a}}$$

Obviamente, la velocidad media en las secciones 1-3 y 2-4 debe ser la misma, es decir:

$$V = v_0$$

y el gasto por unidad de profundidad: $v_0 a$.

Para la sección 1-3 la presión media es p_0 y los coeficientes $\alpha = \beta = 1$, por tener una distribución uniforme de velocidades. Para la sección 2-4 la presión media es p y los coeficientes α y β, distintos de uno, por lo cual es necesario calcular su valor. Para la zona central la velocidad se distribuye según la ley lineal siguiente:

$$v = \frac{v_0 x}{2d\left(1 - \frac{2d}{a}\right)}$$

y para las zonas laterales es constante, es decir, de valor: $v = \dfrac{v_0}{1 - \frac{2d}{a}}$.

Resulta más sencillo calcular primero β, a partir de la Ec. (4.17), como veremos:

$$\beta = \frac{2}{a}\left\{\int_0^{2d}\left[\frac{v_0 x}{2 v_0 d\left(1 - \frac{2d}{a}\right)}\right]^2 dx + \right.$$

$$\left. + \int_{2d}^{a/2}\left[\frac{v_0}{v_0\left(1 - \frac{2d}{a}\right)}\right]^2 dx \right\}$$

$$\beta = \frac{2}{a\left(1 - \frac{2d}{a}\right)^2}\left[\frac{1}{4d^2}\int_0^{2d} x^2\,dx + \int_{2d}^{a/2} dx\right]$$

Efectuada la integración con los límites señalados, resulta entonces que

$$\beta = \frac{3 - 8\frac{d}{a}}{3\left(1 - \frac{2d}{a}\right)^2}$$

y de la Ec. (4.36), un valor aproximado para α es:

$$\alpha = 3\beta - 2$$

Usando la ecuación de la energía (con $\Sigma h_r = 0$), aplicada entre las dos ecuaciones, se tiene a

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} + \alpha\frac{v_0^2}{2g}$$

y de aquí:

$$p = p_0 + \rho\frac{v_0^2}{2}(1 - \alpha)$$

Finalmente, de la ecuación de la cantidad de movimiento, aplicada en la dirección del flujo y al mismo VC, se tiene lo siguiente:

$$p_0 a - p a - D = \rho v_0 a (\beta v_0 - v_0)$$

substituyendo el valor de p, calculado anteriormente, resulta

$$p_0 a - p_0 a - \rho\frac{v_0^2}{2} a (1 - \alpha) - D =$$
$$= \rho v_0^2 a (\beta - 1)$$

o bien

$$-D = \rho v_0^2 a\left(\beta - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\right)$$

y con $\alpha = 3\beta - 2$, se obtiene

$$-D = \rho v_0^2 a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta\right)$$

Substituyendo ahora β, calculado anteriormente, y haciendo las simplificaciones necesarias, se tiene finalmente el empuje:

$$D = \frac{2}{3}\rho v_0^2 d\left[\frac{1 - 3\frac{d}{a}}{\left(1 - \frac{2d}{a}\right)^2}\right]$$

Solución b) De acuerdo con la definición indicada para el coeficiente de arrastre, éste vale

$$C_D = \frac{4}{3}\left[\frac{1 - 3\frac{d}{a}}{\left(1 - \frac{2d}{a}\right)^2}\right]$$

Si $d/a \to 0$, esto es, si el ancho a es muy grande, entonces

$$C_D \to \frac{4}{3}$$

$$D \to \frac{2}{3}\rho v_0^2 d$$

Conviene comparar estos valores con los obtenidos experimentalmente, para un número de Reynolds comprendido entre 10^4 y 10^5 en el subcapítulo 11.4. Observe que en este problema ha sido necesario utilizar las tres ecuaciones fundamentales para un volumen finito de control.

Problema 4.23. El rociador mostrado en la Fig. 4.39 suministra agua que es descargada tangencialmente desde los chiflones, en los extremos opuestos de un brazo cuya longitud es de $2R = 0.60$ m y gira alrededor de su centro. La velocidad relativa de descarga V en el chiflón es de 6 m/seg

y el diámetro de cada chiflón es de 13 mm. *a*) Calcular el par motor producido cuando el brazo es estacionario y la magnitud de la fuerza *F*, necesaria para mantener esta condición. *b*) Encontrar una expresión para el trabajo realizado por segundo y la eficiencia del dispositivo cuando se permite que el brazo gire con velocidad periférica *u*. *c*) Si la velocidad relativa de descarga del chiflón se mantiene en 6 m/seg, calcular el valor de *u* para desarrollar la potencia máxima; así como determinar el trabajo realizado por segundo y, además, la eficiencia bajo estas condiciones.

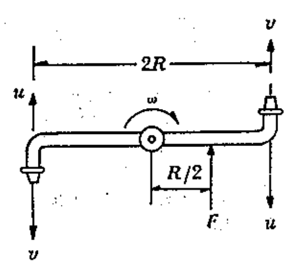


Figura 4.39. Rociador que ilustra el problema 4.23.

Solución a) De la ecuación de la cantidad de movimiento, la fuerza dinámica que impulsa a cada chiflón es

$$f = \frac{\gamma Q}{g}(v - 0)$$

Siendo a el área de cada chiflón y $Q = va$ el gasto descargado por el mismo, la fuerza será:

$$f = \frac{\gamma a v^2}{g} = \frac{1000 \times \pi (0.013)^2 \times (6)^2}{9.8 \times 4}$$

$$f = 0.488 \text{ kg}$$

Por lo cual, el par motor es

$$T = 2fR = 0.488 \times 0.6 = 0.292 \text{ kg m}$$

La fuerza *F* es entonces

$$F = \frac{T}{R/2} = \frac{0.292}{0.15} = 1.952 \text{ kg}$$

Solución b) Cuando el brazo tiene una velocidad periférica *u*, la velocidad absoluta del chorro es *v-u*; la fuerza debida a la reacción del chorro vale entonces:

$$f = \frac{\gamma a v}{g}(v - u)$$

El trabajo —por segundo— de un chiflón es

$$\frac{W}{2} = \frac{\gamma a v}{g}(v - u)u$$

y dos veces para los dos chiflones.

Siendo $(v - u)$ la velocidad absoluta de los chorros, existe una energía cinética —por segundo— que se pierde por la velocidad con que descargan los chorros. Dicha energía vale:

$$E_o = 2\frac{\gamma a v}{g}\frac{(v - u)^2}{2}$$

La energía total abastecida en cada segundo al rociador es entonces:

$$E_T = W + E_o = \frac{2\gamma a v}{g}[(v - u)u + \tfrac{1}{2}(v - u)^2]$$

$$E_T = \frac{2\gamma a v}{g}\left(\frac{v^2 - u^2}{2}\right)$$

Luego, la eficiencia vale

$$\eta = \frac{W}{E_T} = \frac{\frac{2\gamma a v}{g}(v - u)u}{\frac{2\gamma a v}{g}\left(\frac{v^2 - u^2}{2}\right)} = \frac{2u}{v + u}$$

Solución c) Asimismo, la potencia es:

$$P = \frac{2\gamma a v}{g}(v - u)u$$

Para un valor dado de *v*, la potencia será un máximo para aquel valor de *u* que haga máximo a $(v - u)u$. Derivando e igualando a cero, tenemos que

$$\frac{d}{du}[(v - u)u] = v - 2u = 0$$

y para la potencia máxima: $u = v/2 = 3$ m/seg, que vale:

$$P = \frac{2\gamma a v}{g}(v - u)u = \frac{2 \times 1000 \times \pi (0.013)^2 \times 6}{9.8 \times 4}(6 - 3)3$$

$$W = 1.463 \text{ kg m/seg}$$

Asimismo, la eficiencia máxima es

$$\eta = \frac{2u}{v + u} = \frac{2u}{3u} = 0.667$$

esto es; aproximadamente, el 66.7 %.

Problema 4.24. Determinar la ley que relaciona la oscilación *z* con el tiempo, en el tubo en forma de *U* —mostrado en la Fig. 4.40— cuya sección transversal es constante, si el movimiento se inicia cuando $z = z_{máx}$ y se desprecia la fricción del líquido.

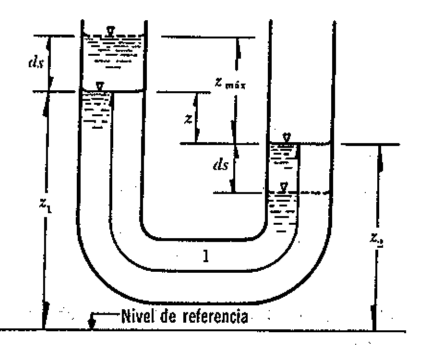


Figura 4.40. Oscilaciones en un tubo *U*.

Solución. El problema corresponde a un flujo no permanente. De la Fig. 4.40 se deduce que

$$-dz = 2ds$$

Entonces, con $\alpha = \beta = 1$, $\Delta h_r = 0$, $V_1 = V_2$ y $p_1 = p_2$, de la Ec. de la energía (4.19), para flujo no permanente, resulta:

$$z_1 = z_2 + \frac{1}{g}\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t}ds$$

Puesto que *V* es constante en cualquier sección del tubo, se tiene a $\partial V/\partial t$ independiente de *s*, luego:

$$z = \frac{1}{g}\frac{dV}{dt}(s_2 - s_1) = \frac{l}{g}\frac{dV}{dt}$$

Por otra parte, por definición, se tiene que

$$V = \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}$$

y resulta asimismo, que

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2g}{l}z = 0$$

es decir, la ecuación diferencial que rige el fenómeno.

La solución general es del tipo:

$$z = A\,\text{sen}\,(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

donde A y B son dos constantes y $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$ es la frecuencia de la oscilación. En efecto, la ecuación diferencial se satisface con esta solución, a saber:

$$\frac{dz}{dt} = A\,\omega\cos(\omega t) - B\,\omega\,\text{sen}\,(\omega t)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -A\,\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t) - B\,\omega^2\cos(\omega t)$$

Por tanto:

$$-A\,\omega^2\,\text{sen}\,(\omega t) - B\,\omega^2\cos\omega t + $$
$$+ A\,\omega^2\,\text{sen}\,\omega t + B\,\omega^2\cos\omega t = 0$$

Para $t = 0$, $z = z_{máx}$; entonces, en la solución,

$$z_{máx} = B$$

Si el periodo de una oscilación es $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$, para $t = \frac{T}{4}$, entonces $z = 0$ y, en la solución,

$$\omega t = \frac{\omega T}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1$ y $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, entonces $A = 0$

y la solución se reduce a

$$z = B\cos(\omega t)$$

Para $t = 0$, $z = z_{máx}$ y, de la ecuación anterior, $B = z_{máx}$; la solución final es:

$$z = z_{máx}\cos(\omega t)$$

Siendo la gráfica de oscilaciones una cosenoide (Fig. 4.41).

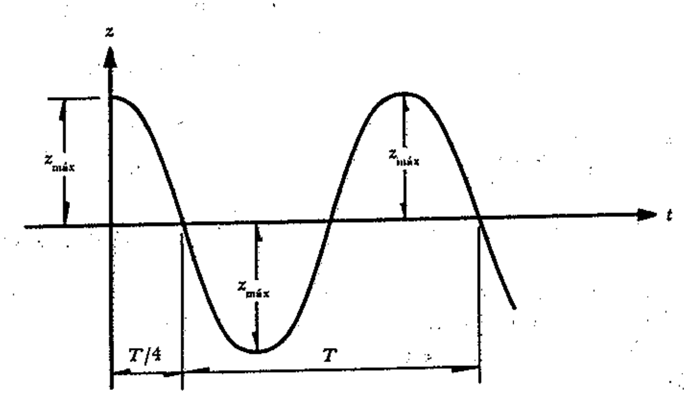


Figura 4.41. Gráfica de oscilaciones del agua en un tubo U.

PROBLEMAS

1. Resuelva los siguientes incisos:

a) Explique los principios básicos en el análisis del flujo de líquidos.
b) ¿En qué consisten los métodos experimentales?
c) Explique el concepto y utilización de volumen de control.
d) ¿Cómo se relaciona el volumen de control con el flujo unidimensional?

2. En un flujo bidimensional incompresible la componente v_x de la velocidad está dada por $v_x = A\,x^3 + B\,y^2$. *a)* Encontrar la ecuación para la componente v_y suponiendo que en $y = 0$; $v = 0$ para todo valor de x. *b)* ¿Es el flujo irrotacional?

3. Determinar la componente v_y de la velocidad (con la diferencia de una constante aditiva) para los siguientes flujos bidimensionales e incompresibles; indicar cuáles son irrotacionales.

a) $v_x = x^2$ *d)* $v_x = \frac{x}{x^2 + y^2}$

b) $v_x = 6x + xy$ *e)* $v_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}$

c) $v_x = x^2 + x$ *f)* $v_x = 2xy^2$

4. Considerando la definición de las componentes de velocidad, y haciendo el desarrollo de las derivadas, demostrar que la Ec. (4.1a) se puede escribir en la forma:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\text{div}\,\mathbf{v} = 0$$

5. Un fluido compresible fluye de tal manera que el vector velocidad, en cada punto, es proporcional a su vector de posición $\mathbf{r}$ respecto del origen del sistema coordenado ($\mathbf{v} = k\,\mathbf{r}$). De la ecuación de continuidad del problema 4, determinar la ley de variación de la densidad con el tiempo. Calcule la constante de integración, considerando que Para $t = 0$, $\rho = \rho_0$.

6. En el difusor circular —mostrado en la figura— el flujo de la sección 1 a la 2 es permanente e incompresible y se puede suponer unidimensional. Calcular dV/ds y la aceleración $V(dV/ds)$ en función de s, V_1, d_1 y θ; y hacer una representación gráfica de V/V_1 y de $(V\,dV/ds)\,/\,(V_1^2/d_1)$, contra s/L.

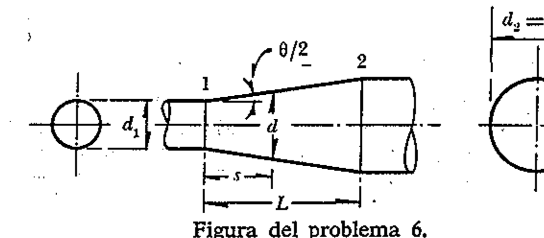


Figura del problema 6.

7. Por el interior de un gran conducto circular de 0.3 m de diámetro fluye agua con velocidades que siguen la distribución señalada en la figura, según la ley $v = 0.0225 - r^2$ (en m/seg). Determinar la velocidad media con que el agua sale por las tuberías de 0.05 m de diámetro.

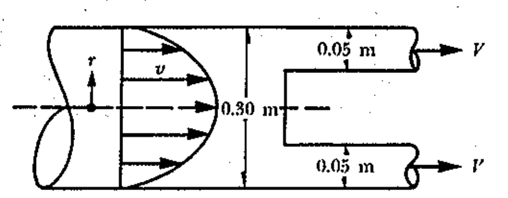


Figura del problema 7.

8. Como se muestra en la figura, por un conducto de sección rectangular entran 0.5 m^3/seg de agua. Dos caras del conducto son porosas: por la cara superior se añade agua a un gasto, por unidad de longitud, de distribución parabólica; mientras que por la cara frontal se pierde agua con una distribución lineal del gasto por unidad de longitud. En la figura se dan los dos valores máximos del gasto por unidad de longitud del conducto.

a) ¿Cuál es el valor de la velocidad media en la sección de salida del conducto, si tiene 1 m de longitud y el área de la sección transversal igual a 0.1 m^2?

b) Determinar en el caso anterior la posición a lo largo del conducto donde la velocidad media sea la máxima.

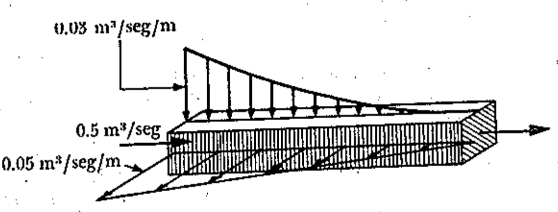


Figura del problema 8.

9. Calcular, de manera exacta, los valores de β para los dos casos presentados en el problema 4.6.

10. En la tabla de abajo se muestran las mediciones de velocidad verificadas con molinete, en los diferentes puntos del canal (mostrado en la figura) el cual alimenta una planta hidroeléctrica. Determinar el gasto, la velocidad media y los coeficientes α y β.

Velocidades en m/seg

Horiz. \ Vert.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0.29	0.50	0.80	1.00	0.95	0.82	0.99	0.84	0.52	0.30
B	0.14	0.50	0.85	1.00	0.99	0.90	0.98	0.89	0.52	0.15
C	—	0.40	0.85	0.98	0.91	0.98	0.97	0.90	0.41	—
D	—	—	0.75	0.90	0.82	0.88	0.83	0.80	0.40	—
E	—	—	—	0.80	0.65	0.75	0.66	0.65	—	—

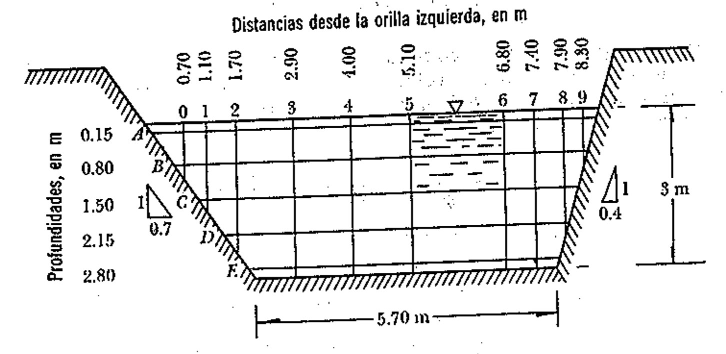


Figura del problema 10.

11. Un chorro de agua es descargado por un chiflón, de 2.5 cm de diámetro, en dirección vertical y ascendente; suponemos que el chorro permanece circular y que se desprecian las pérdidas de energía durante el ascenso.

a) Calcular el diámetro del chorro, en un punto a 4.60 m sobre la boquilla del chiflón, si la velocidad del agua al salir es de 12 m/seg (considerar que el coeficiente de Coriolis $\alpha = 1$).

b) Determinar la presión que debe leerse en el manómetro *M*, si el diámetro en la tubería es de 0.10 m y el desnivel $(z_1 - z_0)$ es de 0.40 m. Considere despreciable la pérdida de energía entre las secciones 0 y 1.

c) Si el chorro forma con la horizontal un ángulo de 45° y se desprecia la fricción con el aire, determinar la altura máxima que alcanzará y la magnitud de la velocidad en ese punto.

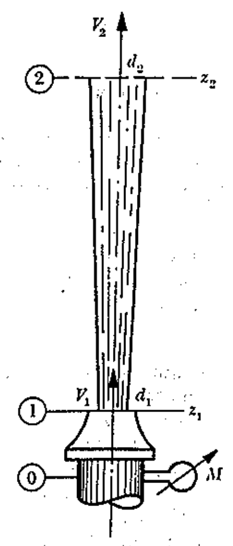


Figura del problema 11.

12. En una tubería de 0.30 m de diámetro escurre agua; para medir la velocidad se ha instalado un tubo de Pitot —como se muestra en la figura— donde el líquido empleado en la medición tiene un $\gamma = 850$ kg/m^3. Calcular la velocidad *V* para $\Delta h = 0.25$ m y el gasto en la tubería.

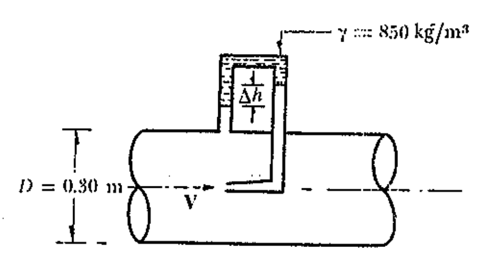


Figura del problema 12.

13. En el sifón —mostrado en la figura— calcular la velocidad del agua, el gasto y la presión en la sección B, en el supuesto de que las pérdidas fuesen despreciables.

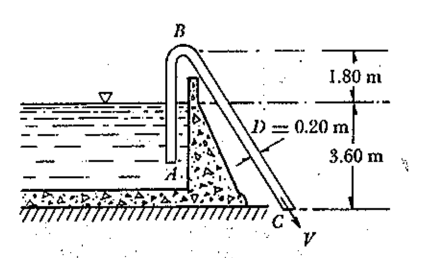


Figura del problema 13.

14. En la tubería (mostrada en la figura) se ha aforado un gasto de agua de 6 m^3/min cuando la carga es $H = 10$ m.

a) Calcular las pérdidas, a través del sistema, como función de la carga de velocidad $K V^2/2g$.

b) Suponiendo que en el extremo de la tubería se coloca un chiflón cuya boquilla tiene un diámetro de 0.05 m, calcular el gasto y la presión en la sección justo arriba del chiflón; para ello considere que las pérdidas en la tubería son: $4 V_1^2/2g + 0.05\ V_2^2/2g$ y que $H = 7$ m. En este caso, V_1 y V_2 son las velocidades del agua en la tubería y en el chiflón, respectivamente.

c) Calcular la potencia del sistema.

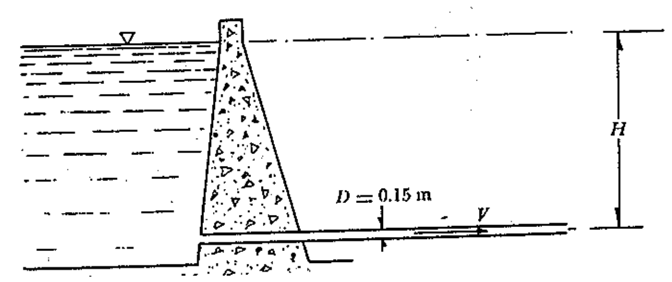


Figura del problema 14.

15. Si la bomba —de la figura— desarrolla 5 CV sobre el flujo, ¿cuál es el gasto?

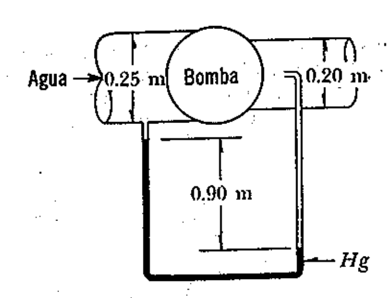


Figura del problema 15.

16. En el sifón (mostrado en la figura) $h_1 = 1$ m, $h_2 = 3$ m, $D_1 = 3$ m, $D_2 = 4$ m; las pérdidas que ocurren son de $1.6\, V_2^2/2g$ y constituyen el 10 % antes de la sección 1.

a) Determinar el gasto y la presión en la sección 1.

b) Suponiendo el flujo sin fricción, desde *A* hasta *B*, determinar la presión en *B* si éste es un punto de estancamiento (velocidad cero).

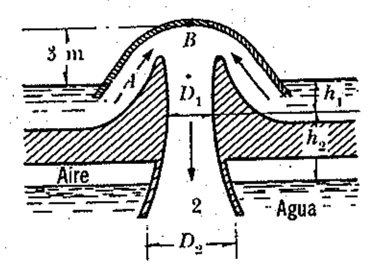


Figura del problema 16.

17. La velocidad en el punto *A*, de la figura, es de 18 m/seg. ¿Cuál es la presión en el punto *B*, si se desprecia la fricción?

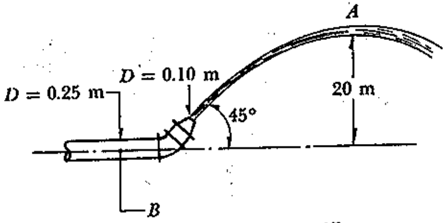


Figura del problema 17.

18. *a)* Si las pérdidas entre las secciones 1 y 2 del problema 4.12 son 0.5 kg m/kg; determinar los dos tirantes posibles en la sección 2.

b) Si en este mismo problema el canal se estrecha hasta 1.80 m de ancho en la caída en la sección 2, determinar los dos posibles tirantes.

19. Un aceite fluye por el tubo circular de 0.20 m de diámetro, que se muestra en la figura; el flujo es permanente y el gasto es de 0.114 m³/seg. El peso específico del aceite es 770 kg/m³. La presión y condiciones de elevación son $p_A = 0.56$ kg/cm²; $h_A = 1.50$ m; $p_B = 0.35$ kg/cm²; $h_B = 6.10$ m. Determinar la dirección del flujo y la disipación de energía entre los dos puntos *A* y *B*. (Las presiones dadas son manométricas.)

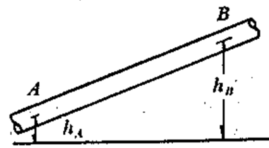


Figura del problema 19.

20. Una bomba eleva agua desde un cárcamo, a través de un tubo vertical de 0.15 m de diámetro. La bomba tiene una tubería de 0.10 m de diámetro, cuya descarga horizontal está 3.25 m arriba del nivel del cárcamo. Al bombear 0.036 kg/cm², en el manómetro del lado de la succión de la bomba se lee —0.324 kg/cm² y del lado de la descarga 1.8 kg/cm². El manómetro colocado del lado de la descarga está 1.50 m por arriba de el del lado de la succión. Calcular la potencia que la bomba entrega al agua.

21. Una turbina genera 600 CV cuando el gasto de agua es de 0.60 m³/seg. Suponiendo una eficiencia del 87 %, calcular la carga neta que actúa sobre la turbina.

22. En el sistema mostrado (en la figura) la bomba *BC* debe producir un caudal de 160 lt/seg de aceite —cuyo peso específico es 762 kg/m³— hacia el recipiente *D*. Suponiendo que la pérdida de energía entre *A* y *B* es de 2.50 kg m/kg y entre *C* y *D* es de 6.50 kg m/kg, determinar:

a) ¿qué potencia en CV debe suministrar la bomba al flujo?

b) Dibujar la línea de energía.

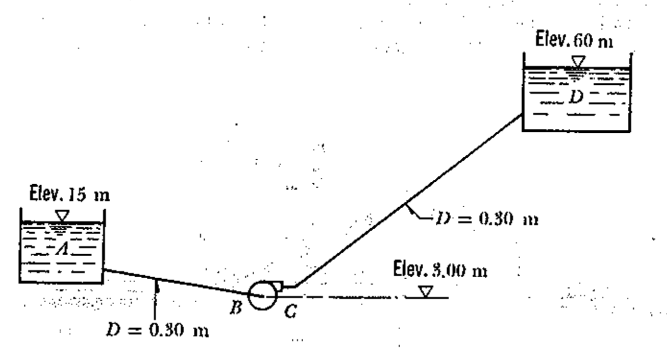


Figura del problema 22.

23. Una bomba de flujo axial eleva el agua desde un canal y la descarga hacia una zanja de riego cuyo nivel se encuentra 1.5 m por encima del nivel del canal, tal como se muestra en la figura. Si el gasto requerido es de 3.785 m³/min y la eficiencia de la bomba es del 65 %, determinar la potencia aproximada que requiere el motor.

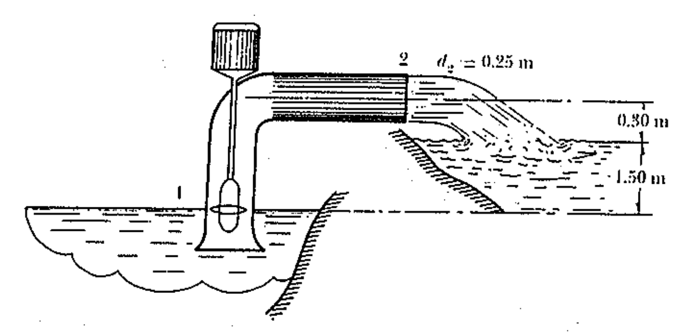


Figura del problema 23.

24. Una tubería ha sido diseñada para dotar de agua potable a una ciudad. El diseño original consistía en un túnel a través de una montaña entre los puntos 2 y 4; de acuerdo a dicho diseño, no hay bombas en la región mostrada en la figura. La presión en el punto 1 de este diseño fue de 7 kg/cm² y en el punto 5 de 3.5 kg/cm², debido a la fricción en la tubería. El gasto es de 28 m³/seg y la tubería es de 3 m de diámetro.

a) Hacer un esquema dibujando las líneas de energía y de cargas piezométricas entre los puntos 1 y 5, suponiendo que el tubo es horizontal.

b) Estudios geológicos posteriores mostraron que una falla atraviesa el túnel, por lo cual se decidió construir la tubería por encima de la montaña, siguiendo la superficie del terreno y facilitar la reparación en el caso de un temblor (suponer que la montaña es de 1 200 m de altura y que se puede representar por un triángulo isósceles).

Explicar por qué es necesaria una estación de bombeo para esta segunda alternativa y calcular la potencia que las bombas transmitirán al agua para el gasto antes señalado (de 28 m³/seg). La presión (manométrica) de la tubería en la cima de la montaña (punto 3) no debe quedar abajo de la atmosférica. Dibujar las líneas de energía total entre los puntos 1 y 5 para las dos alternativas, suponiendo que la presión en el punto 1 es de 7 kg/cm².

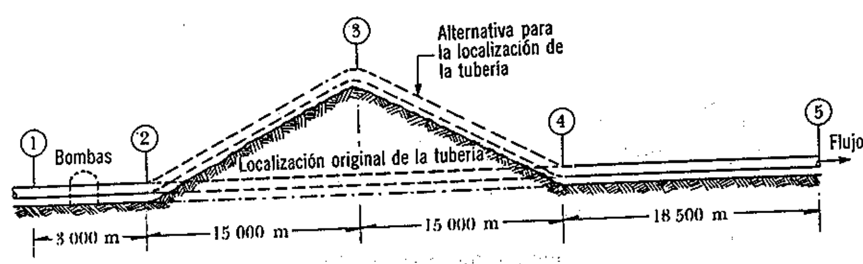


Figura del problema 24.

25. El agua de un gran depósito, como se muestra en la figura, tiene su superficie libre 5 m arriba del tubo de salida. Según se muestra, el agua es bombeada y expulsada en forma de chorro libre mediante una boquilla. Para los datos proporcionados, ¿cuál es la potencia en caballos de vapor requerida por la bomba?

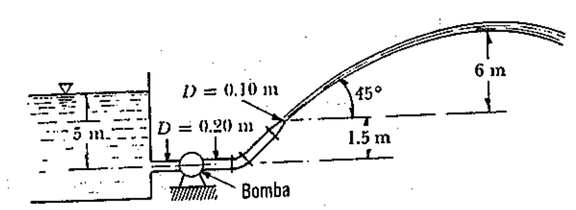


Figura del problema 25.

26. Si la eficiencia global del sistema y la turbina (de la figura) es 0.8, ¿qué potencia se produce para $H = 60$ m y $Q = 30$ m³/seg?

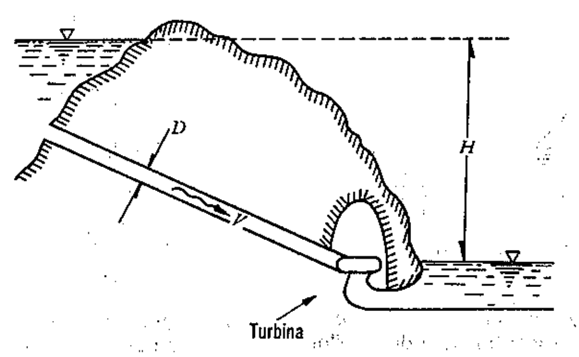


Figura del problema 26.

27. Despreciando la fricción en la tubería (mostrada en la figura) calcular la potencia —en caballos de vapor— desarrollada en la turbina *T*, por el agua procedente de una tubería a 3 kg/cm² de presión.

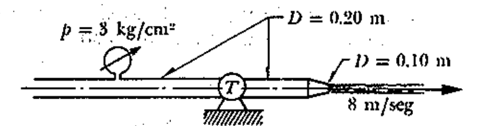


Figura del problema 27.

28. El agua fluye en un canal rectangular de 3 m de ancho con un tirante de 0.09 m; el fondo del canal se eleva gradualmente 0.06 m, tal como se muestra en la figura. La superficie del agua se levanta 0.09 m sobre la porción que se eleva del canal. Calcular el gasto despreciando los efectos de fricción.



Figura del problema 28.

29. El agua entra a un difusor cónico —como el del problema 6— con una velocidad $V_1 = 12.20$ m/seg. El difusor cambia de un diámetro $D_1 = 0.15$ m a $D_2 = 0.30$ m, en una longitud de 1.40 m; el incremento de presión medida es $0.81\ \rho\ V_1^2/2$. Suponiendo que la presión a la entrada del difusor es de 1.5 kg/cm² (man), calcular la fuerza longitudinal resultante del agua sobre las paredes del difusor.

30. El tirante en un río, aguas arriba de una presa, es de 3.70 m, como se ve en la figura; el gasto es de 1.12 m³/seg por cada metro de ancho de la presa. Determinar:

a) el tirante y_2 al pie de la presa, suponiendo despreciables las pérdidas;

b) la fuerza horizontal resultante del empuje dinámico del agua, por cada metro de ancho, sobre la cara aguas arriba de la presa; comparar la fuerza con la que se obtendría supuesta una presión hidrostática.

Figura del problema 30.

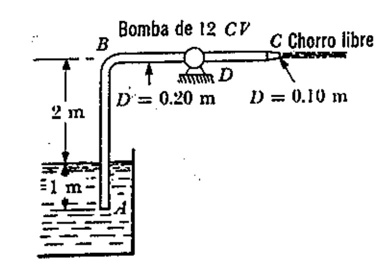


Figura del problema 32.

31. Calcular la fuerza que produce el flujo de agua sobre la curva y la boquilla del chiflón, mostrados en la figura; el agua abandona la boquilla como un chorro libre. El volumen interior del conjunto del codo y de la boquilla es de 115 litros y todo el conjunto está contenido en un plano horizontal.

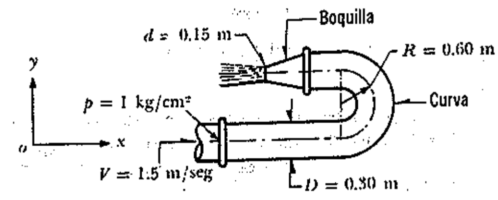


Figura del problema 31.

33. El agua entra en una tubería desde un recipiente de grandes dimensiones y después de abandonarla incide sobre un álabe deflector que desvía el chorro a 90°, según se muestra en la figura. Si sobre el álabe deflector se desarrolla un empuje horizontal de 100 kg, ¿cuál es la potencia en caballos de vapor, desarrollada por la turbina si antes de la misma la presión es de 3 kg/cm²?

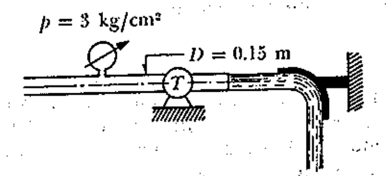


Figura del problema 33.

32. Una bomba extrae agua de un recipiente, como se muestra en la figura. La bomba añade, al flujo 12 *CV*. ¿Cuál es la fuerza horizontal que desarrolla el flujo sobre el soporte *D*? Despreciar pérdidas

34. Determinar las fuerzas componentes F_x y F_y, necesarias para mantener en reposo la caja de distribución mostrada en la figura. No considerar las fuerzas debidas a la presión en las tuberías.

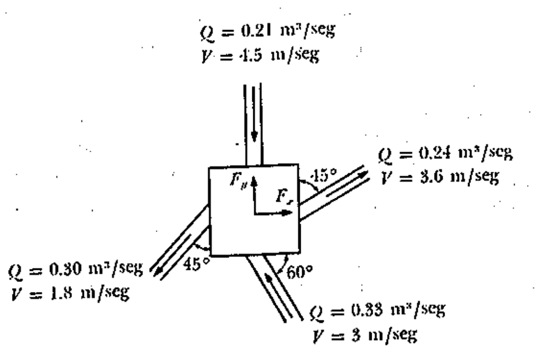


Figura del problema 34.

35. La superficie fija (mostrada en la figura) divide el chorro de agua, de tal manera que 0.0285 m³/seg fluye en ambas direcciones. Para una velocidad inicial del chorro, de 14 m/seg, encontrar las componentes F_x y F_y de la fuerza requerida para conservar la superficie en equilibrio; desprecie para ello las resistencias de fricción.

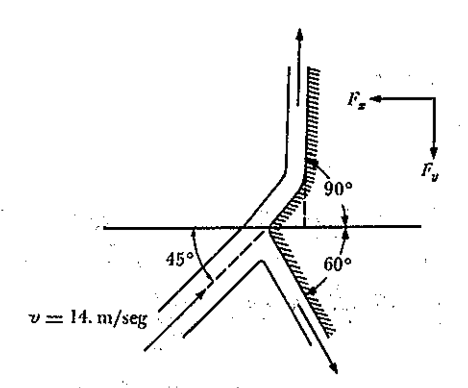


Figura del problema 35.

36. Una bomba de inyector de agua tiene un área de chorro $A_c = 0.0047$ m² con una velocidad $V_c = 27.5$ m/seg, que entra a una corriente secundaria de velocidad $V_s = 3$ m/seg, en un tubo de sección constante cuya área total es $A = 0.056$ m². En la sección 2 se considera que el agua se ha mezclado totalmente.

a) Calcular la velocidad media del escurrimiento en la sección 2.
b) Determinar el gasto total y el incremento de presión, $p_2 - p_1$, suponiendo que la presión del chorro y de la corriente secundaria es la misma en la sección 1.

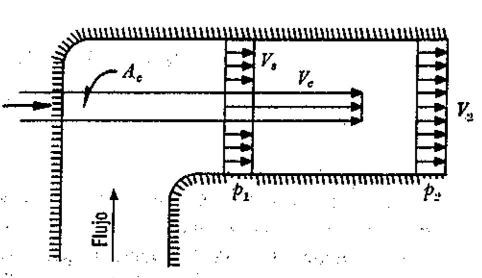


Figura del problema 36.

37. Una tubería horizontal de 6 m de diámetro tiene un codo reductor que conduce al agua a una tubería de 4 m de diámetro, unida a 45° de la anterior. La presión a la entrada del codo es de 10 kg/cm² y la velocidad de 15 m/seg. Determinar las componentes de la fuerza que han de soportar los anclajes del codo. Despreciar las pérdidas en el codo y el peso del líquido dentro del mismo.

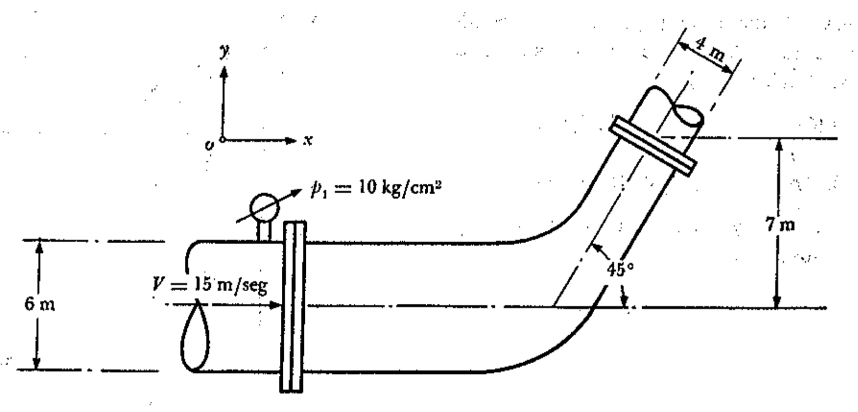


Figura del problema 37.

38. ¿Qué fuerza propulsora se ejerce sobre la vagoneta de la figura?, ¿cuál es el rendimiento de este chorro como sistema de propulsión?

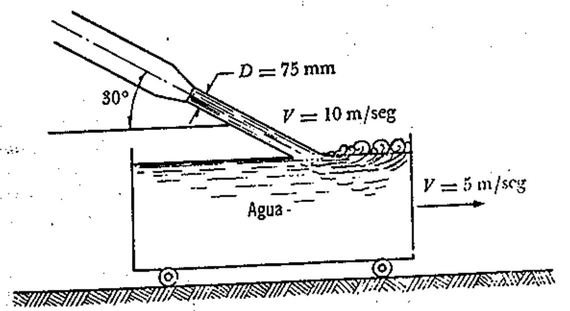


Figura del problema 38.

39. En la figura se tiene un distribuidor de gasto; obtenga una ecuación que relacione Q_2/Q_1 con θ. Además, calcule la fuerza F que obra sobre la placa, si Q_2 es el 80% de Q. El conducto es cuadrado, de lado B.

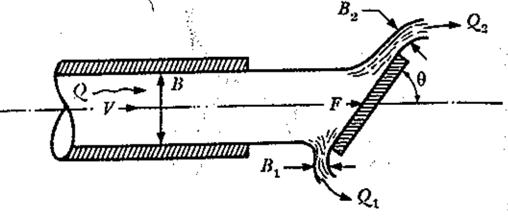
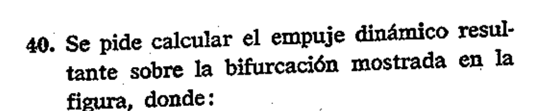


Figura del problema 39.



40. Se pide calcular el empuje dinámico resultante sobre la bifurcación mostrada en la figura, donde:

$D_1 = 0.46$ m $\quad Q_1 = 0.567$ m³/seg
$D_2 = 0.15$ m
$D_3 = 0.30$ m $\quad Q_3 = 0.341$ m³/seg

Los ramales 2 y 3 descargan a las condiciones atmosféricas.

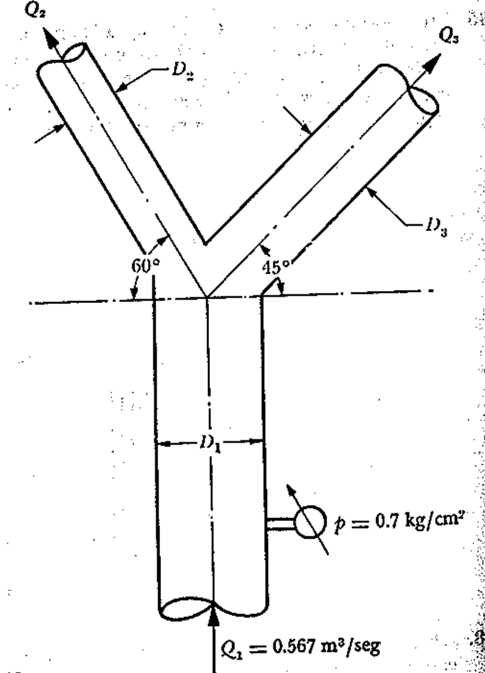


Figura del problema 40.

41. La tubería mostrada cambia su diámetro de $D_1 = 1.50$ m a $D_2 = 1$ m y conduce un gasto de agua $Q = 1.8$ m³/seg, siendo la presión $p = 4$ kg/cm². Despreciando la pérdida de energía debida al cambio de diámetro, calcular la fuerza dinámica F a que está sujeta la pieza que sirve para realizar la transición.

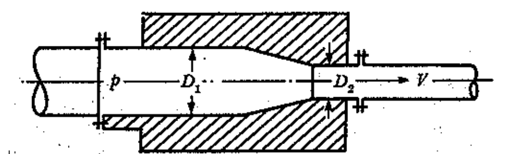


Figura del problema 41.

42. La tubería mostrada cambia bruscamente del diámetro $D_1 = 300$ mm a $D_2 = 200$ mm y transporta el gasto de agua $Q = 0.28$ m³/seg. La presión que se lee en el manómetro M, sobre la sección A, es $p = 1.5$ kg/cm². Considerando que la pérdida de energía por el cambio de geometría se puede calcular de la expresión:

$$\Delta h = 0.5\left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^2 \frac{V_2^2}{2g}$$

determinar la fuerza dinámica que se produce por dicho cambio.

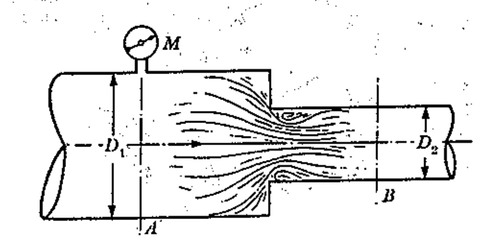


Figura del problema 42.

43. Una turbina hidráulica descarga el agua al canal de desfogue a través de un tubo de succión que tiene la forma de un tronco de cono, el cual se inicia con un diámetro $d = 1$ m y termina con $D = 2$ m, siendo su longitud $L = 4$ m. El gasto descargado por la máquina es $Q = 5.5$ m³/seg; el desnivel $H = 3$ m. La pérdida de energía en el difusor se puede calcular de la ecuación

$$h = 0.25\frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

Calcular la fuerza dinámica producida sobre el difusor.

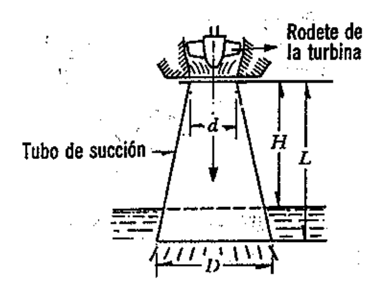


Figura del problema 43

44. En el dispositivo, indicado en la figura, se tiene la siguiente geometría: $d = 50$ mm, $D = 100$ mm, $r = 400$ mm y en el manómetro M se lee la presión $p = 10$ kg/cm².

a) Calcular la fuerza dinámica ejercida sobre el chiflón y la que afecta la unión en la sección B.

b) Calcular la fuerza dinámica total ejercida sobre el dispositivo y el momento flexionante que actúa en la sección B.

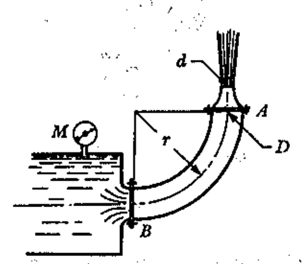


Figura del problema 44

45. En la bifurcación, mostrada en la figura,

$D = 1.2$ m; $d = 0.85$ m; el ángulo $\theta = 45°$; y la presión $p = 50$ kg/cm². El gasto total es $Q = 6$ m³/seg de agua y la bifurcación está contenida en un plano horizontal.

a) Calcular la fuerza dinámica que se produce.
b) Calcular dicha fuerza, si $p = 70$ kg/cm².

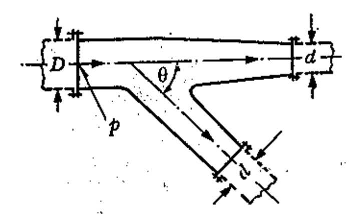


Figura del problema 45

46. La bifurcación mostrada en la figura tiene la siguiente geometría: $D = 3$ m, $d = 2$ m, $\theta = 60°$, con un gasto total de agua $Q = 35$ m³/seg y una presión $p = 30$ kg/cm². Calcular la fuerza dinámica considerando que la bifurcación está contenida en un plano horizontal.

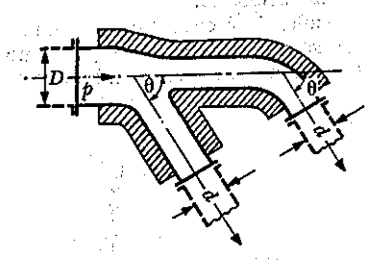


Figura del problema 46

47. En el cambio de dirección mostrado, $d = 200$ mm, $r = 600$ mm y el gasto de agua $Q = 125$ lt/seg, siendo $p = 2$ kg/cm². Calcular la fuerza dinámica y los momentos flexionantes producidos sobre las uniones.

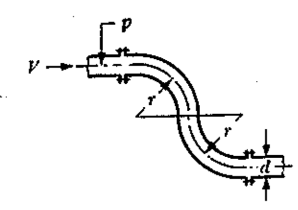


Figura del problema 47

48. Una rueda Pelton es alimentada por dos chiflones que descargan agua con la disposición mostrada en la figura. Los diferentes diámetros son $d_0 = 120$ mm, $D_2 = 275$ mm y $D_1 = 400$ mm. La bifurcación está contenida en un plano horizontal, siendo la presión $p = 50$ kg/cm² y el diámetro del chorro en la descarga $d = 0.895\ d_0$. Considerando despreciables las pérdidas de energía, desde la sección A hasta la descarga, determinar la fuerza dinámica:

a) la total del conjunto, hasta la sección A;
b) de la rama superior;
c) de la rama inferior.

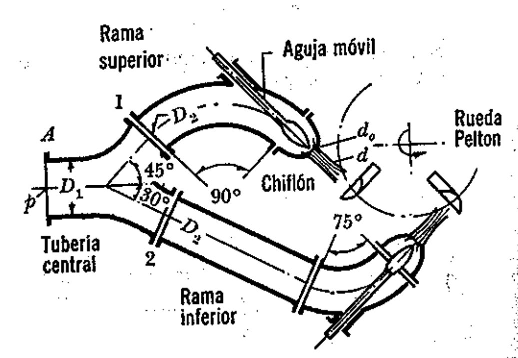


Figura del problema 48

49. Un túnel para agua tiene una sección cuadrada de 0.30 m por 0.30 m y opera lleno. Se realizó una prueba del flujo, con un cilindro (como se muestra en la figura) con la misma longitud que el ancho del túnel, encontrando que hay una diferencia en las cargas de presión: de 0.217 m de agua entre las secciones 1 y 2; además, se determinó que la presión es uniforme a través de cada una de ellas. En la sección 1 hay una velocidad uniforme de 3.05 m/seg y en la sección 2 la distribución de velocidades es como se muestra gráficamente en la figura. Encontrar, por métodos gráficos, los coeficientes α y β en la sección 2 y la fuerza de arrastre sobre el cilindro.

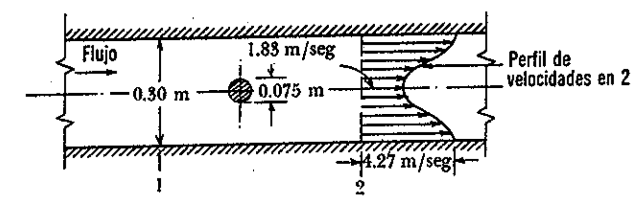


Figura del problema 49

50. Como se muestra en la figura, el agua fluye con velocidad V_0 en un tubo con una tapa ciega y lo hace hacia el exterior a través de los chorros laterales, en ángulo recto con la línea eje de la tubería. El área total de los chorros es la misma que la de la sección transversal de la tubería. Las entradas hacia los chorros están redondeadas para evitar una pérdida de energía. Examinar los siguientes argumentos y resolver las aparentes contradicciones entre las dos conclusiones.

a) Al aplicar la ecuación de Bernoulli, entre B y C, se encuentra que la presión en B es la atmosférica. Aplicando la misma ecuación, entre C y la región D de estancamiento, se encuentra que la presión sobre la tapa es $\rho V_0^2/2$, por lo que el empuje sobre la tapa es $A \rho V_0^2/2$, donde A es el área de la sección transversal del tubo.

b) De la ecuación de la cantidad de movimiento, el empuje sobre la tapa es igual al requerido para deflectar el flujo a ángulos rectos, respecto de la dirección original, como también igual a la fuerza necesaria para destruir —del todo— la componente original de adelante, es decir: $Q \rho V = A \rho V_0^2$.

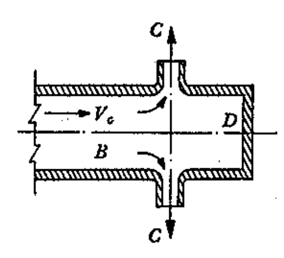


Figura del problema 50

5

SIMILITUD DINAMICA

5.1 Aspectos generales

En mecánica de fluidos el riguroso tratamiento matemático de los problemas, con base exclusivamente en los métodos analíticos, no siempre permite llegar a la solución completa, a menos que se planteen hipótesis simplificatorias que, además de restar generalidad a la solución, pueden llegar a falsear los resultados a tal grado que no tengan relación alguna con el comportamiento real del fenómeno. Por otra parte, debido a la variedad de problemas, muchas veces resulta difícil establecer las condiciones de frontera previas a cualquier solución matemática. En otros casos, las soluciones analíticas se deben plantear de tal manera que no se ignoren los aspectos físicos del fenómeno y que determinados puntos de la respuesta queden supeditados a la experimentación.

Los *modelos hidráulicos* han encontrado creciente aplicación para controlar y modificar diseños analíticos de estructuras hidráulicas. Mediante el uso de modelos físicos es posible experimentar a costos relativamente bajos y con economías substanciales de tiempo, hasta obtener condiciones óptimas.

Lo anterior en ningún caso significa que una técnica substituya a la otra. Sería un error suponer que una serie de resultados y de reglas sencillas obtenidas de la investigación experimental supla un tratamiento racional del mismo, pudiendo ocurrir que dichos resultados tuvieran validez sólo en el intervalo de valores para el cual se efectuaron las mediciones. Además, aun cuando fuera posible hacer un estudio exhaustivo del fenómeno, resulta necesario tomar en consideración una serie de factores de índole apreciativa que limitan la extrapolación y generalización de las respuestas.

La adecuada combinación del análisis matemático y la verificación experimental permite superar esos obstáculos, restringiendo las hipótesis a aquellas cuya experiencia y razonamiento físico han mostrado no tener serios efectos sobre las características esenciales del fenómeno.

Mientras el tratamiento empírico recalca el desarrollo algebraico de una fórmula deducida de la investigación experimental, a menudo con poca justificación física, el análisis racional intenta una solución completa para la función correcta y las constantes numéricas involucradas. Por otra parte, la mecánica de fluidos emplea los principios del *análisis dimensional*

para incorporar las variables, que la experiencia ha demostrado como esenciales, en una expresión adimensional básica, sistemática y matemáticamente ordenada; asimismo, toda vez que sea posible se desarrolla, al menos aproximadamente, la interrelación funcional de los diferentes miembros de esta expresión. Por último, la investigación experimental suministra las constantes numéricas y la verificación esencial sobre la exactitud del análisis; también trae consigo el estudio de las características del flujo aunadas a las propiedades del fluido y a las condiciones de frontera o geometría del mismo. Así, por ejemplo, el estudio experimental completo del empuje de un flujo sobre un cilindro (Prob. 4.22) significaría variar la velocidad v_o y utilizar varios fluidos de distintas características, así como cilindros de diferente diámetro, para determinar el coeficiente de arrastre en cualquier condición imaginable. Una investigación en este sentido representaría un trabajo formidable casi imposible de realizar; sin embargo, una planeación adecuada de las combinaciones de las diversas variables que ocurren en cada problema permite llegar a generalizaciones realmente extraordinarias con el menor esfuerzo, costo y tiempo; muchas veces con una presentación muy simple. Para este caso particular es suficiente estudiar la variación del coeficiente de arrastre, mediante la simple variación del parámetro adimensional —llamado de Reynolds— que involucra todos estos factores, para obtener una relación sencilla.

La técnica seguida para encontrar las combinaciones posibles se apoya en el empleo de *parámetros adimensionales* formados con las diferentes variables del problema, que permite la transposición de los resultados de un modelo físico a la estructura real. La *teoría de la similitud* que satisface esta necesidad fue establecida por Kline: "Si dos sistemas obedecen al mismo grupo de ecuaciones y condiciones gobernantes, y si los valores de todos los parámetros y las condiciones se hacen idénticas, los dos sistemas deben de exhibir comportamientos similares con tal de que exista una solución única para el grupo de ecuaciones y condiciones."

Los principales parámetros adimensionales de utilidad en la dinámica de fluidos se obtienen de las ecuaciones del movimiento de los fluidos. No obstante lo anterior, si se conocen las variables importantes que intervienen en un problema, el llamado análisis dimensional constituye un procedimiento sencillo y puramente matemático para determinar los parámetros más aplicables en cada caso (su explicación se presenta en el Apéndice A).

La experimentación se basa en la construcción y operación de un modelo reducido a escala cuyo tamaño se supedita a factores como espacio disponible, capacidad de las instalaciones del laboratorio, costo del modelo, efectos de escala, etcétera. Para la operación se requieren los aparatos y dispositivos que midan las características hidráulicas del escurrimiento: gastos, velocidades, presiones, tiempos, etcétera.

En general, la similitud va más allá de los aspectos superficiales de *similitud geométrica*, con la cual erróneamente se confunde; aquélla debe entenderse como la correspondencia conocida y usualmente limitada entre el comportamiento del flujo estudiado en el modelo y el flujo real, con similitud geométrica o sin ella. La similitud rara vez es perfecta debido a que comúnmente es imposible satisfacer todas las condiciones requeridas para lograrla.

En este capítulo sólo se presenta la derivación de las leyes de similitud más comunes y sus aplicaciones en el estudio experimental de los sistemas de flujo más importantes; sin embargo, no significa que se haga una exposición completa de las técnicas de investigación. Éstas pueden ser tan variadas como los problemas que presentan los diferentes flujos que ocurren en la naturaleza o en las estructuras hidráulicas, especialmente por las aportaciones de la matemática estadística que permite hacer una planeación adecuada de las pruebas y una interpretación más racional de los resultados experimentales. En ellos interviene una amplia variedad de factores sujetos a la exactitud en la construcción del modelo; apreciación de las mediciones por el operador; precisión del instrumental que se utiliza; los efectos de escala y, desde luego reconocer que no existe similitud absoluta sino, más bien, varias similitudes imperfectas y susceptibles a emplearse según se requiera.

La técnica seguida en la selección, tanto de las leyes de similitud como de las escalas, en la construcción, medición y operación de los modelos, así como en la interpretación de los resultados experimentales, constituye por sí misma una disciplina que, por su extensión, no es posible incluir totalmente en este capítulo.

5.2 Similitud geométrica

Considere dos flujos, como los mostrados en la Fig. 5.1, que se designarán como *modelo* y *prototipo*. Mientras que el primero tiene, en general, dimensiones menores que el segundo y es el que se reproduce en el laboratorio, el segundo representa la estructura real por construir.

La similitud geométrica implica, de un modo estricto, que sea igual la relación de todas las longitudes *homólogas* en los dos sistemas. Esto es, si dentro de los flujos ciertas dimensiones se seleccionan y, además, se designa con p al prototipo y con m al modelo (Fig. 5.1), la similitud geométrica significaría, por ejemplo, que

$$l_e = \frac{H_p}{H_m} = \frac{B_p}{B_m} = \frac{S_p}{S_m} = \ldots$$

donde l_e es la *escala de líneas* que cuantifica el tamaño relativo de los dos sistemas.

Una consecuencia de la similitud geométrica exacta es que la relación de áreas y volúmenes en ambos sistemas se puede expresar en términos del cuadrado y del cubo de l_e, esto es:

$$A_e = \frac{A_p}{A_m} = l_e^2$$

$$v_e = A_e\, l_e = \frac{v_p}{v_m} = l_e^3$$

En algunos casos, es factible que la similitud geométrica exista sólo en lo que se refiere a las dimensiones sobre planos horizontales y las dimensiones verticales pueden quedar *distorsionadas* con otra escala de líneas (como es el caso de los modelos de ríos o de puertos) donde el conservar la misma escala de líneas en las tres direcciones significaría tener tirantes muy pequeños en los modelos. Se tendrían así, por ejemplo, escalas de líneas de dimensiones verticales y horizontales, como sigue:

$$l_{ev} = \frac{H_p}{H_m} = \frac{S_p}{S_m} = \ldots$$

$$l_{eh} = \frac{B_p}{B_m} = \ldots$$

La similitud geométrica se extiende también a la rugosidad superficial de las paredes que limitan al flujo, pues si el modelo tiene un tamaño igual a un décimo del prototipo ($l_e = 10$), entonces la altura de las proyecciones de las rugosidades deben estar en la misma relación.

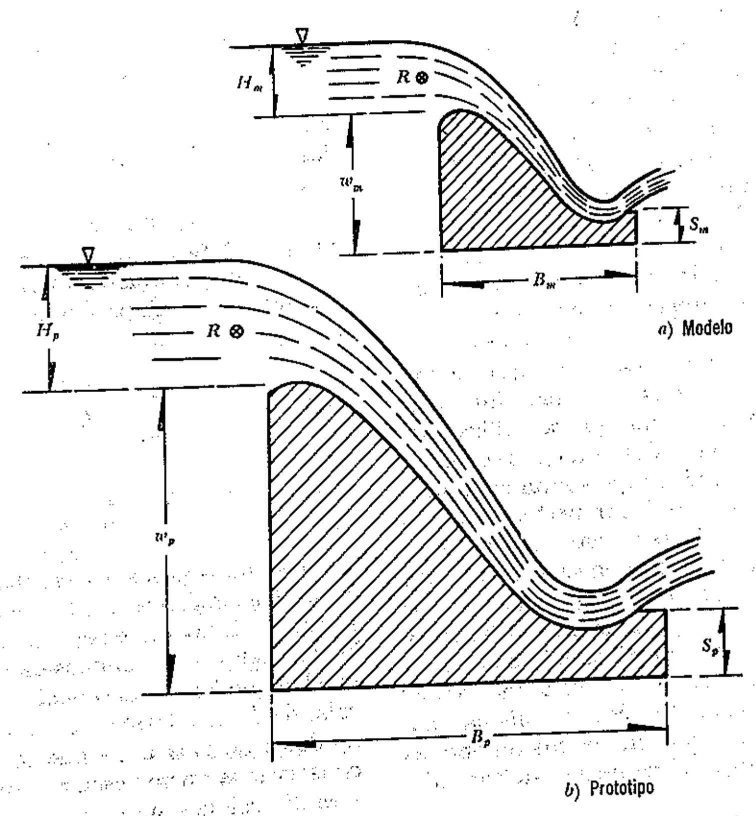


Figura 5.1. Similitud dinámica entre dos flujos del modelo y el prototipo (*a* y *b*).

Esto es difícil de lograr en la práctica, por lo que en ocasiones es necesaria una distorsión geométrica en la dimensión longitudinal de la conducción respecto a las otras dos dimensiones, con objeto de lograr la misma relación de pérdidas de energía en ambas estructuras.

5.3 Similitud cinemática y dinámica

La *similitud cinemática* entre dos sistemas de flujo se interpreta como la semejanza geométrica entre las líneas de corriente de ambos flujos, sin distorsión o con ella. La *similitud dinámica* implica que haya similitud geométrica, o bien, distorsionada, además de que sea la misma la relación de las fuerzas dinámicas en puntos homólogos.

En la similitud dinámica, al igual que en la similitud geométrica, existen escalas de velocidades, de fuerzas, tiempos, densidades, viscosidades, etcétera, que miden la relación entre las características de los flujos o propiedades de los fluidos utilizados en los mismos y referidas a dos puntos *R* homólogos, que se designarán con el símbolo hasta ahora utilizado, pero añadiendo el subíndice *e*

(escala). Por ejemplo, ρ_e, μ_e, ν_e se refieren a las propiedades de los fluidos que se utilicen en el prototipo y el modelo. Estos fluidos pueden ser distintos en ambos sistemas. La escala g_e se refiere a las aceleraciones de la gravedad que pueden considerarse distintas entre el sitio donde se localiza el prototipo y el lugar donde se prueba el modelo; sin embargo, se acepta en general que $g_e = 1$ debido a la poca variación de g con la latitud geográfica y la elevación sobre el nivel del mar. Además, por definición, sabemos que:

$$v_e = \frac{l_e}{t_e} \qquad (5.1a)$$

$$t_e = \frac{l_e}{v_e} \qquad (5.1b)$$

$$Q_e = A_e v_e \qquad (5.1c)$$

$$a_e = \frac{l_e}{t_e^2} \qquad (5.1d)$$

$$\rho_e = \frac{\gamma_e}{g_e} \qquad (5.1e)$$

$$\nu_e = \frac{\mu_e}{\rho_e} \qquad (5.1f)$$

El movimiento de un fluido se explica por las ecuaciones del movimiento que consideran a las fuerzas, por unidad de masa, más importantes que intervienen en el flujo. No obstante, de acuerdo con el problema particular que se desee estudiar, cada fenómeno se caracteriza por la importancia de una fuerza determinada cuya influencia es *preponderante* en el movimiento y que prácticamente elimina a las restantes, ejerciendo su acción sobre la fuerza de inercia.

En general, la importancia de la fuerza preponderante se compara con la de inercia, lo que da origen a tres parámetros sin dimensiones y otro más que no relaciona propiamente fuerzas, sino los efectos de la aceleración local con la substancial. Estos parámetros se pueden obtener de las ecuaciones del movimiento de los fluidos o directamente de la segunda ley de Newton.

Los distintos términos de la ecuación del movimiento (4.8a) representan las fuerzas —por unidad de masa— que intervienen en un flujo; esta ecuación es, obviamente, válida para los dos sistemas. Substituyendo en dicha ecuación al esfuerzo tangencial τ, en términos de la viscosidad absoluta y del gradiente de velocidades en la dirección normal (Ec. 1.1) ($\tau = \mu\, \partial v/\partial n$), y suponiendo que μ es constante, para el modelo se tiene que:

$$-\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p_m}{\partial s_m} + \frac{\mu_m}{\rho_m}\frac{\partial^2 v_m}{\partial n_m^2} - g_m\frac{\partial z_m}{\partial s_m} = \frac{\partial}{\partial s_m}\left(\frac{v_m^2}{2}\right) + \frac{\partial v_m}{\partial t_m}$$

Con las definiciones de escala antes dadas, la ecuación equivalente para el prototipo es

$$-\left(\frac{p_e}{\rho_e l_e}\right)\left(\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p_m}{\partial s_m}\right) + \left(\frac{\mu_e v_e}{\rho_e l_e^2}\right)\left(\frac{\mu_m}{\rho_m}\frac{\partial^2 v_m}{\partial n_m^2}\right) - (g_e)\left(g_m\frac{\partial z_m}{\partial s_m}\right) = \left(\frac{v_e^2}{l_e}\right)\left[\frac{\partial}{\partial s_m}\left(\frac{v_m^2}{2}\right)\right] + \left(\frac{v_e}{t_e}\right)\left(\frac{\partial v_m}{\partial t_m}\right)$$

Si se divide cada término entre v_e^2/l_e, que es el que corresponde a la fuerza de inercia, se obtiene:

$$-\left(\frac{p_e}{\rho_e v_e^2}\right)\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p_m}{\partial s_m}+ \\ +\left(\frac{\mu_e}{\rho_e v_e l_e}\right)\frac{\mu_m}{\rho_m}\frac{\partial^2 v_m}{\partial n_m^2}- \\ -\left(\frac{g_e l_e}{v_e^2}\right)g_m\frac{\partial z_m}{\partial z_m}=\frac{\partial(v_m^2/2)}{\partial s_m}+ \\ +\left(\frac{l_e}{v_e t_e}\right)\frac{\partial v_m}{\partial t_m} \tag{5.2}$$

Los términos entre paréntesis, de esta ecuación, relacionan las diferentes escalas utilizadas y es igualmente válido utilizar los recíprocos (exceptuando el último). Por ejemplo, igualando el primero con el que corresponde al de la aceleración convectiva (de valor 1), se tiene que

$$\frac{\rho_e v_e^2}{p_e} = 1$$

y, por definición de escalas, resulta lo siguiente:

$$\frac{\rho_p v_p^2}{p_p} = \frac{\rho_m v_m^2}{p_m} \tag{5.3}$$

Esto es, para que haya similitud dinámica, por lo que respecta a la fuerza de presión, es necesario que el parámetro $Eu = \rho v^2/p$ sea el mismo en el modelo y en el prototipo. En general, p representa la diferencia de presiones Δp, entre dos puntos del flujo o entre un punto y la presión atmosférica. Este parámetro es adimensional y es la relación entre la fuerza de inercia y la debida al gradiente de presiones.

Por medio de un razonamiento análogo se obtendrían cuatro parámetros adimensionales, a saber:

$$Eu = \frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza de presión}} = \frac{\rho v^2}{\Delta p}$$

$$Re = \frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza viscosa}} = \frac{v\,l}{\mu/\rho} = \frac{v\,l}{\nu}$$

$$Fr^2 = \frac{\text{fuerza de inercia}}{\text{fuerza gravitacional}} = \frac{v^2}{g\,l}$$

$$S = \frac{\text{aceleración local}}{\text{fuerza de inercia}} = \frac{l}{v\,t}$$

5.4 Leyes de similitud

El primer parámetro de los obtenidos arriba se llama *número de Euler* y rige en aquellos fenómenos donde son preponderantes los cambios Δp de las presiones. Con $\rho = \gamma/g$ y $h = \Delta p/\gamma$, se escribe comúnmente así:

$$Eu = \rho\frac{v^2}{\Delta p} = \frac{v^2}{g\,h} \tag{5.4}$$

Parámetro que tiene importancia en fenómenos de flujo ocasionados por un gradiente de presiones donde la densidad y la aceleración del fluido intervienen primordialmente en el fenómeno y las fuerzas viscosas pierden importancia; es decir, el movimiento depende de la forma del flujo, con una configuración prácticamente invariable de las líneas de corriente. Esto ocurre en problemas de flujo a presión como en las tuberías, orificios, válvulas, compuertas, distribución local de presiones sobre un obstáculo, etcétera.

El segundo número se llama de *Reynolds* y se acostumbra escribir:

$$Re = \frac{v\,l}{\nu} \tag{5.5}$$

Es válido en aquellos flujos a poca velocidad donde las fuerzas viscosas son las más importantes. Un número de Reynolds grande indica una preponderancia marcada de las fuerzas de inercia sobre las viscosas, como —por ejemplo— el flujo turbulento, en que la viscosidad tiene escasa importancia y el fenómeno depende sólo del número de Euler. Cuando éste es pequeño, pero la viscosidad es importante, el fenómeno depende de ambos números.

El número de Reynolds se usa a menudo como el criterio de semejanza en la prueba de modelos de naves aéreas, cuerpos sumergidos en un flujo, medidores de gasto, transiciones en conductos, etcétera, en los cuales las características del flujo están sujetas a efectos viscosos.

El tercer número se llama de *Froude* y en general se representa como la raíz cuadrada de la relación de fuerzas, es decir:

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g\,l}} \tag{5.6}$$

El número de Froude tiene importancia en flujos con velocidades grandes que ocurren por la acción exclusiva de la gravedad; tal es el caso del flujo turbulento a superficie libre, donde los efectos viscosos son despreciables. A medida que aumenta el número de Froude, mayor es la reacción inercial de cualquier fuerza; en tanto disminuye, mayor es el efecto de la fuerza gravitacional. Cuando el flujo es horizontal, la acción del peso desaparece y con ella la influencia del número de Froude.

Finalmente, en aquellos problemas de flujo no permanente en los que la periodicidad del fenómeno es importante, el número llamado de *Strouhal* caracteriza su acción. Si se considera que la frecuencia del fenómeno periódico es $f = 1/t$, se tiene que

$$S = \frac{f\,l}{v} \tag{5.7}$$

donde l representa una dimensión típica del cuerpo obstruyendo el flujo y v una velocidad típica dentro del flujo. Este número es importante en flujos relacionados con la formación de vórtices, movimiento de ondas, efectos de vibración en cuerpos colocados en un flujo, etcétera, y representa la raíz cuadrada de la relación de una fuerza hidroaerodinámica (que actúa para restaurar el equilibrio en la configuración de un flujo) y la fuerza de inercia de la masa oscilante del fluido.

Como ya se había señalado, para lograr similitud dinámica es necesario que los números antes definidos resulten iguales en el modelo y en el prototipo. En la práctica no se pueden satisfacer todos los parámetros de manera simultánea y se da preferencia a aquel o aquellos que tengan mayor importancia en el flujo.

Sistemas a presión. En este caso, los cambios de presión se deben a una combinación de los efectos dinámicos producidos por la aceleración, viscosidad y gravedad. En el caso común de un flujo de densidad constante, el efecto de gravedad es una distribución de presiones hidrostáticas, superpuesta a una presión variable debida a otros efectos, de ahí que el número de Reynolds sea el más importante y deba ser igual en modelo y prototipo, esto es:

$$\frac{v_p\,l_p}{\nu_p} = \frac{v_m\,l_m}{\nu_m}$$

o bien

$$\frac{v_e\,l_e}{\nu_e} = 1 \tag{5.8}$$

donde v_e es la escala de velocidad y ν_e de viscosidad cinemática; resulta entonces lo siguiente:

$$v_e = \frac{v_e}{l_e} = \frac{\mu_e}{\rho_e l_e} \quad (5.9)$$

La escala de tiempos es

$$t_e = \frac{l_e}{v_e} = \frac{l_e^2}{v_e} \quad (5.10)$$

La de aceleraciones

$$a_e = \frac{v_e}{t_e} = \frac{v_e^2}{l_e^3} = \frac{\mu_e^2}{\rho_e^2 l_e^3} \quad (5.11)$$

La de fuerzas viscosas

$$F_e = m_e a_e = \rho_e l_e^3 \frac{\mu_e^2}{\rho_e^2 l_e^3} = \frac{\mu_e^2}{\rho_e} \quad (5.12)$$

y, por último, la de presiones

$$p_e = \frac{F_e}{A_e} = \frac{\mu_e^2}{\rho_e l_e^2} \quad (5.13)$$

Al utilizar el criterio de semejanza de Reynolds puede demostrarse que las fuerzas gravitacionales se anulan y no tienen, por tanto, efectos sobre las características del flujo. Sin embargo, en la mayoría de los estudios con modelos el número de Reynolds varía desde 1×10^6 a 20×10^6, por lo cual la utilización de este criterio de semejanza es poco usual en la práctica.

Problema 5.1. Un dispositivo de investigación se encuentra sostenido por una barra cilíndrica de 0.15 m de diámetro, la cual a su vez está sujeta a una lancha y sumergida verticalmente en aguas profundas a 15°C, donde la velocidad, por el movimiento de la lancha, alcanza 3 m/seg. Se desea determinar la fuerza de resistencia en la barra (inducida por el movimiento) con un modelo geométricamente similar, de 0.03 m de diámetro, en un túnel de viento de presión variable, donde es posible lograr velocidades hasta de 30 m/seg, a una temperatura de 15°C.

Solución. Suponiendo que el túnel de viento se opera a 30 m/seg, se puede obtener la densidad del aire, requerida por la condición de que el número de Reynolds sea igual en los dos sistemas. Para la temperatura de 15°C las escalas de viscosidad de ambos fluidos, de velocidades y de líneas son, respectivamente:

$$\mu_e = \frac{\mu_p}{\mu_m} = \frac{1.18 \times 10^{-4}}{2.0 \times 10^{-6}} = 0.59 \times 10^2$$

$$v_e = \frac{v_p}{v_m} = \frac{3}{30} = 0.1$$

$$l_e = \frac{l_p}{l_m} = \frac{0.15}{0.03} = 5$$

Por tanto, de la Ec. (5.9) resulta:

$$\rho_e = \frac{\mu_e}{v_e l_e} = \frac{(0.59 \times 10^2)}{0.1 \times 5} = 1.18 \times 10^2$$

Debido a que la densidad del agua es $\rho_p = 101.87$ kg seg²/m⁴, la del aire debe ser

$$\rho_m = \frac{101.87}{1.18 \times 10^2} = 0.8633 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$$

Como la densidad del aire a presión atmosférica estándar es 0.125 kg seg²/m⁴, el túnel debe controlarse con una presión de 6 atm, aproximadamente, para alcanzar la densidad deseada.

De la Ec. (5.12) la escala de fuerza es

$$F_e = \frac{(0.59 \times 10^2)^2}{1.18 \times 10^2} = 29.5$$

La fuerza de resistencia en prototipo será entonces:

$$F_p = 29.5 \, F_m$$

Problema 5.2. Un aceite con viscosidad cinemática de $\nu = 0.14$ cm²/seg fluye en un tubo de 0.76 m de diámetro a una velocidad media de 2.44 m/seg. ¿A qué velocidad debería fluir agua en un tubo de 0.076 m, para que exista similitud dinámica, si la viscosidad cinemática de la misma es de 0.01 cm²/seg?

Solución. Si los subíndices 0 y w denotan aceite y agua respectivamente, se tiene que $Re_0 = Re_w$

$$\frac{V_0 D_0}{\nu_0} = \frac{V_w D_w}{\nu_w}$$

o bien

$$\frac{244 \times 76}{0.14} = \frac{V_w \times 7.6}{0.01}$$

$$V_w = \frac{244 \times 76 \times 0.01}{7.6 \times 0.14} = 174$$

$$V_w = 1.74 \text{ m/seg}$$

Sistemas a superficie libre. En este caso, la presión relativa (medida a partir de la atmosférica en un punto cualquiera) no se puede modificar arbitrariamente sin afectar la geometría de la superficie libre. Como la fuerza de gravedad es la más importante, el número de Froude debe ser igual en el modelo y el prototipo, o sea:

$$\frac{v_e}{\sqrt{g_e l_e}} = 1$$

La escala de velocidades, suponiendo que $g_p = g_m$, es

$$v_e = \sqrt{l_e} \quad (5.14)$$

Si las fuerzas viscosas tuvieran importancia (simultáneamente el número de Reynolds), se pueden igualar las Ecs. (5.9) y (5.14), entonces la escala de líneas sería:

$$l_e = \nu_e^{2/3}$$

Para la similitud dinámica de las fuerzas de gravedad y viscosas, simultáneamente, la escala de líneas queda sujeta a la selección de los fluidos en ambos sistemas o viceversa. Así, se tiene el caso del flujo de infiltración a superficie libre de una presa. Debido a que el intervalo de viscosidades cinemáticas en los líquidos comunes es muy limitado, usualmente es difícil satisfacer la condición anterior a menos que el modelo se construya prácticamente del mismo tamaño que el prototipo.

En la mayoría de los flujos a superficie libre (canales, vertedores, salto hidráulico, compuertas, válvulas, ondas superficiales, modelos marítimos, etcétera) los efectos viscosos carecen de importancia y el efecto de fricción provoca pequeños cambios en el aspecto dinámico del flujo. Puede ser así que el número de Froude sea la ley de similitud escogida, cuidando tan sólo de que el de Reynolds se encuentre dentro del intervalo necesario para que se tenga el mismo tipo de flujo en ambos sistemas. En algunos casos debe procurarse reproducir la rugosidad en el modelo para que haya similitud en los efectos de fricción; por ejemplo, cuando se trata de canales, ríos y estuarios (en los que es necesario producir grandes rugosidades para lograr esa similitud) se requiere gran experiencia y buen juicio para interpretar los resultados.

Si conforme al número de Froude únicamente se necesita la similitud, la ecuación (5.14) es válida y la escala de tiempos es:

$$t_e = \sqrt{l_e} \quad (5.15)$$

la de gastos será:

$$Q_e = v_e A_e = l_e^{5/2} \quad (5.16)$$

de aceleraciones

$$a_e = g_e = 1$$

y de fuerzas

$$F_e = \rho_e l_e^3 g_e = \gamma_e l_e^3 \quad (5.17)$$

Problema 5.3. Determinar las escalas de velocidad, gasto y fuerzas, para un modelo construido a escala $l_e = 100$ de una obra de excedencias que descargará un gasto de 10 000 m³/seg.

Solución. El fenómeno que se presenta está sujeto a la ley de Froude, por lo que si se aplica la Ec. (5.14) la escala de velocidades resulta:

$$v_e = \sqrt{100} = 10$$

o sea, que para obtener las velocidades del prototipo se necesita multiplicar por 10 las velocidades medidas en el modelo.

De la Ec. (5.16), la escala de gastos vale:

$$Q_e = 100^{5/2} = 100\,000$$

entonces el gasto que deberá fluir en el modelo es

$$Q_m = \frac{10\,000}{100\,000} = 0.1 \text{ m}^3/\text{seg} = 100 \text{ lt/seg}$$

La escala de fuerzas, para $\gamma_e = 1$, de la Ec. (5.17) resulta ser

$$F_e = 1 \times 100^3 = 1\,000\,000$$

Problema 5.4. Un barco tiene una longitud de 134 m y un área del casco en contacto con el agua de 2 320 m². Un modelo del mismo, con una longitud de 4.27 m, tiene una resistencia total de 1.81 kg cuando se mueve a 1.53 m/seg en un tanque de agua dulce. Esta resistencia incluye, tanto la de fricción y presión sobre la superficie del casco en contacto con el agua, como la debida al oleaje. La resistencia por fricción o de superficie se determina a partir de la fórmula experimental:

$$\tau = k\, v^n$$

donde:

- k coeficiente;
- n exponente variable de acuerdo con el acabado de la superficie;
- v velocidad del barco, en m/seg;
- τ esfuerzo de fricción sobre el casco, en kg/m².

El barco en agua salada tiene una resistencia, por fricción de 4.39 kg/m² a 3 m/seg, siendo $n = 1.85$. Para el modelo en agua dulce los valores correspondientes son 1.465 kg/m² a 3 m/seg y $n = 1.9$. Calcular: *a*) la velocidad del prototipo para las condiciones del modelo; *b*) la potencia que debe proporcionarse a la hélice del barco para el agua salada, de peso específico 1 030 kg/m³, suponiendo que hay en la hélice una eficiencia del setenta por ciento.

Solución. Por tratarse de un fenómeno a superficie libre, la ley de similitud que debe usarse es la de Froude. Para una escala lineal $l_e = 134/4.27 = 31.4$, de la Ec. (5.14), la escala de velocidades es:

$$v_e = \sqrt{l_e} = \sqrt{31.4} = 5.6$$

y la velocidad del prototipo será:

$$v_p = 5.6 \times 1.53 = 8.57 \text{ m/seg}$$

De la fórmula de resistencia de fricción

o de superficie aplicada al modelo; con $\tau = 1.465$ kg/m²; $v = 3$ m/seg; $n = 1.9$, resulta:

$$k = \frac{\tau}{v^n} = \frac{1.465}{3^{1.9}} = 0.182$$

El área mojada del casco en el modelo será entonces

$$A_m = \frac{2\,320}{(31.4)^2} = 2.35 \text{ m}^2$$

Sin considerar la resistencia por presión, la fuerza de resistencia por fricción, en el modelo a 1.53 m/seg, vale:

$$F_T = 0.182 \times 1.53^{1.9} \times 2.36 = 0.96 \text{ kg}$$

Por lo que la resistencia por oleaje es, en este caso:

$$F_0 = 1.81 - 0.96 = 0.85 \text{ kg}$$

Para $\gamma_e = 1\,030/1\,000 = 1.03$, de la ecuación (5.17) la escala de fuerzas es:

$$F_e = 1.03 \times (31.4)^3 = 31\,888$$

y la fuerza de resistencia por oleaje, en el prototipo, es

$$F_p = 0.85 \times 31\,888 = 27\,105 \text{ kg}$$

Con $\tau = 4.39$ kg/m²; $v = 3$ m/seg; $n = 1.85$; de la ecuación de resistencia a la fricción vemos que:

$$k = \frac{4.39}{(3)^{1.85}} = 0.575$$

y la fuerza de resistencia por fricción, para $v_p = 8.59$ m/seg en el prototipo, vale

$$F_T = 0.575 \times (8.59)^{1.85} \times 2\,320 = 71\,292 \text{ kg}$$

y la fuerza de resistencia total en el prototipo:

$$F_T = 27\,105 + 71\,292 = 98\,397 \text{ kg}$$

El trabajo mecánico —por segundo— que debe realizar el barco para vencer esta resistencia es

$$T_m = 98\,397 \times 8.59 = 845\,233 \text{ kg m/seg}$$

y la potencia que debe proporcionarse a la flecha:

$$P = \frac{845\,233}{0.7 \times 76} = 15\,888\ HP$$

Los resultados anteriores son válidos cuando existe similitud geométrica exacta. En ocasiones, para evitar la influencia de la tensión superficial cuando el tamaño del modelo es muy pequeño, es necesario distorsionarlo, es decir, forzar a una escala de dimensiones verticales distinta de las horizontales. El hecho de que el número de Froude sea igual para el modelo y el prototipo, sigue siendo válido, esto es:

$$\frac{v_e}{\sqrt{g_e\, l_{ev}}} = 1$$

y con $g_p = g_m$

$$v_e = \sqrt{l_{ev}} \quad (5.18)$$

$$t_e = \sqrt{l_{ev}} \quad (5.19)$$

$$Q_e = v_e A_e = \sqrt{l_{ev}}\, l_{ev}\, l_{eh} = l_{ev}^{3/2}\, l_{eh} \quad (5.20)$$

$$F_e = \rho_e\, l_{ev}\, l_{eh}^2\, g_e = \gamma_e\, l_{ev}\, l_{eh}^2 \quad (5.21)$$

Problema 5.5. Resolver el problema 5.3 tomando en cuenta que $l_{eh} = 100$, $l_{ev} = 50$.

Solución. De la Ec. (5.18) la escala de velocidades es

$$v_e = \sqrt{50} = 7.07$$

De la Ec. (5.20) la escala de gastos es:

$$Q_e = 50^{5/2} \times 100 = 35\,355$$

luego, el gasto del modelo debe ser:

$$Q_m = \frac{10\,000}{35\,355} = 0.283 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Casos especiales. El número de Euler se utiliza frecuentemente así:

$$C_p = \frac{2\,\Delta p}{\rho v^2} = \frac{2}{Eu} \qquad (5.22a)$$

En este caso recibe el nombre de *coeficiente de presión*. El *número de cavitación* es una forma del coeficiente de presión cuando se utiliza un origen de referencia para medir la misma. Es factible que la presión de referencia sea la de vaporización o la de cavitación; esto se puede representar como

$$\sigma = \frac{p - p_{ref}}{\rho v^2/2} \qquad (5.22b)$$

Si la presión de vaporización es el origen de referencia, entonces:

$$\sigma_v = \frac{p - p_v}{\rho v^2/2} \qquad (5.22c)$$

y si el origen es la presión de cavitación, entonces resulta que

$$\sigma_c = \frac{p - p_c}{\rho v^2/2} \qquad (5.22d)$$

El número de cavitación se emplea como parámetro adimensional para establecer la semejanza en las máquinas hidráulicas rotatorias (bombas y turbinas). Es frecuente suponer que la semejanza en cavitación existe si el número es el mismo para dos condiciones de flujo cavitante, si bien esto no ha sido plenamente comprobado.

El número de Euler admite otras variantes de acuerdo con el tipo de flujo que se trate. Si es compresible, la densidad depende de los cambios de presión de acuerdo con la ley dada por la Ec. (1.13), siendo el cuadrado de la velocidad del sonido:

$$c_p^2 = \frac{dp_p}{d\rho_p}$$

que para el modelo sería:

$$(c_e^2)\, c_m^2 = \left(\frac{p_e}{\rho_e}\right)\left(\frac{dp_m}{d\rho_m}\right)$$

Se puede, entonces, escribir que $p_e/\rho_e = c_e^2$, o bien $c^2 = p/\rho$. de manera que substituyendo en el número de Euler se define otro número, importante en los fenómenos de compresibilidad, que recibe el nombre de *número de Cauchy*. Tomando en consideración la Ec. (1.13) se acostumbra escribir en términos del módulo de elasticidad volumétrico del fluido, E_v; esto es:

$$Ca = \frac{v^2}{c^2} = \frac{\rho v^2}{E_v} \qquad (5.23)$$

o bien, en la forma conocida como *número de Mach*:

$$Ma = \frac{v}{\sqrt{E_v/\rho}} \qquad (5.24)$$

Este número es el cociente de las fuerzas de inercia entre las fuerzas elásticas, y relaciona propiamente la velocidad carac-

terística del fluido y la celeridad con que se transmiten las ondas del sonido en el mismo; es importante en fenómenos relacionados con la compresibilidad de los gases. En el aire esto ocurre para velocidades del viento superiores a 150 m/seg, o sea, números de Mach mayores que $Ma = 150/360 \approx 0.4$.

A excepción de los casos de flujo no permanente, en especial problemas de golpe de ariete, la semejanza basada en el número de Mach tiene pocas aplicaciones en los ensayos con modelos hidráulicos. Aun en los problemas de golpe de ariete rara vez se usan modelos en tal sentido, debido a que éstos se estudian mejor analíticamente. El ensayo aerodinámico en túneles de viento con velocidades supersónicas ha conducido a una aplicación intensiva del parámetro.

Problema 5.6. Un cohete que vuela a velocidades correspondientes a un número de Mach, $Ma = 3$, en aire estándar (15°C) se desea estudiar por medio de un modelo a escala $l_e = 10$, en un túnel de viento a —40°C. ¿Cuál es la velocidad a la que vuela el prototipo?

Solución. De las Ecs. $c = \sqrt{dp/d\rho} = \sqrt{E_v/\rho}$; $c = \sqrt{\kappa g R_0 T}$ y (5.24); con $T_m = 273 - 40 = 233$ resulta:

$$Ma_p = Ma_m = \frac{v_m}{\sqrt{\kappa g R_0 T_m}} = \frac{v_p}{\sqrt{\kappa g R_0 T_p}} = 3$$

$$v_m = 3\sqrt{1.4 \times 9.8 \times 29.27 \times 233}$$

$$v_m = 918 \text{ m/seg}$$

y con $T_p = 273 + 15 = 288$

$$v_p = 3\sqrt{1.4 \times 9.8 \times 29.27 \times 288}$$

$$v_p = 1\,020 \text{ m/seg.}$$

La fuerza debida a la tensión superficial no se incluye normalmente en la derivación de las ecuaciones del movimiento (Ec. 4.8). Sin embargo, si dicha fuerza es importante, puede obtenerse el número llamado de *Weber*.

$$We = \frac{v^2}{\sigma/\rho\, l} \qquad (5.25a)$$

o bien:

$$We = \frac{v}{\sqrt{\sigma/\rho\, l}} \qquad (5.25b)$$

La ley de Weber raramente se emplea en las pruebas con modelos. Aquellos casos en que las fuerzas de tensión superficial gobiernan el movimiento (como las ondas capilares en pequeños canales y el movimiento capilar en los suelos) no tienen trascendencia en los problemas de ingeniería hidráulica.

Los efectos de la tensión superficial algunas veces interfieren como factores indeseables en los modelos; sin embargo, en la mayoría de los flujos de líquidos la tensión superficial raramente afecta el flujo y en los modelos de ríos, por ejemplo, éstos deben ser lo suficientemente grandes para minimizar la influencia de dicha fuerza. El papel de la tensión superficial en la cavitación no ha sido completamente estudiado.

En el caso de sistemas a superficie libre con poco tirante y baja velocidad, en que llegara a tener importancia la tensión superficial, la ley de similitud sería:

$$\frac{v_e^2\, \rho_e\, l_e}{\sigma_e} = 1$$

y la escala de velocidades

$$v_e = \sqrt{\frac{\sigma_e}{\rho_e\, l_e}} \qquad (5.26)$$

la de tiempos

$$t_e = l_e^{3/2} \sqrt{\rho_e/\sigma_e} \qquad (5.27)$$

y, por último, la de fuerzas:

$$F_e = \sigma_e l_e \qquad (5.28)$$

La validez simultánea de las leyes de Froude y Weber no es posible; esto es, no se puede lograr semejanza dinámica en fenómenos —por ejemplo— de la descarga de un vertedor u orificio con cargas bajas.

La similitud dinámica en la maquinaria hidráulica se establece con los parámetros adimensionales obtenidos en el Apéndice A.

Las aproximaciones en las leyes de similitud y las dificultades inherentes a la similitud geométrica exacta, se conocen comúnmente con el nombre de *efectos de escala*, los cuales pueden tener muy diversos orígenes. La estimación aproximada de dichos efectos no es posible si se construyen modelos de diferente tamaño y se comparan los resultados obtenidos, deduciendo con ello la verificación o aproximación de la ley de similitud utilizada.

Para complementar este capítulo se recomienda la lectura del Apéndice A.

5.5 Planeación y construcción del modelo

Desde el punto de vista de la economía, el modelo debe ser tan pequeño como sea posible y, aún así, obtenerse resultados válidos. Sin embargo, es necesario considerar que los modelos demasiado pequeños pueden resultar incómodos para efectuar mediciones adecuadas. En un modelo a escala mediana habrá mayor flexibilidad para obtener con mayor facilidad los objetivos perseguidos, si bien éstos implican disponibilidad de espacio y suficiente caudal de agua.

No existen reglas específicas para elegir la escala de un modelo hidráulico, a pesar de ser uno de los factores más importantes en la planeación del modelo. Una buena práctica es la de procurar siempre que exista semejanza geométrica exacta, a menos de haber razones de peso para optar por modelos distorsionados.

Los planos del modelo, lo más aproximado posible, evitan los errores con el consiguiente ahorro en el tiempo de construcción. Aquellos pueden ser esquemas y bosquejos para construcciones más o menos rutinarias, o bien planos minuciosamente detallados de las porciones más importantes y críticas del modelo.

El modelo no necesita ser estrictamente igual al prototipo; si las superficies sobre las cuales fluye el agua se reproducen en su forma, el modelo usualmente cumplirá con su cometido. Los modelos para vertedores pueden construirse de lámina metálica sobre bastidores. Los lechos de ríos o canales se pueden modelar con mortero de cemento sobre tela metálica o construyendo sobre plantillas las disposiciones adecuadas de grava y arena. El uso de los materiales plásticos es particularmente apropiado para la simulación de conductos de acero o mampostería para facilitar la observación visual.

Las escalas distorsionadas son empleadas cuando es necesario apartarse de la similitud geométrica para servir objetivos definidos y limitados. Generalmente se debe recurrir a la distorsión de los modelos de canales fluviales, puertos y estuarios, para los cuales las dimensiones horizontales son muy grandes en proporción a las dimensiones verticales. En tales casos, las escalas horizontales están limitadas por el espacio y por restricciones de costo. Cuando las dimensiones resultantes en el modelo, en lo que se refiere a tirantes y pendientes, son muy pequeñas para producir resultados significativos, se requerirá una escala vertical distorsionada, la cual no conviene que sea mayor de cinco veces la escala horizontal.

PROBLEMAS

1. a) ¿Qué papel juega la experimentación en el análisis de problemas de flujo?
   b) ¿En qué se basa la teoría de la similitud?
   c) Indique las leyes más importantes de similitud y en qué tipos de problemas se aplica cada una de ellas.

2. Indique las fuerzas principales que intervienen en los siguientes problemas y elija las leyes de similitud más adecuadas para su estudio.
   a) Flujo en la descarga de una compuerta.
   b) Flujo a través de la transición en un canal abierto.
   c) El empuje del oleaje sobre un rompeolas.
   d) El flujo a través de un tubo de diámetro grande o pequeño.
   e) El flujo a través de una válvula abierta.

3. Para la elaboración de modelos, de las siguientes situaciones de flujo, establezca para cada una de ellas —si son importantes— las leyes de similitud de Reynolds, Froude, Mach o una combinación de éstas.
   a) Flujo en el modelo de un vertedor en un río.
   b) El movimiento del sedimento en un río.
   c) Depósito de sedimento en una presa.
   d) Erosión de las playas.
   e) Flujo de un gas —a gran velocidad— en un tubo.
   f) La resistencia al movimiento de un barco en el mar.

4. El flujo de agua en un tubo de 19 mm de diámetro se vuelve turbulento a la velocidad de 0.116 m/seg. Determinar la velocidad máxima para la cual el flujo de aire sería laminar en un tubo, de 38 mm de diámetro, de construcción similar. Considerar 10°C para el agua y 20°C para el aire.

5. Un puente está soportado por pilas cilíndricas lisas de 0.30 m de diámetro. Encontrar la fuerza, sobre cada una de ellas, que ejerce una corriente de 3.35 m de tirante y 4 m/seg de velocidad, suponiendo que el empuje por m de longitud de un cilindro circular largo (de 0.25 m de diámetro) probado en aire, es como sigue:

Velocidad (m/seg)	23.5	36.9	47	58.3
Empuje (kg/m)	2.41	7.94	15.47	25.22

   Considere 15°C de temperatura para el aire y 4°C para el agua.

6. Un modelo para estudiar la marea en el estuario de un río tiene una escala de líneas horizontales 1:7296. Si el período de la marea en el modelo debe ser de 62.5 seg, correspondiente a 12 h 56 min en el prototipo, determinar la escala de líneas verticales más adecuada en el modelo y derivar una expresión para su cálculo.

7. El modelo de un barco de escala 1:30 se va a construir en un laboratorio.
   a) Determinar la velocidad a que debe moverse dicho modelo para una de 37 km/h en prototipo.
   b) Determinar la fuerza de resistencia al movimiento que se producirá en el prototipo, si en el modelo se miden 0.15 kg.
   c) Calcular la potencia que debe proporcionarse a la flecha de la hélice, si la eficiencia de la misma es del 88 %.

8. Una pila rectangular de un puente sobre un río tiene un espesor de 1.20 m, 3.65 de ancho, para un tirante medio en el río de 2.75 m. Un modelo de escala 1:16 se ha probado con una velocidad de 0.76 m/seg, obteniéndose una fuerza, que actúa sobre la pila, de 0.409 kg.
   a) Determinar los valores correspondientes a la velocidad y fuerza en el prototipo.
   b) En el modelo se observó una onda estacionaria de 4.9 cm de altura al frente de la pila y se desea conocer la altura que tendrá en el prototipo.
   c) De acuerdo con la definición de coeficiente de arrastre del problema 4.22, determinar el mismo para la pila en el modelo y el prototipo.

9. Determinar la fuerza que el oleaje produce sobre un muro, si se ha encontrado que la misma sobre un modelo de escala 1:36, de 0.92 m de longitud, es de 12.25 kg.

10. El modelo de un vertedor está construido a escala 1:45. Cuando la carga sobre la cresta es de 0.05 m, el gasto es de 42.9 lt/seg. Determinar la carga y gasto correspondientes al prototipo.

11. El gasto en un río es de 1 430 m³/seg. Se ha construido un modelo a escala horizontal 1:70 y a escala vertical 1:20. Determinar el gasto con que debe alimentarse el modelo.

12. Se desea construir el modelo de una presa, en un proyecto hidroeléctrico, para estudiar su funcionamiento. El gasto máximo en el río es de 3 430 m³/seg y el gasto máximo disponible en el laboratorio, para estudios en el modelo, es de 114 lt/seg. Determinar las escalas horizontal y vertical máximas, para que haya similitud en los flujos, suponiendo que la distorsión en el modelo es con una escala horizontal de tres veces la vertical.

13. Un modelo de mareas en un estuario está construido a escala 1:3600 de la horizontal-1:81 de la vertical. Determinar el período de la marea, en el modelo, si en el prototipo es de 12.4 horas.

14. El venturímetro es un dispositivo utilizado para aforar el gasto en una tubería (Cap. 9). Un modelo de este dispositivo ha sido construido a escala $l_e = 5$. El prototipo trabaja con agua a 20°C y el modelo con agua a 80°C. Para un diámetro de garganta de 0.60 m y una velocidad en ella, de 6 m/seg, determinar el gasto necesario en el modelo para que haya semejanza en fuerzas viscosas.

15. *a)* Suponiendo que el coeficiente de arrastre de un cilindro es $C_D = 4/3$ (Prob. 4.22), determinar la fuerza de arrastre (por metro de longitud) que ejerce el viento, a la velocidad de 50 km/h y 10°C de temperatura, sobre una chimenea cilíndrica de 0.80 m de diámetro.

b) ¿Qué fuerza se originaría sobre un modelo a escala $l_e = 20$ si se realizaran los ensayos en agua a 20°C? ¿Cuál sería la velocidad del agua?

c) Comentar la conveniencia de realizar los ensayos con agua.

16. El empuje y el momento de flexión en una estructura expuesta al viento con velocidad de 96 km/h, se va a estudiar en un modelo de escala 1:20 en un túnel de viento presurizado, donde el aire tiene 8 veces la densidad correspondiente a la presión atmosférica, pero a la misma temperatura.

a) Determinar la velocidad con que debe efectuarse la prueba en el túnel de viento.

b) ¿Cuál debe ser el momento de flexión en el prototipo, para un valor de 26.9 kg m medido en el modelo?

17. Se desea determinar la fuerza de resistencia de una mina marina, en una corriente de 6 km/h, en un túnel de viento con un modelo a escala 1:3.

a) Determinar la velocidad que debe producirse en el túnel, si para el agua salada $\nu = 0.13 \times 10^{-5}$ m²/seg y para el aire $\nu = 0.14 \times 10^{-4}$ m²/seg.

b) Determinar la resistencia de la mina marina si en el modelo se obtiene 1.4 kg y la relación de densidades del agua salada al aire es 796.

18. En un experimento fluye agua en un tubo cuadrado de 0.05 m de lado con velocidad de 3.66 m/seg y la pérdida de energía es de 0.95 kg m/kg en una longitud de 3 m. Encontrar la velocidad correspondiente para el flujo de aire en un ducto cuadrado de 1 m de lado y calcular la pérdida en m de columna de agua en una longitud de 92 m, a esa velocidad. La temperatura del agua es de 10°C y la del aire de 20°C.

19. Una esfera de ciertas dimensiones cae en el agua a una velocidad de 1.525 m/seg y experimenta una fuerza de resistencia a la caída de 0.455 kg; otra esfera (el doble de diámetro) se coloca en un túnel de viento. Encontrar la velocidad que debe tener el aire para obtener similitud dinámica, así como la resistencia a esa velocidad, si el agua tiene 14°C de temperatura y el aire 20°C.

20. El flujo de un gas en un ducto uniforme se quiere simular por medio del flujo de agua en un modelo transparente a escala $l_e = 4$. Se espera que la velocidad del gas en el prototipo sea de 24.4 m/seg, para una viscosidad 62 veces mayor que la del agua. Determinar:

a) la velocidad del agua correspondiente al modelo;

b) la caída de la presión que se espera en el prototipo, por unidad de longitud, si la correspondiente al modelo es de 0.14 kg/cm².

21. Determinar una expresión para las escalas de velocidad y pérdidas de energía, para un flujo donde las fuerzas de viscosidad y de presión son dominantes.

22. En una tubería de 0.25 m de diámetro fluye aceite de viscosidad cinemática $\nu = 5.62 \times 10^{-6}$ m²/seg y peso específico $\gamma = 800$ kg/m³. Determinar la velocidad a que debe fluir agua a 15°C, por la tubería, para tener un flujo dinámicamente semejante. Explicar por qué puede remplazarse por $F/\rho V^2 D^2$ el número de Euler, si F es una fuerza característica y D alguna longitud también característica. ¿Cuál es la relación de las resistencias producidas por los dos flujos, para longitudes correspondientes?

23. Se propone la construcción de un modelo de escala 1:10, de una turbina de agua para estudiar el flujo en la misma. En el modelo se propone usar aire a 1.406 kg/cm² de presión absoluta. Calcular la escala de gastos que deba usarse para lograr similitud dinámica en los flujos, considerando que la temperatura de operación en el prototipo y el modelo, es de 16°C.

24. Para determinar las pérdidas de energía globales, en el sistema de tuberías de una estación de bombeo de agua, se ensaya con un modelo reducido a escala $l_e = 5$; se dispone de aire a 27°C y 1 kg/cm² de presión absoluta. Para un prototipo por el que circula agua a 15°C (a través de una tubería de 4 m de diámetro) a una velocidad de 0.5 m/seg, determinar la velocidad del aire y el gasto necesario en el modelo, así como la manera de determinar las pérdidas en el prototipo a partir de las mediciones en el modelo.

25. La válvula de aguja —mostrada en la figura— tiene un diámetro $D_p = 2$ m y trabaja con una carga $H_p = 100$ m. Se ha probado un modelo hidráulico de la misma, el cual tiene un diámetro $D_m = 0.2$ m y con una carga $H_m = 6$ m descarga un gasto $Q_m = 206$ lt/seg. Bajo estas condiciones de trabajo se ha medido el empuje dinámico del flujo sobre el cuerpo de la aguja y alcanza el valor $P_m = 60$ kg. Determinar:

a) El gasto Q que descargará la válvula para las condiciones en que funciona el prototipo;

b) El empuje dinámico P en el prototipo para esas condiciones.

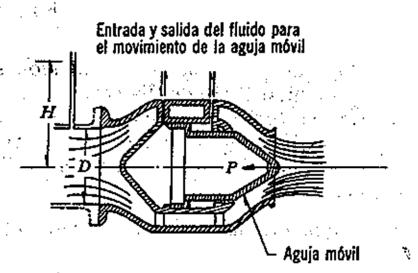


Figura del problema 25

Considerar que el flujo es completamente turbulento y, por lo mismo, independiente del número de Reynolds. Esto es, la ley de semejanza a utilizar es la de Euler; y el fluido en ambos es agua.

26. Un venturímetro, destinado a la medición de gastos de kerosina, tiene un diámetro de salida $D = 300$ mm y en la garganta $d = 150$ mm. Su calibración se efectúa por medio de un modelo con agua construido a escala 1:3. Determinar:

a) El gasto de agua Q_m en el modelo para observar la semejanza si el gasto de kerosina en el prototipo vale $Q_p = 100$ lt/seg. El coeficiente de viscosidad cinemática del agua, a 20°C, es $\nu = 0.01$ stokes y el de la kerosina a 10°C, es $\nu = 0.045$ stokes.

b) La pérdida de energía h_p y la caída de presión Δp_p, al medir el gasto en el prototipo, si durante la prueba en el modelo

se obtuvo $h_m = 0.2$ m y $\Delta p_m = 0.1$ kg/cm². El peso específico de la kerosina es $\gamma_p = 820$ kg/m³.

Considere como ley de semejanza la de Reynolds.

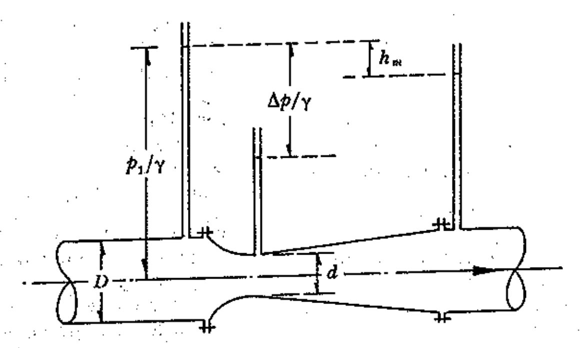


Figura del problema 26

27. Un flujo de kerosina ($\nu = 0.045$ stokes) a través de un orificio de diámetro $d = 75$ mm, se estudia con un modelo de agua ($\nu_m = 0.01$ stokes) en el cual se conserva la semejanza de viscosidad y gravedad. Determinar:

a) El diámetro del orificio d_m para el modelo;
b) la relación que deben guardar la carga del prototipo h_p y del modelo h_m;
c) la relación entre el gasto del prototipo Q_p y del modelo Q_m.

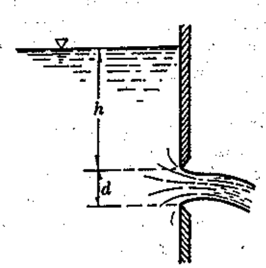


Figura del problema 27

28. El escurrimiento de agua por debajo de una compuerta radial se estudia en un modelo a escala 1:10. Determinar:

a) La carga H_m que se debe tener en el modelo si en el prototipo $H_p = 4$ m;
b) el gasto Q_p y la velocidad V_p en la sección contraída para la compuerta del prototipo, si durante la prueba se obtuvo $Q_m = 155$ lt/seg y $V_m = 1.3$ m/seg;
c) la fuerza dinámica F_p que produce el flujo sobre el prototipo, si en el modelo se midió $F_m = 5.5$ kg.

El modelo se llevó a cabo según la ley de similitud de Froude.

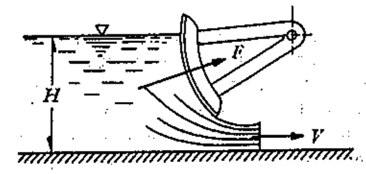


Figura del problema 28

29. Una cortina vertedora se investiga en el laboratorio con un modelo, geométricamente semejante, construido a escala 1:20. Determinar:

a) La carga h_m en el vertedor necesaria en el modelo, si en el prototipo $h_p = 3$ m;
b) el gasto en el prototipo, si en el modelo fue $Q_m = 0.19$ m³/seg;
c) la carga de presión sobre la cresta del vertedor en prototipo, si en el modelo se obtuvo una presión de vacío $\left(\frac{p}{\gamma}\right)m = 200$ mm de columna de agua.

En vista del poco efecto de la viscosidad, el modelo se probó de acuerdo con la ley de Froude.

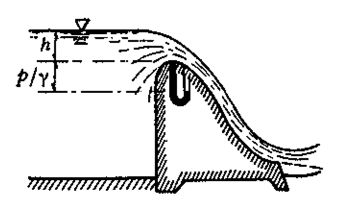


Figura del problema 29

30. Por medio de un modelo experimental se desea establecer la profundidad mínima (h_{min}) a la que debe colocarse el tubo de succión de una bomba (desde la superficie libre del agua) en el cárcamo, para que no se produzcan vórtices en la entrada y no exista succión de aire. El líquido que se bombea es petróleo ($\nu = 0.75$ stokes) con un gasto $Q = 140$ lt/seg; el diámetro del tubo de succión $d = 250$ mm; la prueba se desea efectuar con un modelo de semejanza geométrica a escala 1:5. Debido a que las condiciones de entrada de petróleo al tubo —en el caso dado— se definen por el efecto conjunto de las propiedades de inercia, viscosidad y gravedad del líquido, es necesario observar en el modelo la igualdad de los números de Reynolds y Froude. Determinar:

a) La viscosidad ν_m del líquido que debe ser usado en el modelo;
b) el gasto Q_m en el modelo y con este gasto la velocidad V_m en el tubo del modelo;
c) la profundidad h_{min} a la que dejan de formarse vórtices en el prototipo, si en el modelo se obtuvo $h_{min} = 60$ mm.

Para obtener (en el modelo) un líquido de la calidad deseada se puede utilizar una solución de glicerina en agua, que modifica la viscosidad en proporción a los componentes (a una temperatura de 20°C) desde $\nu = 0.01$ stokes (para agua pura) a $\nu = 8$ stokes (para la glicerina).

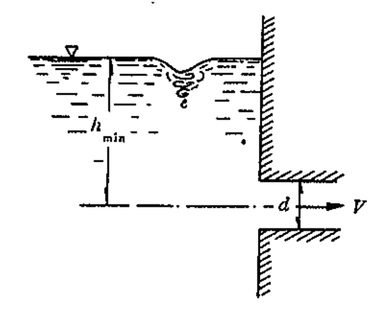


Figura del problema 30

31. Considere un líquido que fluye bajo condiciones en que los efectos de viscosidad, gravedad y tensión superficial, sean aproximadamente de igual importancia. Determinar la relación entre las propiedades de los fluidos para obtener similitud dinámica.

32. Calcular la velocidad del sonido en el agua a una presión de 1 kg/cm² y a una temperatura de 20°C. Suponer que los efectos de compresibilidad son despreciables para los números de Mach menores de 0.1. Determinar la velocidad que alcanzaría un proyectil viajando dentro de agua, para que los efectos de compresibilidad sean importantes en la resistencia total.

33. Demostrar que las escalas de tiempo y velocidad, cuando la elasticidad es la fuerza dominante, son:

$$t_e = \frac{l_e}{\sqrt{E_{ve}/\rho_e}} \quad ; \quad v_e = \sqrt{E_{ve}/\rho_e}$$

34. Un proyectil que viaja con un número de Mach igual a 3, en aire estándar (15°C), se estudia por medio de un modelo a escala 1:10, en un túnel de viento a −40°C. Determinar la velocidad del viento en el túnel y la velocidad a que vuela el prototipo.

6

ORIFICIOS Y COMPUERTAS

6.1 Ecuación general de los orificios

Considere un recipiente lleno de un líquido, en cuya pared lateral se ha practicado un orificio de pequeñas dimensiones (en comparación con su profundidad H) y cualquier forma, además de una área A. El orificio descarga un gasto Q cuya magnitud se desea calcular, para lo cual se supone que el nivel del agua en el recipiente permanece constante por efecto de la entrada de un gasto idéntico al que sale; o bien porque posea un volumen muy grande. Además, el único contacto entre el líquido y la pared debe ser alrededor de una arista afilada como se muestra en la Fig. 6.1; esto es, el orificio es *de pared delgada*. Las partículas de líquido en la proximidad del orificio se mueven aproximadamente en dirección al centro del mismo, de modo que, por efecto de su inercia, la deflexión brusca que sufren produce una contracción del chorro, la cual se alcanza en la sección 2. A esta sección se le llama *contraída* y tiene una área A_c inferior al área A del orificio. En ella las velocidades de las partículas son prácticamente uniformes y con un valor medio V.

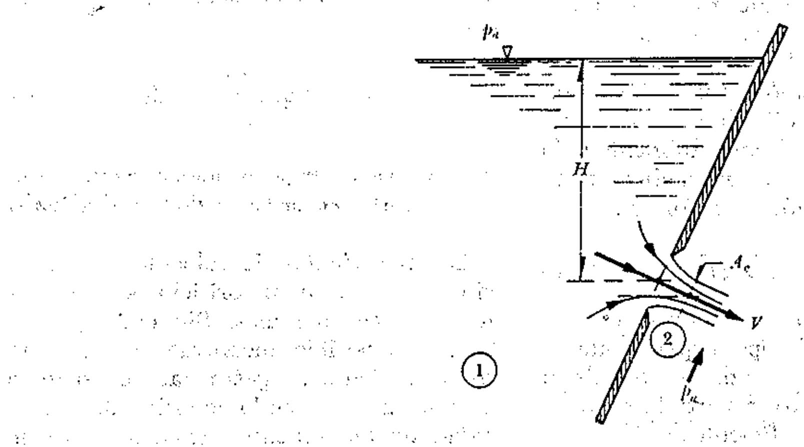


Figura 6.1. Orificio de pared delgada.

Suponiendo un plano de referencia que coincida con el centro de gravedad del orificio, la aplicación de la ecuación de Bernoulli (4.21) entre las secciones 1 y 2 de una vena líquida, además de considerar despreciable la velocidad de llegada al orificio, conduce a la expresión:

$$H = \frac{V^2}{2g}$$

donde se ha despreciado el desnivel entre los centros de gravedad del orificio y de la sección contraída. De aquí se obtiene:

$$V = \sqrt{2\,g\,H} \qquad (6.1)$$

La ecuación se llama de Torricelli y puede también obtenerse de la ecuación (4.14) de Bernoulli entre dos puntos: uno dentro del recipiente y otro en el centro de gravedad de la sección contraída. Esto es, la Ec. (6.1) indica que la velocidad sigue una ley parabólica con la profundidad y en este caso la velocidad media V, se calcula con la profundidad media del orificio y corresponde a su centro de gravedad, no obstante que las velocidades de las partículas arriba de este punto son menores y, abajo, mayores. Esto tendrá por supuesto mayor validez a medida que la dimensión transversal, no horizontal, del orificio sea mucho menor que la profundidad H del mismo. Es más, los resultados obtenidos de la Ec. (6.1) concuerdan con los obtenidos experimentalmente sólo si se corrigen, mediante un coeficiente C_v llamado de velocidad, en la forma:

$$V = C_v \sqrt{2\,g\,H} \qquad (6.2)$$

donde C_v, coeficiente sin dimensiones muy próximo a 1, es de tipo experimental y además corrige el error de no considerar en la Ec. (6.1), tanto la pérdida de energía Δh_r, como los coeficientes α_1 y α_2.

Si el área de la sección contraída se calcula en términos de la del orificio, por medio de un coeficiente C_c llamado de contracción (también sin dimensiones), en la forma:

$$A_c = C_c A$$

el gasto descargado por el orificio es entonces

$$Q = C_v C_c A \sqrt{2\,g\,H} \qquad (6.3)$$

o bien, con $C_d = C_v C_c$ (coeficiente de gasto), el gasto se calcula finalmente con la ecuación general de un orificio de pared delgada, a saber:

$$Q = C_d A \sqrt{2\,g\,H} \qquad (6.4)$$

Conviene aclarar que en las ecuaciones anteriores se consideró H como el desnivel entre la superficie libre y el centro de gravedad del orificio. Esto resultó de suponer que era despreciable la velocidad de llegada al orificio y que la presión sobre la superficie libre corresponde a la atmosférica. Cuando ello no acontece, H corresponde a la energía total; esto es, a la suma de la profundidad del orificio, de la carga de velocidad de llegada y de la carga de presión sobre la superficie del agua:

$$E = H + \frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} \qquad (6.5)$$

6.2 Coeficientes de velocidad, contracción y gasto, en orificios de pared delgada

Los coeficientes de velocidad, contracción y gasto, en un orificio, son básicamente experimentales. Sin embargo, en teoría es posible encontrar la magnitud del coeficiente de gasto para un orificio circular a partir de la ecuación de la cantidad de movimiento aplicada sobre un volumen de control limitado por la frontera del chorro en contacto con el aire, la sección contraída y, dentro del recipiente, por una superficie semiesférica de radio igual al del orificio (Fig. 6.2). Para hacer lo anterior, se designa como v_1 la velocidad de una partícula sobre la semiesfera de radio R, trazada en la Fig. 6.2, cuya dirección es radial al centro de la semiesfera.

La superficie de la semiesfera vale

$$A_1 = 2\,\pi\,R^2 \qquad (6.6)$$

y la correspondiente a la sección contraída:

$$A_c = C_c A = C_c \pi R^2 \qquad (6.7)$$

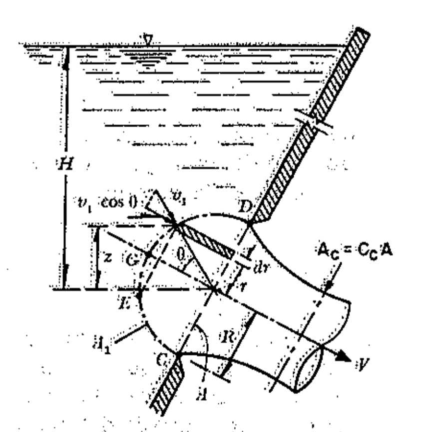


Figura 6.2. Derivación del coeficiente de contracción para un orificio de pared delgada.

De la ecuación de continuidad se obtiene

$$v_1 = \frac{A_c}{A_1} V$$

Substituyendo en esta ecuación a las Ecs. (6.6) y (6.7) resulta que

$$v_1 = \tfrac{1}{2} C_c V \qquad (6.8)$$

Para aplicar la ecuación de la cantidad de movimiento, es necesario conocer la velocidad media sobre la semiesfera en la dirección del escurrimiento. La componente paralela al eje del orificio de las velocidades v_1, sobre la superficie de la semiesfera, vale $v_1 \cos\theta$; es decir, que la variación es según una ley cosenoidal como se muestra en la Fig. 6.3. De este modo, la media de las componentes de la velocidad, sobre la superficie semiesférica, se obtiene por la igualación del volumen del cilindro $V_s \pi R^2$ con el volumen encerrado por la superficie de ley cosenoidal; o sea

$$V_s = \frac{v_1}{\pi R^2} \iint_A \cos\theta \, dA$$

y, con $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$, $dA = 2\,\pi\,r\,dr$; entonces

$$V_s = \frac{2\,v_1}{R^3} \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2}\, r\, dr$$

la integración conduce al resultado siguiente:

$$V_s = -\frac{2\,v_1}{3\,R^3}\left[(R^2 - r^2)^{3/2}\right]_0^R =$$

$$= -\frac{2\,v_1}{3\,R^3}[-R^3]$$

finalmente, se tiene que

$$V_s = \tfrac{2}{3}\,v_1 \qquad (6.9)$$

Substituyendo la Ec. (6.8) en la (6.9) resulta:

$$V_s = \frac{C_c}{3} V \qquad (6.10)$$

Por tanto, es posible evaluar los coeficientes β que intervienen en la ecuación de la cantidad de movimiento. Por una parte, el coeficiente β para la sección contraída

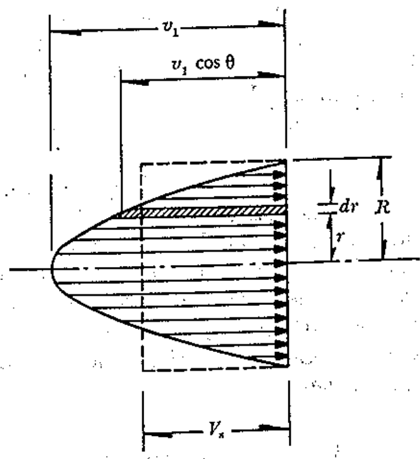


Figura 6.3. Distribución de las componentes de la velocidad normales a la sección del orificio.

vale 1, pues se supone que la distribución de la velocidad coincide con la media; sin embargo, el coeficiente β para la semiesfera tiene un valor distinto de 1 y resulta de la Ec. (4.17), a saber:

$$\beta_1 = \frac{\iint_A v_1^2 \cos^2\theta \, dA}{A V_s^2} \qquad (6.11)$$

De la Fig. 6.3, $dA = 2\pi r\, dr$ y además

$$\text{sen}^2\theta = \frac{r^2}{R^2}; \; \cos^2\theta = 1 - \frac{r^2}{R^2}$$

Con estas expresiones y considerando la Ec. (6.8) el valor de β_1 es:

$$\beta_1 = \frac{1}{A V_s^2} \int_0^R \frac{C_c^2 V^2}{3} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) 2\pi r\, dr =$$

$$= \frac{1}{A V_s^2} \frac{C_c^2 V^2}{2} \left[\frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi R^2}{4}\right]$$

y de la Ec. (6.10) resulta entonces que

$$\beta_1 = \frac{9}{\pi R^2 C_c^2 V^2} C_c^2 V^2 \frac{\pi R^2}{8} = \frac{9}{8} = 1.125 \quad (6.12)$$

Es necesario conocer las fuerzas que impulsan al volumen de agua limitado por la sección contraída y las secciones de la esfera; en un punto E sobre la semiesfera actúa la presión p. La ecuación de Bernoulli para una línea de corriente (ecuación 4.14), aplicada a este punto, es

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}$$

Si se acepta que la carga H es muy grande en comparación con el radio del orificio, puede entonces despreciarse z y, por tanto, sobre toda la semiesfera la presión será constante y de valor:

$$p = \gamma\left(H - \frac{v_1^2}{2g}\right)$$

Por lo cual la componente en la dirección del movimiento del empuje o fuerza total, sobre la superficie de la semiesfera, es

$$p\,A = \gamma\left(H - \frac{v_1^2}{2g}\right) A \qquad (6.13)$$

En la sección contraída actúa la presión atmosférica, por lo que la fuerza sobre dicha sección será cero. La masa del líquido descargada a través del orificio es

$$\frac{\gamma}{g} C_c A V$$

la cual se acelera desde la velocidad media V_s sobre la semiesfera, expresada por la Ec. (6.10), hasta la velocidad media V en la sección contraída. Así, de acuerdo con las Ecs. (6.8), (6.10), (6.12) y (6.13), la ecuación de la cantidad de movimiento se expresa como sigue:

$$\gamma A\left[H - \frac{1}{2g}\left(\frac{C_c V}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\gamma}{g} A C_c V \left(V - \frac{9}{8}\frac{C_c}{3} V\right)$$

Por otra parte, de la Ec. (6.2) se tiene que

$$H = \frac{1}{C_v^2} \frac{V^2}{2g}$$

con lo cual resulta:

$$\frac{V^2}{2g}\left[2 C_c - \frac{3}{4} C_c^2 + \frac{1}{4} C_c^2 - \frac{1}{C_v^2}\right] = 0$$

o bien, eliminando la carga de velocidad, se tiene que

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) C_c^2 - 2 C_c + \frac{1}{C_v^2} = 0$$

por tanto:

$$C_c^2 - 4 C_c + \frac{2}{C_v^2} = 0$$

Debido a que C_c debe ser menor que 1, la raíz válida en esta ecuación es la correspondiente al signo negativo del radical; así, se obtiene la ecuación:

$$C_c = 2 - \sqrt{4 - \frac{2}{C_v^2}} \qquad (6.14)$$

En la tabla 6.1 se presentan los valores de C_c y C_d calculados de la Ec. (6.14), para diferentes valores de C_v y de la definición de C_d.

TABLA 6.1. Coeficientes de gasto de la Ec. 6.14

C_v	1	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95
C_c	0.586	0.60	0.615	0.631	0.647	0.664
C_d	0.586	0.594	0.603	0.612	0.621	0.631

Mediante un análisis dimensional se comprueba (problema A.8, apéndice A) que los coeficientes de velocidad, contracción y gasto, son función exclusivamente del número de Reynolds. De acuerdo con los resultados de diferentes investigadores (Refs. 21, 22 y 23), para orificios circulares sus valores tienen la variación mostrada en la Fig. 6.4. Se observa que para números de Reynolds $Re > 10^5$, los coeficientes C_v, C_c y C_d son independientes de dicho número y adquieren los valores constantes siguientes:

$$C_v = 0.99$$

$$C_c = 0.605$$

$$C_d = 0.60$$

De la tabla 6.1 se tiene que para $C_v = 0.99$, la Ec. (6.14) proporciona los valores $C_c = 0.60$ y $C_d = 0.594$ que coinciden prácticamente con los coeficientes experimentales arriba indicados.

Por definición de coeficiente de contracción, para un orificio circular se obtiene

$$D = \sqrt{\frac{1}{C_c}}\, D_c \qquad (6.15)$$

y con $C_c = 0.605$, $D = 1.285\, D_c$; o bien, $D_c = 0.778\, D$.

Cuando se trata de orificios rectangulares de poca altura los coeficientes C_v, C_c y C_d, son prácticamente los mismos en la Fig. 6.4. En este caso (en lugar de D) en el número de Reynolds se utiliza la mínima dimensión a del orificio y en la ecuación (6.4) corresponde a su área $A = ab$ (b es la dimensión máxima del orificio).

Los resultados de la Fig. 6.4 son válidos siempre que se tenga una contracción completa, que se logra si la distancia entre los cantos del orificio y las fronteras del recipiente (pared lateral, fondo o superficie libre) es por lo menos $3D$ en orificios circulares, o $3a$ en orificios rectangulares.

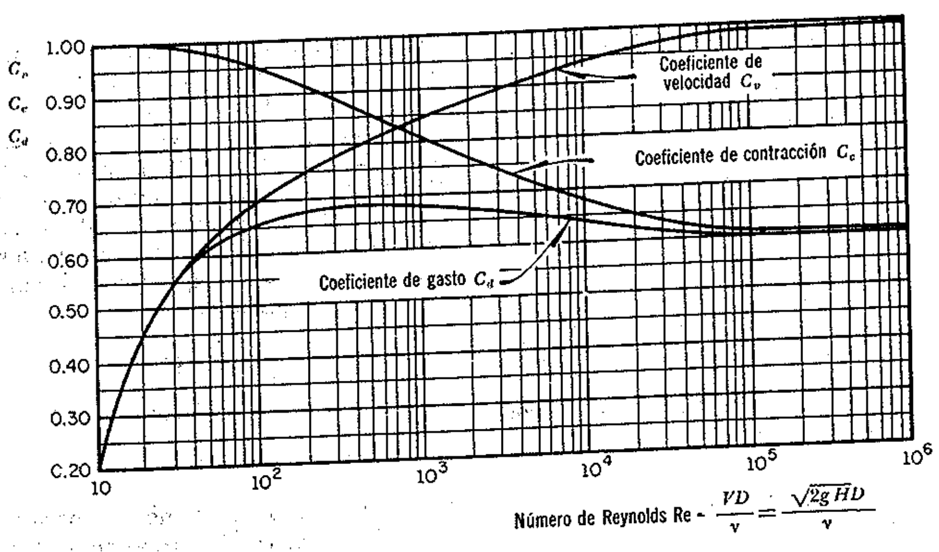


Figura 6.4. Variación de los coeficientes de velocidad, contracción y gasto, con el número de Reynolds en un orificio circular.

6.3 Pérdida de energía

Si al establecer la ecuación de Bernoulli para deducir la Ec. (6.1), se incluye el término de pérdida de energía, entonces,

$$H = \frac{V^2}{2g} + \Delta h_r$$

Por otra parte, de la Ec. (6.2) resulta:

$$H = \frac{1}{C_v^2}\frac{V^2}{2g}$$

que, substituida en la ecuación anterior, da

$$\Delta h_r = \left(\frac{1}{C_v^2} - 1\right)\frac{V^2}{2g} = K\frac{V^2}{2g} \qquad (6.16)$$

La Ec. (6.16) indica que la pérdida de energía es proporcional a la carga de velocidad media en la sección contraída. El coeficiente de pérdida K no tiene dimensiones y es función sólo del coeficiente de velocidad siguiente:

$$K = \frac{1}{C_v^2} - 1 \qquad (6.17a)$$

Así, para $C_v = 0.99$, $K = 0.02$. De la ecuación (6.17a) se tiene también que

$$C_v = \sqrt{\frac{1}{K+1}} \qquad (6.17b)$$

El perfil de la trayectoria del chorro queda determinado por la Ec. (c) del problema 4.13, en que V_1 se calcula de la Ec. (6.2).

Problema 6.1. El orificio circular practicado en la pared vertical de un recipiente que contiene agua tiene un diámetro $D = 0.10$ m y desaloja un gasto $Q = 29.5$ lt/seg con una carga $H = 2$ m. Con el sistema de coordenadas indicado en la Fig. 6.5, se ha medido en el laboratorio que $x = 3$m y $y = 1.15$ m, para el punto 1. Calcular los coeficientes de contracción, gasto y velocidad.

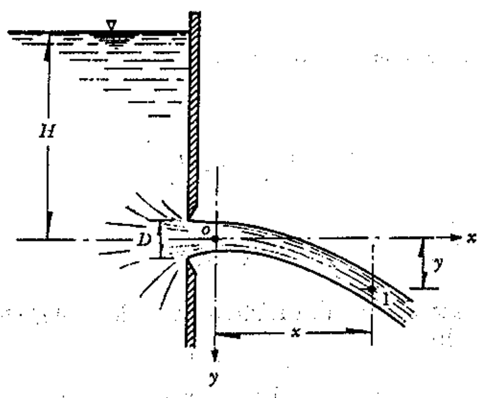


Figura 6.5. Ilustración del problema 6.1.

Solución. Debido a que en la sección contraída el ángulo de inclinación del chorro es $\theta = 0$, además de que en esa sección las componentes de la velocidad son $V_{1x} = V$ y $V_{1y} = 0$, de la Ec. (c) del problema 4.13 y, de acuerdo con la orientación de los ejes, se tiene a

$$y = \frac{g}{2}\frac{x^2}{V^2}$$

Por lo que la velocidad media en la sección contraída vale:

$$V = x\sqrt{\frac{g}{2y}} = 3\sqrt{\frac{9.8}{2 \times 1.15}} = 6.194 \text{ m/seg}$$

De la Ec. (6.2) el coeficiente de velocidad resulta ser

$$C_v = \frac{V}{\sqrt{2gH}} = \frac{6.194}{\sqrt{2 \times 9.8 \times 2}} =$$



$$C_v = \frac{6.194}{6.261} = 0.989$$

De la Ec. (6.4) el coeficiente de gasto es entonces:

$$C_d = \frac{Q}{A\sqrt{2gH}} =$$

$$= \frac{0.0295}{0.785 \times (0.10)^2 \times 6.261} = 0.60$$

El coeficiente de contracción, por otra parte, será

$$C_c = \frac{C_d}{C_v} = 0.607$$

Finalmente, de la Ec. (6.17a) el coeficiente de pérdida de energía vale

$$K = \frac{1}{(0.989)^2} - 1 = 0.022$$

Para el agua —a 15°C— el coeficiente de viscosidad cinemática es $\nu = 0.0175 \frac{\text{cm}^2}{\text{seg}}$ (Fig. 1.8); luego entonces, en el orificio el número de Reynolds es:

$$Re = \frac{\sqrt{2gH}D}{\nu} = \frac{626 \times 10}{0.0175} = 3.578 \times 10^5$$

Con este número de Reynolds se comprueban en la Fig. 6.4 los coeficientes antes obtenidos.

6.4 Orificios de grandes dimensiones o cargas pequeñas

En la deducción de la ecuación general de los orificios se ha supuesto que la velocidad media de todas las partículas se

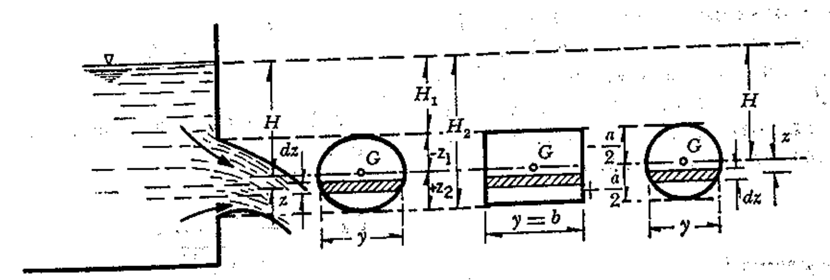


Figura 6.6. Orificios de grandes dimensiones o poca carga.

puede calcular a partir de la energía total H, al centro de gravedad de la sección contraída, lo cual es válido cuando el orificio es de pequeñas dimensiones en comparación con su profundidad. Resulta conveniente investigar lo que sucede cuando el orificio es de grandes dimensiones y se encuentra a poca profundidad. Para lo anterior debe considerarse un orificio de forma cualquiera practicado en la pared vertical de un recipiente y la notación que se indica en la Fig. 6.6.

De acuerdo con la Ec. (6.4) el gasto que pasa por un elemento diferencial de área es

$$dQ' = C_d \sqrt{2g}\,(H + z)^{\frac{1}{2}}\, y\, dz$$

donde H es la carga al centro de gravedad del orificio.

El gasto total que pasa por el orificio es entonces:

$$Q' = C_d \sqrt{2g} \int_{-z_1}^{+z_2} (H + z)^{\frac{1}{2}}\, y\, dz =$$

$$= C_d \sqrt{2gH} \int_{-z_1}^{+z_2} \left(1 + \frac{z}{H}\right)^{\frac{1}{2}} y\, dz$$

Al desarrollar el binomio del integrando, si despreciamos los términos de orden superior, resulta:

$$Q' = C_d \sqrt{2gH} \int_{-z_1}^{+z_2} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{H}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{z}{H}\right)^2 + \ldots\right] y\, dz$$

Esta ecuación, dividida entre la (6.4), resulta ser

$$\phi = \frac{Q'}{Q} = \frac{1}{A} \int_{-z_1}^{+z_2} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{H}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{z}{H}\right)^2 + \ldots\right] y\, dz$$

Como la integral del primer término es A y la del segundo vale cero por tratarse del momento estático del área respecto a su eje centroidal, resulta entonces:

$$\phi = \frac{Q'}{Q} = 1 - \frac{1}{8AH^2} \int_{-z_1}^{+z_1} z^2\, y\, dz + \ldots$$

Para el orificio rectangular, $y = b$ (constante), $z_1 = z_2 = \frac{a}{2}$; el valor de ϕ será:

$$\phi = \frac{Q'}{Q} = 1 - \frac{1}{96}\left(\frac{a}{H}\right)^2 \quad (6.18)$$

Para el orificio circular, $y\, dz = dA$, $z_1 = \frac{z}{2} = \frac{D}{2}$; el valor de ϕ es

$$\phi = \frac{Q'}{Q} = 1 - \frac{1}{128}\left(\frac{D}{H}\right)^2 \quad (6.19)$$

A continuación se incluyen algunos valores de ϕ para los orificios rectangular y circular, obtenidos de las Ecs. (6.18) y (6.19).

$\frac{a}{H}$ ó $\frac{D}{H}$	ORIFICIO	
	Rectangular	Circular
2	0.94	0.95
1	0.99	0.99
0.67	1	1

El valor $a/H = D/H = 2$ equivale al caso extremo en el que el nivel del agua en el recipiente coincide con el canto superior del orificio. En dichas condiciones el orificio no funciona como tal, sino como un vertedor de pared delgada (capítulo 7). En los restantes casos el coeficiente que corrige a C_d de la Ec. (6.4), resulta despreciable y esta última puede utilizarse con la misma precisión en orificios de grandes dimensiones o de poca carga.

6.5 Orificios con contracción incompleta

Se puede hablar de dos tipos de contracción incompleta en un orificio.

a) Cuando las paredes o el fondo del recipiente se encuentran a distancias inferiores a $3D$ (D es el diámetro de los orificios) o bien, a $3a$ (a, dimensión mínima en orificios rectangulares), se dice que la contracción en el orificio es parcialmente suprimida.

b) Si se llega al caso extremo en que una de las fronteras del recipiente coincida con una arista del orificio, se dice que la contracción es suprimida en esa arista; en tal caso el orificio se apoya sobre la pared del recipiente.

En cualquiera de los ejemplos anteriores deben corregirse los valores señalados en la Fig. 6.4.

En el caso de contracción parcialmente suprimida, se puede utilizar la siguiente ecuación empírica para calcular el coeficiente de gasto (Ref. 21), a saber:

$$C_d = C_{do}\left[1 + 0.641\left(\frac{A_0}{A_T}\right)^2\right] \quad (6.20)$$

donde C_d es el coeficiente de gasto del orificio; C_{do} el coeficiente de gasto del mismo orificio con contracción completa; A_0 el área del orificio; A_T el área de la pared del recipiente en contacto con el agua (Fig. 6.7).

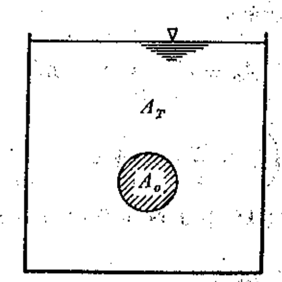


Figura 6.7. Contracción parcialmente suprimida en un orificio.

En el caso de contracción suprimida nos interesan los problemas de orificios de fondo relacionados con compuertas, los cuales se tratarán más adelante.

Problema 6.2. El orificio de pared delgada, de la Fig. 6.8, es cuadrado (a=0.18 m) y trabaja con una carga h = 0.5 m. Sobre la superficie libre del líquido actúa una presión de p_o = 1.45 kg/cm². Determinar el gasto que descarga el orificio.

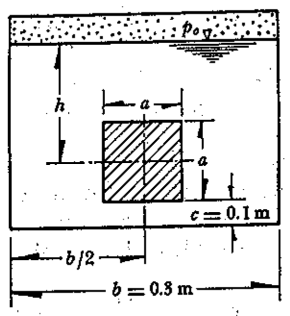


Figura 6.8. Del problema 6.2.

Solución. De acuerdo con la Fig. 6.8 las distancias desde los cantos del orificio a las paredes más próximas del recipiente, son menores de $3a$, por lo cual se trata de una contracción parcialmente suprimida. El coeficiente de gasto para el caso normal de contracción completa es: $C_d = 0.60$; para hacer uso de la Ec. (6.20) tenemos que

$$A_0 = a^2 = 0.0324 \text{ m}^2$$

y

$$A_T = b\left(h + \frac{a}{2} + c\right) =$$

$$= 0.3\,(0.5 + 0.09 + 0.1) = 0.207 \text{ m}^2$$

luego entonces:

$$C_d = 0.60\left[1 + 0.641 \times \left(\frac{0.0324}{0.207}\right)^2\right] = 0.609$$

Además, la carga total que actúa sobre el orificio es:

$$H = h + \frac{p_0}{\gamma} = 0.5 + 14.5 = 15 \text{ m}$$

de la Ec. (6.4), el gasto vale

$$Q = 0.609 \times 0.0324\sqrt{2 \times 9.8 \times 15} =$$

$$= 0.338 \text{ m}^3/\text{seg}$$

6.6 Orificios con descarga sumergida

Cuando el orificio descarga a otro tanque cuyo nivel está por arriba del canto inferior del orificio, se dice que la descarga es ahogada. El ahogamiento puede ser total (Fig. 6.9) o parcial (Fig. 6.10).

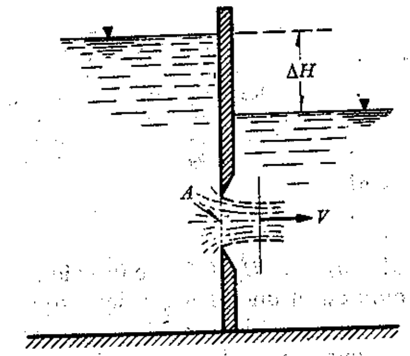


Figura 6.9. Ahogamiento total.

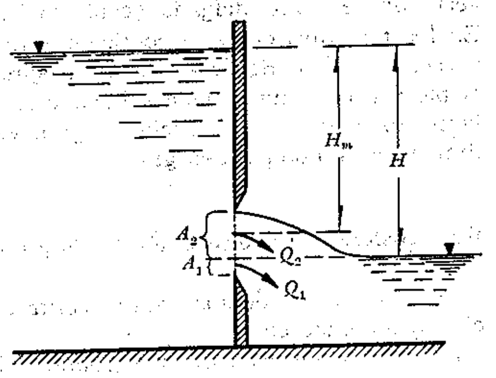


Figura 6.10. Ahogamiento parcial.

En el caso de descarga ahogada total se puede derivar una ecuación análoga a la general (6.4), con la única diferencia que la energía total H es entonces ΔH (diferencia de niveles entre los dos recipientes); el gasto es entonces:

$$Q = C_d A \sqrt{2 g \Delta H} \qquad (6.21)$$

Se recomienda utilizar el mismo coeficiente de gasto C_d que el de un orificio de descarga libre.

Cuando el ahogamiento es parcial, como en la Fig. 6.10, el gasto total descargado por el orificio se puede expresar como la suma Q_1 y Q_2, donde Q_1 es el gasto correspondiente a la porción del orificio con descarga ahogada, es decir:

$$Q_1 = C_{d1} A_1 \sqrt{2 g H}$$

y Q_2 es el gasto de la porción del orificio con descarga libre, a saber:

$$Q_2 = C_{d2} A_2 \sqrt{2 g H_m}$$

No hay investigaciones confiables acerca de los coeficientes de gasto C_{d1} y C_{d2}; al respecto, Schlag (Ref. 22) propone que $C_{d1} = 0.70$ y $C_{d2} = 0.675$, en el caso de que el orificio tenga un umbral en el fondo, como en la Fig. 6.10.

6.7 Compuertas

Una compuerta consiste en una placa móvil, plana o curva, que al levantarse permite graduar la altura del orificio que se va descubriendo, a la vez que controlar la descarga producida. El orificio general-

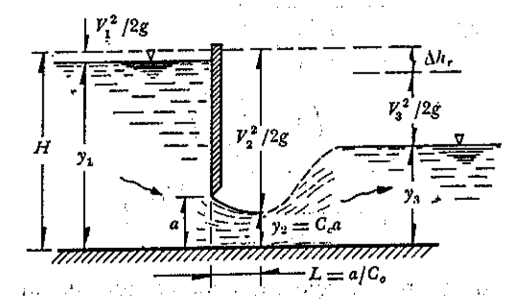


Figura 6.11. Compuerta plana.

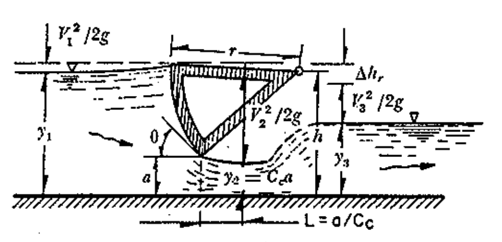


Figura 6.12. Compuerta radial.

mente se hace entre el piso de un canal y el borde inferior de la compuerta, por lo que su ancho coincide con el del canal; en estas condiciones el flujo puede considerarse bidimensional (Figs. 6.11 y 6.12).

El gasto de una compuerta y las características hidráulicas de su descarga se pueden conocer a partir del estudio de una red de flujo obtenida por cualquiera de los métodos expuestos en el capítulo 10. La red de flujo de la compuerta plana, de la figura 6.13, permite explicar con claridad la contracción que experimenta el chorro descargado por el orificio de altura a, hasta alcanzar un valor $C_c a$ en una distancia L en la que las líneas de corriente se vuelven horizontales y tienen por ello una distribución hidrostática de presiones. Debido al fenómeno de contracción y a la fricción con el piso, se produce una pérdida de carga Δh_r que influye en el cálculo del gasto. Asimismo, la carga de velocidad $V_1^2/2g$ con que llega el agua en el canal, aguas arriba de la compuerta, tiene mayor importancia a medida que la relación y_1/a disminuye.

En el canto inferior de la compuerta las líneas de corriente tienden a unirse y es ahí donde la velocidad adquiere su máximo valor. Debido a la curvatura de las líneas de corriente una gran presión actúa sobre la línea de intersección del plano de la compuerta, razón por la cual se tiene una velocidad pequeña.

Para obtener la ecuación que proporcione el gasto, aquí se considerará el caso

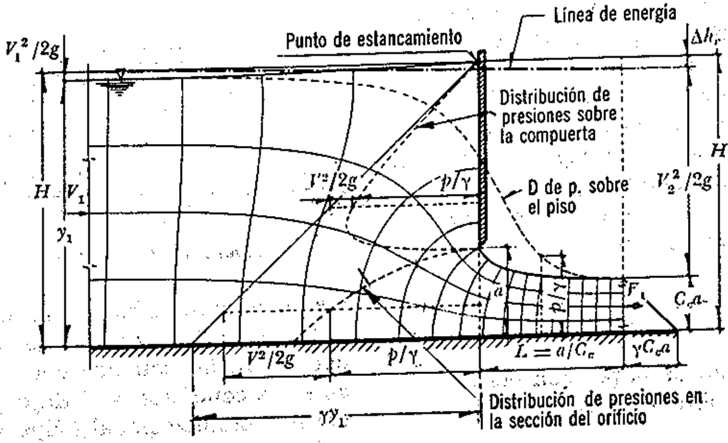


Figura 6.13. Red de flujo para una compuerta plana.

más general de una compuerta plana, con una inclinación θ° respecto de la horizontal (Fig. 6.14) y un ancho b. La inclinación θ° es equivalente a la de la tangente en el labio de la compuerta radial, de la Fig. 6.12, y con $\theta = 90°$ incluye el caso de la compuerta vertical de la Fig. 6.11. Se establece la ecuación de la energía entre una sección 1, aguas arriba, de la compuerta y la sección contraída, a saber:

$$H = y_1 + \frac{V_1^2}{2g} = C_c a + \frac{V_2^2}{2g} \qquad (6.22)$$

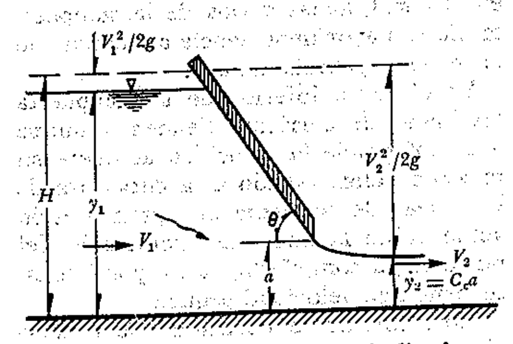


Figura 6.14. Compuerta plana inclinada.

Por otra parte, de la ecuación de continuidad se tiene:

$$V_1 = \frac{C_c a}{y_1} V_2 \qquad (6.23)$$

que substituida en la Ec. (6.22) conduce a:

$$y_1 + \left(\frac{C_c a}{y_1}\right)^2 \frac{V_2^2}{2g} = C_c a + \frac{V_2^2}{2g}$$

y de aquí, tenemos que

$$\frac{V_2^2}{2g} = \frac{y_1 - C_c a}{1 - \left(\frac{C_c a}{y_1}\right)^2} = \frac{\left(1 - \frac{C_c a}{y_1}\right) y_1}{\left(1 + \frac{C_c a}{y_1}\right)\left(1 - \frac{C_c a}{y_1}\right)}$$

Por tanto, la velocidad media real en la sección contraída es:

$$V_2 = \frac{C_v}{\sqrt{1 + \frac{C_c a}{y_1}}} \sqrt{2g\, y_1} \qquad (6.24)$$

en que C_v es el coeficiente de velocidad.

El gasto es

$$Q = \frac{C_c C_v b a}{\sqrt{1 + \frac{C_c a}{y_1}}} \sqrt{2g\, y_1}$$

$$Q = C_d b a \sqrt{2g\, y_1} \qquad (6.25)$$

donde:

$$C_d = \frac{C_c C_v}{\sqrt{1 + \frac{C_c a}{y_1}}} \qquad (6.26a)$$

o bien

$$C_c = \frac{1}{2}\frac{a}{y_1}\left(\frac{C_d}{C_v}\right)^2 + \sqrt{\left[\frac{1}{2}\frac{a}{y_1}\left(\frac{C_d}{C_v}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{C_d}{C_v}\right)^2} \qquad (6.26b)$$

En la Ec. (6.26a) $\sqrt{1 + \frac{C_c a}{y_1}}$ sirve para considerar el empleo de y_1 en lugar de H.

Si la descarga es sumergida con un tirante y_3 en el canal, aguas abajo de la compuerta, se puede hacer un desarrollo análogo al anterior y obtener una expresión idéntica a la Ec. (6.25) para cualquier tipo de compuerta.

Los coeficientes de velocidad, contracción y gasto los han obtenido experimentalmente muchos investigadores; sin embargo, en ningún caso se ha encontrado coincidencia en los resultados.

Los coeficientes C_v, C_c y C_d dependen, desde luego, de la geometría del flujo y del número de Reynolds. De acuerdo con los resultados presentados por Domínguez (Ref. 24) en la mayoría de los problemas, en la práctica, se supera el número de Reynolds a partir del cual el flujo se torna independiente de él.

Gentilini (Ref. 25) realizó investigaciones en compuertas planas inclinadas y radiales, con descarga libre. En la Fig. 6.15 se presentan los coeficientes de gasto C_d obtenidos en compuertas planas con un ángulo de inclinación θ en términos de la relación y_1/a.

Las experiencias de Gentilini incluyen el caso de la compuerta plana vertical $\theta = 90°$, tipo del cual se han ocupado in-

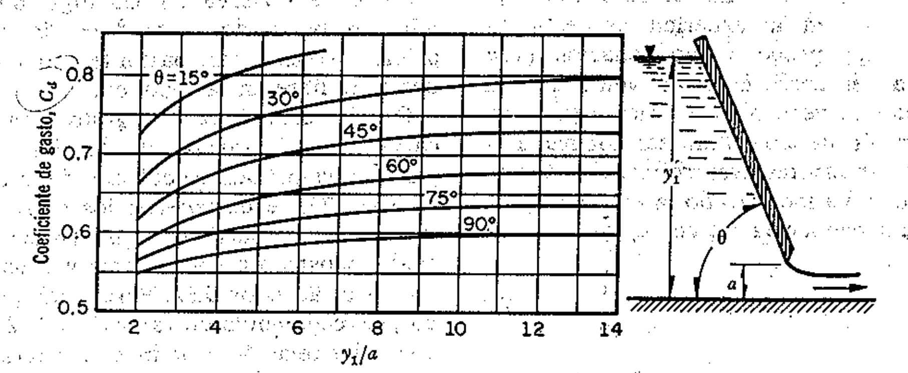


Figura 6.15. Coeficientes de gasto para compuertas planas inclinadas con descarga libre.

Figura 6.16. Coeficiente de gasto de una compuerta plana vertical según Cofré y Buchheister (Ref. 24).

vestigadores como Joukowsky y Vedérnikov (Ref. 6) de la Unión Soviética, Franke de Alemania (Ref. 1), Henry de Estados Unidos de Norteamérica (Ref. 26) y Cofré y Buchheister de Chile (Ref. 24). Knapp (Ref. 23) y Henderson (Ref. 27) exponen una comparación interesante de algunos de estos resultados que presentan discrepancias importantes atribuibles, según Knapp, al grado de agudeza del canto afilado de la compuerta. Henderson, por el contrario, concluye que esto se debe a la manera como se desarrolla la capa límite a partir del plano de la compuerta.

Con base en las experiencias de Gentilini, Knapp propone una ecuación para calcular el coeficiente de velocidad en compuertas verticales con descarga libre, en función de a/H. Para ser congruentes con los anteriores desarrollos, el autor de este libro ha modificado la ecuación para que la dependencia sea con a/y_1:

$$C_v = 0.960 + 0.0979\frac{a}{y_1} \qquad (6.27)$$

Tiene como límite superior $C_v = 1$, el cual se alcanza para $a/y_1 = 0.408$. Por lo que respecta a los coeficientes de gasto, Cofré y Buchheister (Ref. 24) comprobaron y ampliaron los resultados obtenidos por Henry (Fig. 6.16). Se incluye aquí el caso de las compuertas con descarga ahogada en el que se ha calculado el coeficiente de gasto C_d para que siga siendo válida la Ec. (6.25). Aquí, dicho coeficiente depende de y_1/a y además de y_3/a, esto es, del tirante y_3 en el canal aguas abajo de la compuerta. El criterio para estudiar el tipo de descarga se presentará en el Vol. 2 de este libro.

Como se observa en las Figs. 6.15 y 6.16, los resultados para $\theta = 90°$ en la primera concuerdan bastante con los de descarga libre en la segunda.

Con los coeficientes de gasto para descarga libre (tomados de la Fig. 6.16) y los de velocidad, calculados de la ecuación (6.27), se obtuvieron los correspondientes a C_c, a partir de la Ec. (6.26b), los cuales mostraron sólo ligeras variaciones en torno al valor 0.62. Para fines prácticos, se recomienda un valor $C_c = 0.62$ para cualquier relación y_1/a, inclusive para descarga sumergida.

De acuerdo con la Fig. 6.13 la distancia horizontal, desde el plano de una compuerta vertical hasta la sección contraída, alcanza el valor

$$L = \frac{a}{C_c} \qquad (6.28)$$

Según Joukowski y Vedérnikov, esta distancia debe ser igual a la abertura de la compuerta.

En compuertas planas verticales, cuando $y_1/a < 1.35$, se inicia el despegamiento del chorro desde el canto de la compuerta, además del arrastre del aire al interior, por lo que en ese caso deja de ser válida la Ec. (6.25).

Cuando el labio inferior de la compuerta se redondee, como en la Fig. 6.17, los coeficientes de contracción y de gasto —correspondientes a la arista afilada— se multiplican por un coeficiente ε (Ref. 28) que varía de acuerdo con la relación r/a como sigue:

r/a	0.1	0.2	0.3	0.4
ε	1.03	1.13	1.25	1.25

donde r es el radio con el cual se redondea la arista.

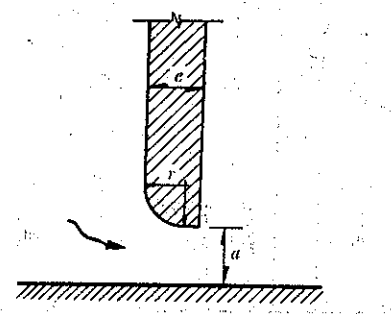


Figura 6.17. Redondeo en el labio inferior de una compuerta.

Para compuertas radiales Knapp encontró una ecuación, semejante a la (6.27), para calcular el coeficiente de velocidad el cual queda también en función del ángulo de inclinación θ, de la tangente al labio inferior de la compuerta (Fig. 6.12). Dicha ecuación modificada es:

$$C_v = 0.960 + (0.001615\,\theta° - 0.0475)\frac{a}{y_1} \qquad (6.29)$$

donde C_v tiene nuevamente como límite superior $C_v = 1$. Esta ecuación proporciona valores muy aproximados en compuertas planas e inclinadas al mismo ángulo θ.

En la Fig. 6.18 se presentan los valores del coeficiente de gasto obtenidos por Gentilini en compuertas radiales con descarga libre y en función del ángulo θ y de la relación y_1/a, que son aplicables a la Ec. (6.25).

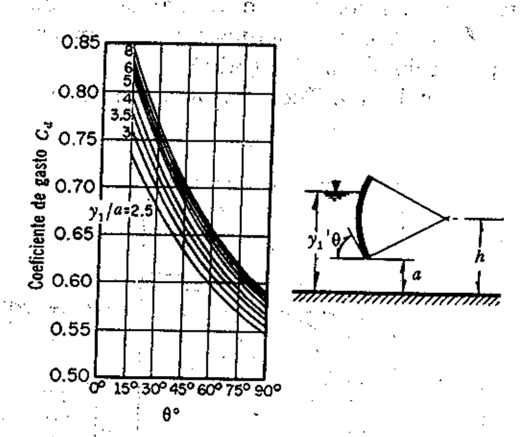


Figura 6.18. Coeficientes de gasto en compuertas radiales con descarga libre, según Gentilini.

Con los valores de C_v de la Ec. (6.29), así como de C_d de la Fig. 6.18, con el auxilio de la Ec. (6.26b) se puede obtener el valor de C_c para cada condición de funcio-

namiento, que se puede suponer válido cuando la descarga es sumergida. Knapp (Ref. 23) ha desarrollado una ecuación teórica para calcular C_c; sin embargo, sus resultados no son congruentes con las experiencias. Henderson (Ref. 27), por su parte, propone una ecuación empírica aproximada para el mismo objeto:

$$C_c = 1 - 0.00833\,\theta^\circ + 0.0000445\,(\theta^\circ)^2 \quad (6.30)$$

Quizá las experiencias de Toch (Ref. 29) hasta ahora son las más completas en lo que se refiere a las compuertas radiales, pues incluyen el caso de descarga sumergida. En la Fig. 6.19 se presentan los valores del coeficiente de gasto obtenidos por Toch, los cuales se han relacionado con y_1/r, a/r, y_3/r para cada valor de h/r, tanto en descarga libre como en sumergida, donde h es la altura del perno de la compuerta. Esta forma de presentación resulta más cómoda de utilizar que la de Gentilini. Los coeficientes son por supuesto aplicables a la Ec. (6.25).

Sin embargo, Toch no presenta los resultados correspondientes al coeficiente de contracción, en cuyo caso se recomienda calcularlos en forma semejante a las Ecs. (6.26b), (6.29) y Fig. 6.19, tomando en cuenta que

$$\cos\theta = \frac{h}{r} - \frac{a}{r}$$

y

$$\frac{a}{y_1} = \frac{a/r}{y_1/r}$$

Problema 6.3. En la compuerta del problema 4.16 calcular: *a)* la abertura que debe tener para descargar un gasto de 7 m³/seg; *b)* con esta misma abertura, calcular el gasto que descarga cuando el tirante, aguas abajo, es $y_3 = 1.80$ m.

Solución a). De la Ec. (6.25) la abertura de la compuerta es:

$$a = \frac{Q}{C_d\, b\sqrt{2g\,y_1}} =$$

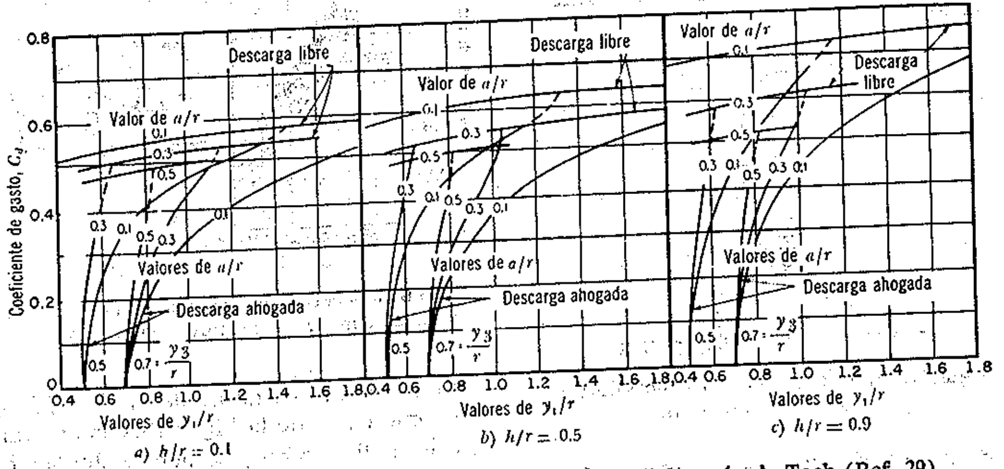


Figura 6.19. Coeficiente de gasto de una compuerta radial, según A. Toch (Ref. 29).

$$= \frac{7}{C_d \times 3\sqrt{19.6 \times 2.4}} = \frac{0.34}{C_d}$$

Suponiendo un coeficiente de gasto para descarga libre $C_d = 0.56$, se tiene que

$$a = \frac{0.34}{0.56} = 0.607$$

entonces

$$\frac{y_1}{a} = \frac{2.4}{0.607} = 3.95$$

Para esta relación, de la Fig. 6.16 un coeficiente de gasto más aproximado es 0.57; la abertura correcta de la compuerta vale:

$$a = \frac{0.34}{0.57} \approx 0.60 \text{ m}$$

De la Ec. (6.27) se obtiene un coeficiente de velocidad $C_v = 0.985$ y de la ecuación (6.26b), $C_c = 0.62$, siendo el tirante en la sección contraída:

$$y_2 = 0.62 \times 0.60 = 0.372 \text{ m}$$

Solución b). Con $y_1/a = 4$, $y_3/a = 1.80/0.60 = 3$; de la Fig. 6.16 el coeficiente de gasto es $C_d = 0.39$ y el gasto descargado por la compuerta vale entonces:

$$Q = 0.39 \times 3 \times 0.6\sqrt{2 \times 9.8 \times 2.40} = 4.81 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Problema 6.4. Una compuerta radial de 4.5 m de radio y altura del perno $h = 4$ m debe descargar un gasto por unidad de ancho $q = 2.60$ m³/seg/m, con un tirante, aguas arriba, $y_1 = 4.50$ m y otro, aguas abajo, $y_3 = 3.45$ m. *a)* Calcular la abertura de la compuerta para las condiciones de descarga ahogada; *b)* Calcular el gasto, por unidad de ancho de la compuerta, con la misma abertura si la descarga es libre, así como los coeficientes de contracción y gasto correspondientes.

Solución a). Siendo la relación $h/r = 0.89$, se puede usar la gráfica al extremo derecho de la Fig. 6.19. Además, $y_1/r = 1$ y $y_3/r = 0.767$.

De la Ec. (6.25) la abertura de la compuerta es

$$a = \frac{q}{C_d\sqrt{2g\,y_1}} = \frac{2.60}{C_d\sqrt{2 \times 9.8 \times 4.5}} = \frac{0.277}{C_d}$$

Para una relación $a/r = 0.2$ y, por extrapolación, $C_d = 0.41$; resulta que

$$a = \frac{0.277}{0.41} = 0.675 \text{ m}$$

Un valor más exacto de $\frac{a}{r} = \frac{0.675}{4.5} = 0.15$ y $C_d = 0.37$, siendo

$$a = 0.75 \text{ m}$$

Solución b). Para esta abertura, tenemos:

$$\frac{a}{r} = \frac{0.75}{4.5} = 0.167$$

$$\cos\theta = 0.89 - 0.167 = 0.723$$

$$\theta \approx 44^\circ$$

y con

$$\frac{a}{y_1} = \frac{a/r}{y_1/r} = \frac{0.167}{1} = 0.167$$

entonces:

$C_v = 0.96 + (0.001615 \times 44° - 0.0475)\ 0.167 =$
$= 0.964$

Además, de la Fig. 6.19c, el coeficiente para descarga libre es 0.68 y el gasto

$$q = 0.68 \times 0.75\sqrt{2 \times 9.8 \times 4.5} =$$
$$= 4.79\ \text{m}^3/\text{seg/m}.$$

Por otra parte:

$$\frac{1}{2}\frac{a}{y_1}\left(\frac{C_d}{C_v}\right)^2 = \frac{0.167 \times 0.705^2}{2} = 0.0416$$

y de la Ec. (6.26b) resulta:

$$C_c = 0.0416 + \sqrt{0.00173 + 0.498} = 0.748$$

6.8 Orificios de pared gruesa

Cuando la pared en el contorno de un orificio no tiene aristas afiladas, el orificio es *de pared gruesa* o *tubo corto* (Fig. 6.20).

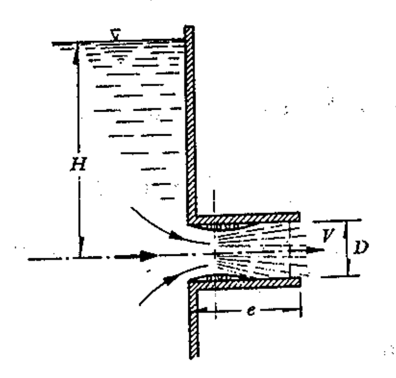


Figura 6.20. Descarga a través de un tubo corto.

En este tipo de orificio se observa que el chorro, una vez que ha pasado la sección contraída, tiene todavía espacio dentro del tubo para expandirse y llenar la totalidad de la sección. Entre la sección contraída y la final ocurre un rápido descenso de la velocidad acompañado de turbulencia y fuerte pérdida de energía.

Por un razonamiento análogo al de los orificios de pared delgada, se concluye que la velocidad de salida del líquido se puede calcular con la misma Ec. (6.2):

$$V = C_v\sqrt{2gH}$$

donde el coeficiente de velocidad C_v se reduce ahora hasta el valor 0.82, encontrado experimentalmente por diferentes investigadores, cuando $e/D = 3$. Además, siendo ahora $C_c = 1$ la ecuación (6.4) del gasto es la misma, con la única circunstancia que $C_d = C_v = 0.82$, esto es, el gasto es, aproximadamente, un tercio mayor que en un orificio de pared delgada. Lo anterior se explica debido a que en la sección contraída se forma un vacío parcial con presión ligeramente menor que la atmosférica e incrementa el valor efectivo de la carga H. De la Ec. (6.16) la pérdida de energía es ahora:

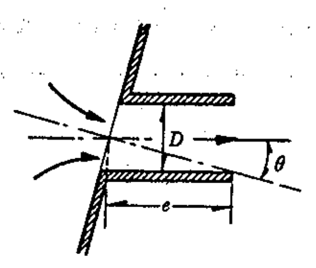
$$\Delta h_r = \left(\frac{1}{(0.82)^2} - 1\right)\frac{V^2}{2g} = 0.49\frac{V^2}{2g}$$

Cuando $e/D > 3$, empieza a tener influencia la fricción y el tubo corto debe considerarse como un conducto a presión, incluyendo todas sus pérdidas de energía.

En la tabla 6.2 se presentan los coeficientes de gasto C_d para aplicarse en la Ec. (6.4), valores que han sido encontrados por diferentes investigadores para los tubos cortos más comunes en la práctica.

TABLA 6.2. Coeficientes de gasto para diferentes tipos de orificios de pared gruesa

a) Tubo corto.

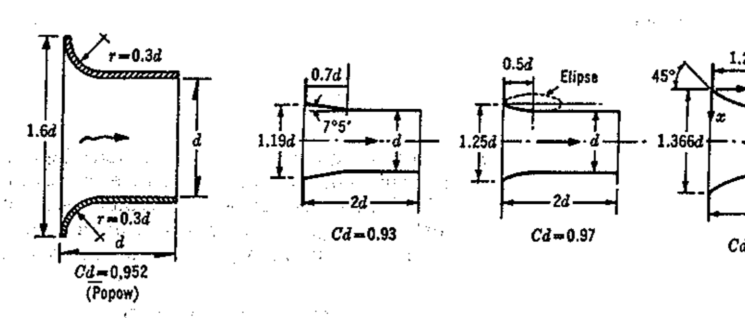


Para $\theta = 0°$ (Domínguez, Eytelwein y Schurinu).

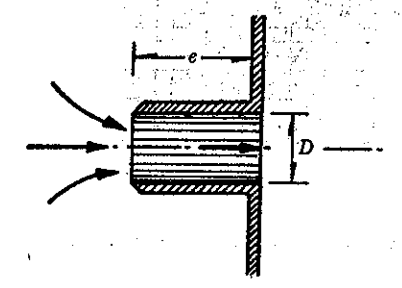
e/d	≤ 0.5	1	1.5	2.0	2.5	3	5
C_d	0.60	0.75	0.78	0.79	0.80	0.82	0.79
e/d	12	25	36	50	60	75	100
C_d	0.77	0.71	0.68	0.64	0.60	0.59	0.55

Para $e/D = 3$ el coeficiente C_d, según Weisbach, se obtiene de los siguientes valores en función de θ:

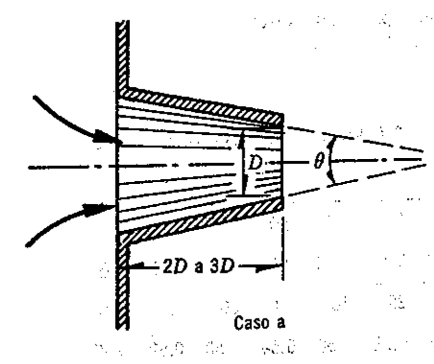
θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
C_d	0.82	0.80	0.78	0.76	0.75	0.73	0.72



b) Tubos cilíndricos rentrantes (tubos de Borda)

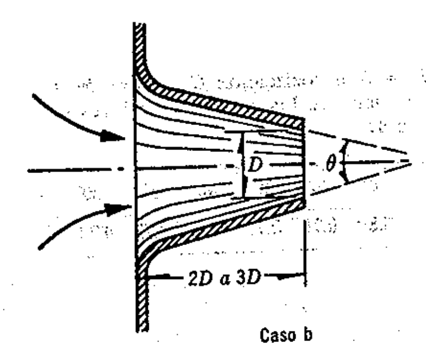


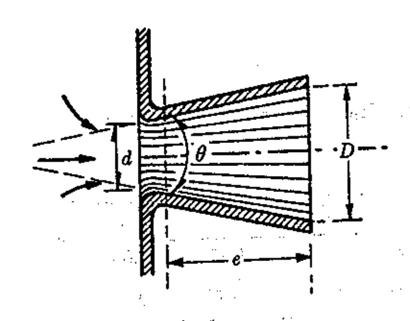
	C_d	C_v	C_c
$e > 3D$	0.71	0.71	1.00
$e < 3D$	0.51	0.97	0.53



c) Tubos convergentes para aristas agudas y redondeadas, respectivamente.

θ	0°	4°	8°	12°	16°	30°	45°	60°	75°	90°	
C_d (Caso a)	0.82	0.916	0.942	0.95	0.941	0.92	0.87	0.82	0.78	0.74	←(Caso a)
C_d (Caso b)	0.96	0.96	0.959	0.955	0.941	0.92	0.87	0.82	0.78	0.74	←(Caso b)





d) Tubos divergentes. Si $\theta \geq 8°$ la vena líquida no llena toda la sección y ocurre la separación. En el caso de aristas redondeadas el coeficiente C_d, referido a la sección de salida, se obtiene de la siguiente gráfica, donde

el coeficiente máximo de gasto se obtiene para $\theta = 5°$.

Problema 6.5. La válvula abierta, mostrada en la Fig. 6.21, tiene un diámetro $D_1 = 1.50$ m y descarga un gasto de 31.5 m³/seg cuando se elimina el tronco de cono, aguas abajo, de la misma. En estas condiciones el gasto descargado sigue la ley de orificios $Q = C_d A\sqrt{2gH}$ (A, área de la válvula).

Si se coloca el tronco de cono de modo que la sección de salida tenga un diámetro $D_2 = 1.64$ m, la pérdida de energía que se produce en el mismo está dada por la fórmula empírica:

$$\Delta h_e = 0.10\,\frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$$

y el ángulo total con que se realiza la expansión es de 5°. Calcular el gasto descargado para estas nuevas condiciones y explicar a qué se debe el aumento en el mismo.

Solución. Las áreas para los dos diámetros dados son:

$$A_1 = \frac{\pi}{4}(1.5)^2 = 1.767\ \text{m}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi}{4}(1.62)^2 = 2.06\ \text{m}^2$$

Sin el tronco de cono la velocidad en la válvula es

$$V_1 = \frac{31.5}{1.767} = 17.825\ \text{m/seg}$$

y

$$\frac{V_1^2}{2g} = 16.211\ \text{m}$$

siendo el coeficiente de gasto:

$$C_d = \frac{Q}{A_1\sqrt{2gH}} = \frac{31.5}{1.767\sqrt{19.6 \times 18}} = 0.95$$

De la ecuación de energía, incluida la pérdida, se tiene que

$$18 = \frac{V_1^2}{2g} + K\frac{V_1^2}{2g} = 16.211 + 16.211\,K$$

$$K = \frac{18 - 16.211}{16.211} = 0.11$$

y de la misma ecuación, al incluir el

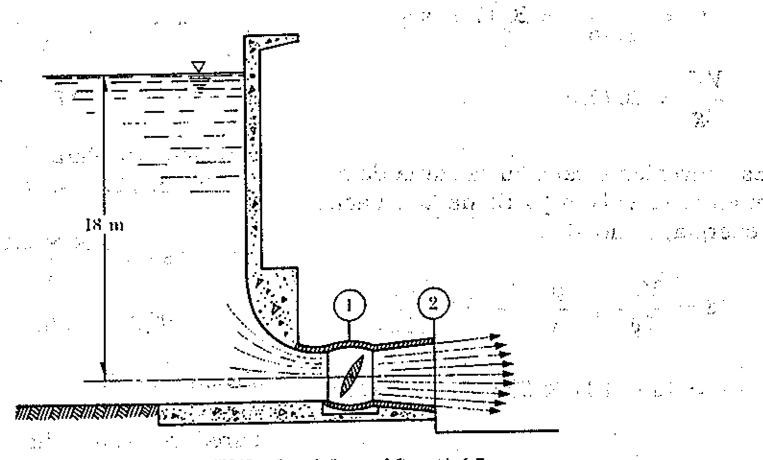


Figura 6.21. Válvula del problema 6.5.

cono y suponer el mismo coeficiente de pérdida en la válvula, resulta:

$$18 = \frac{V_2^2}{2g} + 0.11\frac{V_1^2}{2g} + 0.1\left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}\right)$$

$$18 = 0.9\frac{V_2^2}{2g} + 0.21\frac{V_1^2}{2g}$$

Por otra parte, de la ecuación de continuidad, $A_1 V_1 = A_2 V_2$ y por tanto:

$$V_1 = \frac{2.06}{1.767} V_2 = 1.166\, V_2$$

$$18 = 0.9\frac{V_2^2}{2g} + 0.21\,(1.166)^2\frac{V_2^2}{2g}$$

la velocidad V_2 y el gasto son:

$$V_2 = \sqrt{19.6 \times 18/1.186} = 17.25 \text{ m/seg}$$

$$Q = 2.06 \times 17.26 = 35.53 \text{ m}^3\text{/seg}$$

el cual es 13 % mayor que la descarga sin el cono. La velocidad en la válvula, para este gasto, vale entonces

$$V_1 = \frac{35.53}{1.767} = 20.11 \text{ m/seg}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = 20.63 \text{ m}$$

Es conveniente calcular la carga de presión en la válvula, a partir de la ecuación de energía, como sigue:

$$18 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + 0.11\frac{V_1^2}{2g}$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = 18 - 1.11 \times 20.63 = -4.90 \text{ m}$$

esto es, resulta que en la válvula existe una presión negativa que aumenta la carga efectiva y, a su vez, el gasto. Esa carga de presión es aceptable y no hay peligro de cavitación en la válvula.

Finalmente, la longitud del tronco de cono es:

$$L = \frac{D_2 - D_1}{2 \tan 2.5°} = \frac{1.62 - 1.50}{2 \times 0.0436} = 1.374 \text{ m}$$

Problema 6.6. Calcular el gasto que descarga el orificio del problema 6.1 cuando: *a*) aumenta la carga *H* a 3 m; *b*) se reemplaza por un tubo corto de 40 cm de largo; *c*) se substituye por un tubo divergente con redondeamiento de sus aristas cuyo ángulo es $\theta = 6°$.

Solución a). De la Ec. (6.4) para $H = 3$ m resulta que

$$Q = 0.60\,\frac{3.14 \times 0.1^2}{4}\sqrt{2 \times 9.8 \times 3} =$$

$$= 0.036 \text{ m}^3\text{/seg}$$

Solución b). Para $e/D = 4$, de la tabla 6.2 $C_d = 0.805$ y de la Ec. (6.4) tenemos:

$$Q = 0.805 \times \frac{3.14 \times 0.1^2}{4}\sqrt{2 \times 9.8 \times 3} =$$

$$= 0.0485 \text{ m}^3\text{/seg}$$

Solución c). Para $\theta = 6°$ y $e/d = 4$; de la tabla 6.2, $C_d = 0.86$. El gasto es entonces

$$Q = 0.86 \times \frac{3.14 \times 0.1^2}{4}\sqrt{2 \times 9.8 \times 3} =$$

$$= 0.0518 \text{ m}^3\text{/seg}$$

Problema 6.7. Los tanques de la Fig. 6.22 están comunicados por un orificio de pared delgada y diámetro $d = 10$ cm, los cuales alimentan a dos modelos hidráulicos distintos a través de tubos cortos cilíndricos de igual medida diametral. El tanque de la izquierda recibe un gasto $Q = 80$ lt/seg. Calcular: *a*) los gastos descargados por cada tanque y la posición del nivel del agua en los mismos; *b*) el diámetro que debe tener el tubo del tanque de la izquierda para descargar el mismo gasto que el de la derecha.

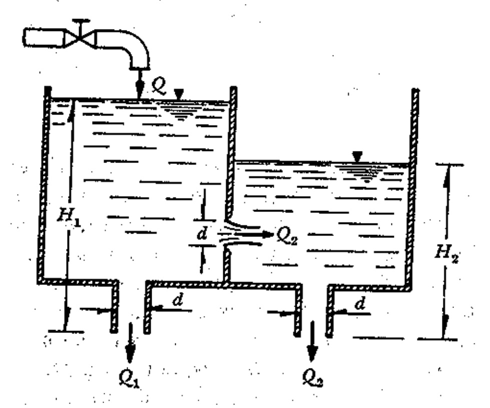


Figura 6.22. Del problema 6.7.

Solución a). El área de los orificios es

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = 0.00785 \text{ m}^2$$

De acuerdo con el orificio y con el principio de continuidad, se puede establecer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Q_1 = 0.82\,A\sqrt{2g\,H_1} = 0.0285\sqrt{H_1} \quad \text{(a)}$$

$$Q_2 = 0.82\,A\sqrt{2g\,H_2} = 0.0285\sqrt{H_2} \quad \text{(b)}$$

$$Q_2 = 0.60\,A\sqrt{2g\,(H_1 - H_2)} =$$

$$= 0.0209\sqrt{H_1 - H_2} \quad \text{(c)}$$

$$Q_1 + Q_2 = 0.080 \quad \text{(d)}$$

De las Ecs. (b) y (c) se tiene:

$$0.0285\sqrt{H_2} = 0.0209\sqrt{H_1 - H_2}$$

$$H_2 = 0.538\,(H_1 - H_2)$$

$$H_2 = 0.35\,H_1 \quad \text{(e)}$$

Por otra parte, de las Ecs. (a), (b) y (d), resulta que

$$0.0285\sqrt{H_1} + 0.0285\sqrt{H_2} = 0.080$$

substituyendo la Ec. (e) se obtiene que:

$$0.0285\sqrt{H_1} + 0.0285\sqrt{0.35\,H_1} = 0.08$$

$$0.0454\sqrt{H_1} = 0.08$$

$$H_1 = 3.10 \text{ m}$$

De la Ec. (e) $\quad H_2 = 1.085$ m

De la Ec. (a) $\quad Q_1 = 0.0502 \text{ m}^3\text{/seg}$

De la Ec. (b) $\quad Q_2 = 0.0297$

la suma $Q_1 + Q_2 = 0.080$ comprueba los resultados.

Solución b). Puesto que $Q_1 = Q_2$, entonces $Q_1 = 0.040 \text{ m}^3\text{/seg}$.

De la Ec. (b) nos da

$$0.04 = 0.0285\sqrt{H_2}$$

$$H_2 = 1.97 \text{ m.}$$

De la Ec. (c) resulta

$$0.04 = 0.0209\sqrt{H_1 - 1.97}$$

$$3.66 = H_1 - 1.97$$

$$H_1 = 5.633 \text{ m.}$$

Finalmente, para el tubo del tanque de la izquierda, se tiene:

$$0.040 = 0.82\,A\sqrt{2g\,H_1} = 8.61\,A$$

$$A = 0.00464$$

el diámetro del tubo 1 es:

$$d_1 = \sqrt{\frac{0.00464}{0.785}} = 0.077\ \text{m}.$$

6.9 Orificios de forma especial

Con base en el método de las hodógrafas y considerando fluidos ideales (Refs. 9 y 14), von Mises obtuvo los coeficientes de contracción para una serie de orificios de forma especial (Fig. 6.23).

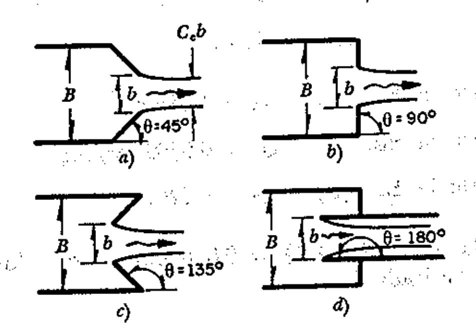


Figura 6.23. Geometría de un chorro bidimensional.

TABLA 6.3. Coeficientes de contracción para los chorros bidimensionales de la Fig. 6.23.

b/B	Coeficientes de contracción C_c							
	$\theta = 15°$	30°	45°	60°	$\theta = 75°$	90°	135°	180°
0.0	0.8970	0.8140	0.7470	0.6930	0.6480	0.611	0.537	0.500
0.1	0.8970	0.8141	0.7490	0.6935	0.6485	0.612	0.546	0.513
0.2	0.8970	0.8141	0.7491	0.6945	0.6495	0.616	0.555	0.528
0.3	0.8970	0.8141	0.7491	0.6965	0.6541	0.622	0.566	0.544
0.4	0.8970	0.8142	0.7492	0.6995	0.662	0.631	0.580	0.564
0.5	0.8970	0.8150	0.7525	0.7075	0.670	0.644	0.599	0.586
0.6	0.8970	0.8167	0.7580	0.7170	0.683	0.662	0.620	0.613
0.7	0.8974	0.8215	0.7680	0.7350	0.707	0.687	0.652	0.646
0.8	0.8990	0.8340	0.7890	0.7600	0.740	0.722	0.698	0.691
0.9	0.9500	0.9170	0.8290	0.8800	0.870	0.781	0.761	0.760
1.0	1.0000	1.000	1.0000	1.0000	1.000	1.000	1.000	1.000

En la tabla 6.3 se muestran los coeficientes de contracción correspondientes, que se obtuvieron para orificios bidimensionales o de ancho infinito (normal al plano del papel). Sin embargo, se pueden utilizar también para orificios circulares, para lo cual los diámetros d y D corresponden a los anchos b y B, respectivamente (figura 6.24). Por ejemplo, si un orificio circular de diámetro d se encuentra sobre la pared de un gran depósito ($d/D \approx 0$), el diámetro del chorro, de acuerdo con la Ec. (6.15) es: $d_c = \sqrt{0.611}\,d = 0.782\,d$, donde d es el diámetro real del orificio para $\theta = 90°$. Observe en este ejemplo que el coeficiente de contracción ($C_c = 0.611$) es idéntico al valor dado por la Ec. (6.14) para $C_v = 0.98$ y con el mismo 2% de error respecto del valor experimental 0.60.

En este tipo de orificios influye la velocidad de llegada del agua dentro de la tubería. Es posible obtener la ecuación correspondiente para el gasto si se aplica la ecuación de Bernoulli entre una sección dentro del tubo, inmediata al orificio y la sección contraída de este último, utilizando un nivel de referencia cualquiera ($\alpha_0 = \alpha_1 = 1$), a saber:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} = z_1 + \frac{V_1^2}{2g}$$

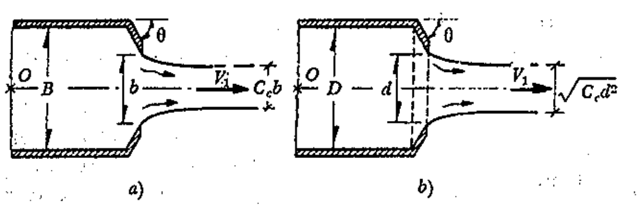


Figura 6.24. Geometría de las ranuras y los chiflones.

De la ecuación de continuidad se obtiene

$$V_o = C_c \frac{A}{A_0} V_1$$

que, substituida en la ecuación anterior, conduce a

$$\Delta H = z_0 + \frac{p_0}{\gamma} - z_1 = \frac{V_1^2}{2g}\left(1 - C_c^2 \frac{A^2}{A_0^2}\right)$$

siendo el gasto:

$$Q = C_c A V_1 = \frac{C_c A}{\sqrt{1 - C_c^2 \dfrac{A^2}{A_0^2}}}\sqrt{2g\Delta H} \qquad (6.31)$$

de donde

$$C_d = \frac{Q}{A\sqrt{2g\,\Delta H}} = \frac{C_c}{\sqrt{1 - C_c^2 \dfrac{A^2}{A_0^2}}} \qquad (6.32)$$

Para orificios bidimensionales y circulares, la Ec. (6.32) se convierte, respectivamente, en:

$$C_d = \frac{C_c}{\sqrt{1 - C_c^2\left(\dfrac{b}{B}\right)^2}} \qquad (6.33)$$

$$C_d = \frac{C_c}{\sqrt{1 - C_c^2\left(\dfrac{d}{D}\right)^4}} \qquad (6.34)$$

De acuerdo con las Ecs. (6.33) y (6.34) el coeficiente de gasto C_d se puede determinar a partir del coeficiente de contracción C_c y en función de b/B o d/D. Con los valores de la tabla 6.3, para $\theta = 90°$, los coeficientes de gasto para el orificio bidimensional y circular se han calculado con las Ecs. (6.33) y (6.34). Los resultados se presentan en la Fig. 6.25 (Ref. 15).

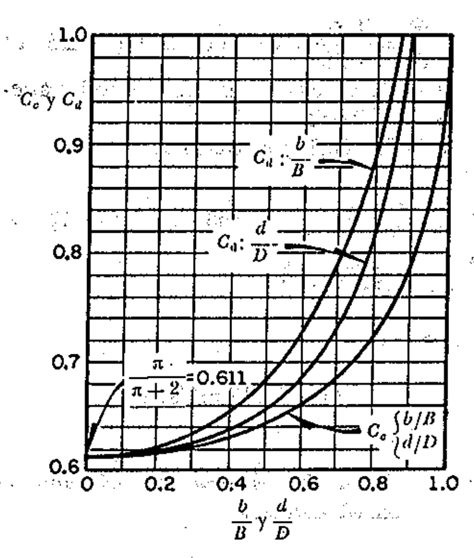


Figura 6.25. Coeficientes de contracción y gasto para los orificios de la figura 6.24 con $\theta = 90°$.

Problema 6.8 Calcular el gasto del orificio (mostrado en la Fig. 6.26) cuyo diámetro $d = 0.12$ m y el tubo que lo alimenta, $D = 0.20$ m. La carga de presión

medida en el manómetro es de 1 kg/cm² y se encuentra a una altura $h = 1.5$ m.

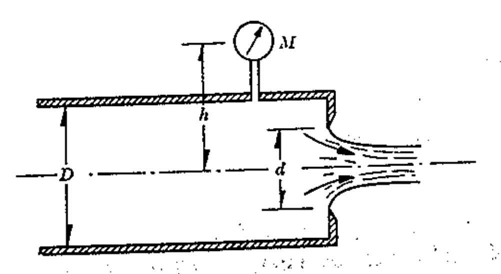


Figura 6.26. Del problema 6.8.

Solución. La carga total sobre el orificio, por ser de eje horizontal, es:

$$\Delta H = h + \frac{p_m}{\gamma} = 1.5 + 10 = 11.5 \text{ m}$$

Con $\frac{d}{D} = \frac{0.12}{0.20} = 0.6$, de la Fig. 6.25, el coeficiente de gasto vale $C_d = 0.689$ y además, $C_v = 0.662$.

De la Ec. (6.31) el gasto vale:

$$Q = C_d A_1 \sqrt{2g\,\Delta H} = 0.689 \times 0.785\,(0.12)^2 \times$$

$$\times \sqrt{2 \times 9.8 \times 11.5}$$

Por tanto:

$$Q = 0.117 \text{ m}^3/\text{seg}$$

6.10 Perfil del chorro en orificios de pared delgada

En la práctica tiene aplicación el conocimiento de la forma que adquiere el chorro entre la sección de un orificio de pared delgada y la contraída. Las formas de la entrada a obras de toma, desagües de fondo en presas y, en general, a cualquier tubería, se diseñan adaptando la pared a la forma del chorro de un orificio circular o rectangular, según el caso.

Orificio circular. Con base en las investigaciones de Douma, Knapp (Ref. 23) concluyó que la estrofoide es la curva que mejor se ajusta a la forma del chorro de un orificio circular de pared delgada (Fig. 6.27) y que la ecuación del chorro es del tipo:

$$\frac{y}{D_c} = 0.148\,z + 0.09 \qquad (6.35)$$

donde

$$z = \frac{y}{x}\,\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1} \qquad (6.36)$$

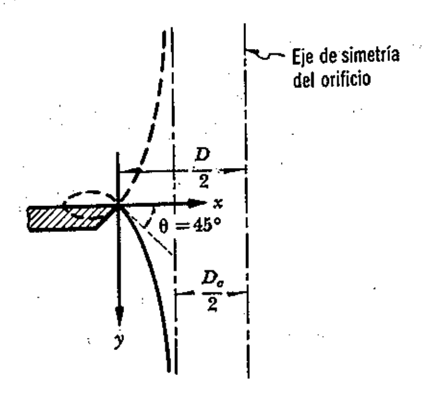


Figura 6.27. La estrofoide como curva límite del chorro.

De sus investigaciones Douma concluyó que la sección contraída del chorro se alcanza para:

$$\frac{x_{máx}}{D_c} = 0.15 \qquad (6.37a)$$

$$\frac{y_{máx}}{D_c} = 0.50 \qquad (6.37b)$$

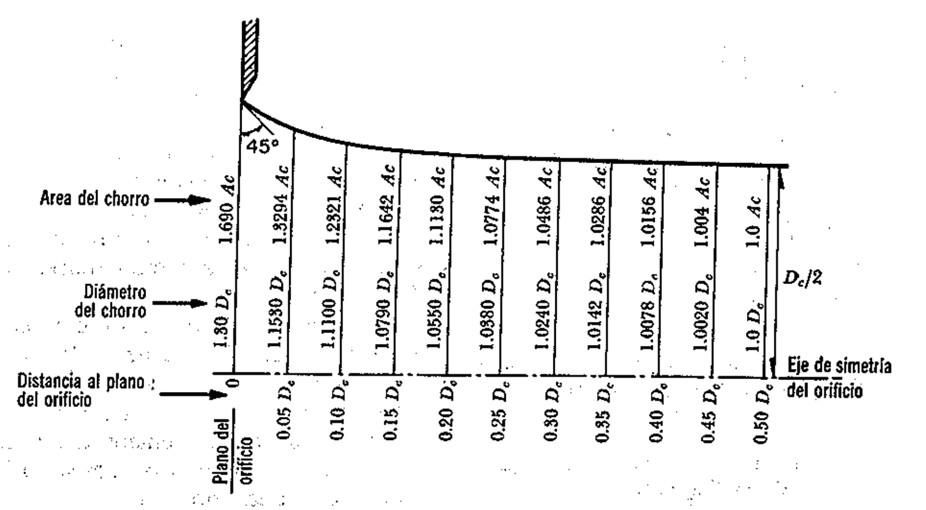


Figura 6.28. Dimensiones del chorro descargado por un orificio circular de pared delgada.

Resultados hasta los cuales es válida la Ec. (6.35). El valor $x_{máx}/D_c = 0.15$ significa que el coeficiente de contracción del chorro es

$$C_c = \left(\frac{1}{1 + 2 \times 0.15}\right)^2 = 0.592$$

lo cual, de acuerdo con la Ec. (6.15) significa que:

$$D = \sqrt{\frac{1}{0.592}}\,D_c = 1.3\,D_c$$

En efecto, si se substituye se tiene que

$$\left(\frac{y}{x}\right)_{máx} = \frac{\frac{y_{máx}}{D_c}}{\frac{x_{máx}}{D_c}} = \frac{0.50}{0.15} = 3.333$$

valor con el cual se verifica la Ec. (6.35). Se puede, además, comprobar que en el origen la tangente a la curva tiene una inclinación de 45° respecto del plano del orificio.

En la figura 6.28 se presenta la forma del chorro de un orificio circular y sus dimensiones en diferentes secciones.

Las formas de la contracción del chorro descargado por un orificio rectangular las estudiaron Thomas y Schuleen (Ref. 23) en orificios practicados en la pared vertical de un recipiente (Fig. 6.29), los cuales tenían la dimensión vertical a y la horizontal b. Dichos investigadores encontraron que la contracción horizontal del chorro (δa) es distinta de la contracción vertical (εa) del mismo, dependiendo de la relación b/a de los lados del orificio.

De acuerdo con la notación de la figura 6.29 se presentan en la tabla 6.4 las dimensiones del chorro: $y/\delta a$ y $z/\varepsilon a$, contra las distancias x/a desde el plano del orificio. En la tabla 6.5 se presentan las contracciones del chorro, δa y εa, para diferentes relaciones b/a.

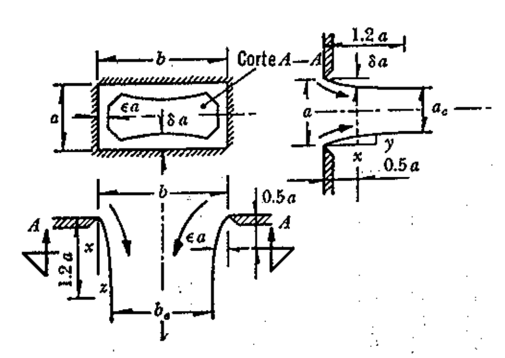


Figura 6.29. Nomenclatura para la contracción del chorro descargado por un orificio rectangular.

TABLA 6.4. Dimensiones del chorro rectangular de la Fig. 6.29

x/a	$y/\delta a$ $x/\varepsilon a$
0.025	0.221
0.050	0.377
0.10	0.563
0.20	0.777
0.30	0.879
0.40	0.956
0.50	1.000
0.60	1.025
0.80	1.049
1.00	1.056
1.20	1.060
∞	1.062

Para fines prácticos, es suficiente considerar que la contracción completa se alcanza a una distancia $x = 1.20\,a$ desde el plano del orificio. En esta sección el chorro tiene la anchura correspondiente al valor de la tabla 6.4, a saber:

$$b_c = b - 2\,(1.06\,\varepsilon\,a) = b - 2.12\,\varepsilon\,a \qquad (6.38a)$$

y altura:

$$a_c = a - 2\,(1.06\,\delta\,a) = a\,(1 - 2.12\,\delta) \qquad (6.38b)$$

la relación de lados vale

$$\frac{b_c}{a_c} = \frac{\dfrac{b}{a} - 2.12\,\varepsilon}{1 - 2.12\,\delta} \qquad (6.39)$$

La tabla 6.5 muestra los valores b_c/a_c de la ecuación anterior para los correspondientes a, δ, ε, de acuerdo con la relación b/a; éstos son de utilidad en el diseño de entradas rectangulares a una obra de toma.

La altura a del chorro —en la sección contraída— se obtiene de la Ec. (6.38b) y, el ancho b, del producto $(b/a)\,a$.

De acuerdo con la tabla 6.5 y las ecuaciones (6.38) las dimensiones en la sección contraída del chorro, descargado por un orificio cuadrado, son:

$$\frac{b_c}{b} = \frac{a_c}{a} = 1 - 2.12 \times 0.1025 = 0.783$$

en comparación con las correspondientes a un orificio circular:

$$\frac{D_c}{D} = \frac{1}{1 + 2 \times 0.15} = 0.77$$

TABLA 6.5. Contracción del chorro rectangular de la Fig. 6.29

b/a	b_c/a_c	δ	ε
1.0	1.0	0.1025	0.1025
1.5	1.70	0.1227	0.1312
2.0	2.41	0.1429	0.150
2.5	3.32	0.1631	0.1575
3.0	4.35	0.1832	0.160
4.0	5.98	0.1832	0.160

6.11 Orificios bajo carga variable

En todos los casos antes tratados se ha considerado que permanece constante la carga con la que funciona el orificio. Sin embargo, también puede estudiarse el caso cuando ésta varíe, es decir, que el nivel de la superficie libre del depósito cambie según ocurra el vaciado del depósito a través del orificio. Para lo anterior debe considerarse un recipiente prismático que se vacía a través de un orificio localizado en su fondo (Fig. 6.30). Se supone que el recipiente tiene una superficie horizontal A muy grande, en comparación con el área A_1 del orificio, y equivale a que la velocidad de descenso del agua en el recipiente $V = Q/A$ sea despreciable (Q es el gasto por el orificio en un instante).

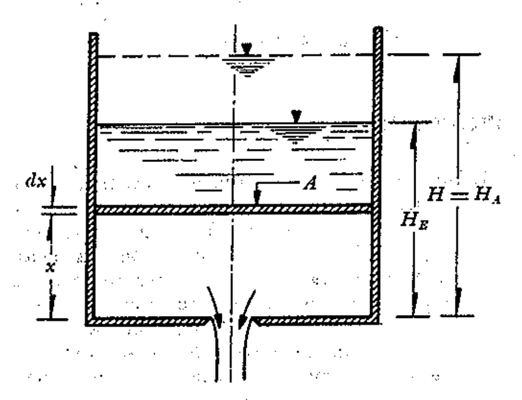


Figura 6.30. Vaciado de un depósito.

El gasto en cualquier instante t es:

$$Q = C_d\,A_1\,\sqrt{2g\,x}$$

Un elemento de volumen $A\,dx$ se vacía en un intervalo de tiempo:

$$dt = \frac{A\,dx}{C_d\,A_1\,\sqrt{2g\,x}}$$

siendo T el tiempo total de vaciado, de la integración se obtiene a

$$T = \frac{A}{C_d\,A_1}\,\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^{H_A}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$T = \frac{A}{C_d\,A_1}\,\frac{2}{\sqrt{2g}}\,\sqrt{H_A} \qquad (6.40a)$$

Esta ecuación se puede también expresar así:

$$T = 2\,\frac{A}{C_d\,A_1}\,\frac{H_A}{\sqrt{2g\,H_A}}$$

Pero AH_A es el volumen total v_A del recipiente y $C_d\,A_1\sqrt{2g\,H_A}$ es el gasto Q_A al iniciarse el vaciado bajo la carga H_A, de donde resulta finalmente que

$$T = 2\,\frac{v_A}{Q_A} \qquad (6.40b)$$

esto es, el tiempo total de vaciado es dos veces mayor del que se tendría si el gasto inicial del orificio Q_A permaneciera constante.

Si el recipiente se vacía hasta el nivel H_B, el tiempo necesario para ello es

$$t_B = 2\left(\frac{v_A}{Q_A} - \frac{v_B}{Q_B}\right)$$

donde:

$$v_B = A\,H_B;\; Q_B = C_d\,A_1\,\sqrt{2g\,H_B}$$

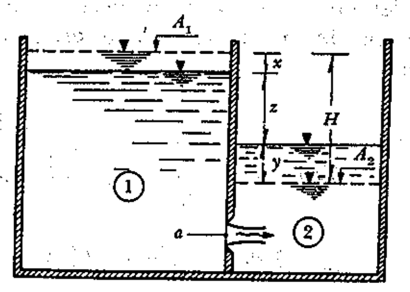


Figura 6.31. Vaciado entre dos recipientes.

El vaciado de un recipiente a otro (figura 6.31) es interesante en problemas de esclusas, en las cuales el descenso x en el nivel del recipiente 1 significa un ascenso y en el nivel del recipiente 2, de tal modo que en cualquier instante t se satisface que:

$$x + y + z = H$$

Si A_1 y A_2 son las áreas horizontales de los recipientes 1 y 2, respectivamente y a la del orificio, en la diferencial de tiempo dt, el volumen es entonces:

$$A_1\, dx = A_2\, dy = C_d\, a \sqrt{2gz}\; dt$$

o bien

$$dx = \frac{C_d\, a\sqrt{2gz}\, dt}{A_1}$$

y

$$dy = \frac{C_d\, a\sqrt{2gz}\, dt}{A_2}$$

Por tanto, siendo $dx + dy + dz = 0$, de las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$C_d\, a\sqrt{2g}\left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right) dt = -z^{-\frac{1}{2}}\, dz$$

El tiempo necesario para pasar de la diferencia de niveles H, a la diferencia H', vale:

$$T = -\frac{1}{C_d\, a\sqrt{2g}\left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right)} \int_H^{H'} \frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$T = \frac{2\, A_1 A_2 (\sqrt{H} - \sqrt{H'})}{C_d\, a\sqrt{2g}\,(A_1 + A_2)} \qquad (6.41)$$

Problema 6.9. Calcular el tiempo necesario para que la diferencia de niveles —entre dos esclusas— pase de $H = 6$ m a $H' = 2$ m, si ambas tienen una área horizontal $A_1 = A_2 = 750$ m² y se comunican a través de dos orificios: cada uno con una área de 0.5 m² y un coeficiente de gasto $C_d = 0.50$.

Solución. Substituyendo $a = 1.00$ m² en la Ec. (6.41), para una área total de los orificios, resulta:

$$T = \frac{2 \times 750^2 (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{0.5 \times 1.00 \times \sqrt{2 \times 9.8} \times 2 \times 750} =$$

$$T = 351 \text{ seg} \approx 6 \text{ min}$$

PROBLEMAS

1. Un orificio de pared delgada, practicado en el lado vertical de un tanque, descarga 0.900 m³ de agua —en 32.6 seg— bajo una carga de 5 m hasta el centro de gravedad. Determinar la caída que experimenta el chorro después de recorrer una distancia horizontal de 4.8 m (ambas medidas desde el centro de gravedad de la sección contraída), así como la pérdida de energía hasta la sección contraída.

2. Calcular el gasto de aceite ($\gamma = 815$ kg/m³) que descarga el orificio de pared delgada mostrado en la figura.

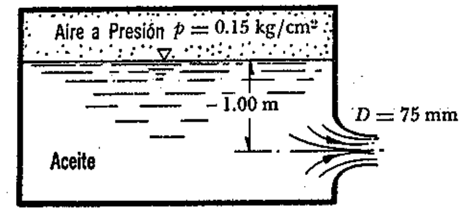


Figura del problema 2

3. Calcular el gasto que descarga el orificio mostrado en la figura.

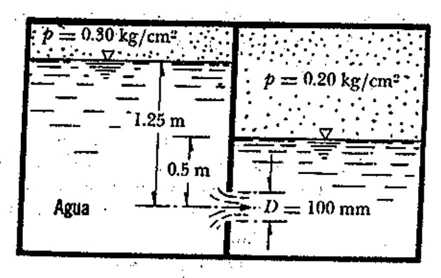


Figura del problema 3

4. Un orificio de pared delgada de 150 mm de diámetro, situado a una profundidad de 7.5 m sobre la pared vertical de un depósito, descarga un gasto de 180 lt/seg de agua. Para sostener una pantalla vertical frente al chorro se necesita una fuerza de 200 kg. Calcular C_v, C_c y C_d.

5. En un tanque de 1.80 m de altura —desde el piso— se practica un orificio sobre su pared vertical a una profundidad H desde la superficie libre. Encontrar el valor de H con el fin de que el chorro tenga el máximo alcance x.

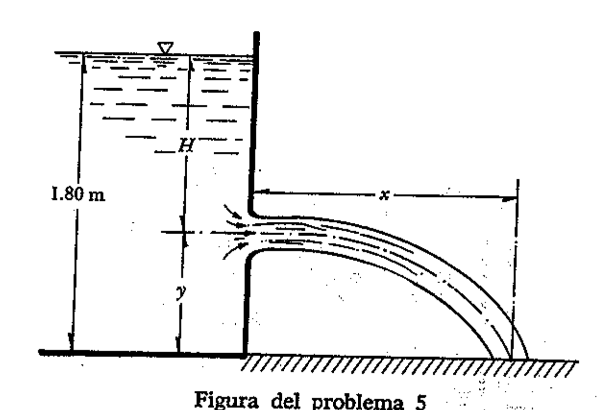


Figura del problema 5

6. La compuerta (mostrada en la figura) tiene un ancho $b = 5$ m. *a)* Calcular el gasto que descarga el tirante y_2 en la sección contraída y la velocidad V_1 de llegada. *b)* ¿Cuál es la altura h adecuada para el perno, de manera que para estas condiciones de descarga el empuje total P pase por dicho perno?

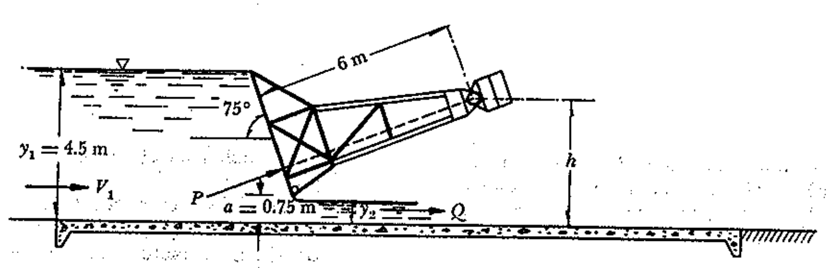


Figura del problema 6

7. *a)* Determinar el gasto que descargaría la compuerta del problema 6 si la pantalla fuera radial con el mismo perno como centro de curvatura y descarga libre.

b) Con la misma compuerta curva determinar qué abertura debería tener si la descarga es ahogada contra un tirante, aguas abajo, $y_3 = 2.50$ m.

8. En la obra de toma cuya geometría se muestra en la figura, las extracciones desde el embalse, se controlan mediante dos compuertas de servicio que obturan dos orificios de 1 m de ancho cada uno y dentro del intervalo de niveles de embalse, indicados. Suponiendo despreciable la pérdida de energía en la rejilla y descarga libre hacia el túnel:

a) calcular la altura h que deben tener los orificios para que, con el nivel mínimo en el embalse y las compuertas totalmente abiertas, el gasto extraído por la toma sea de 15 m³/seg.

b) Elegida esta altura, calcular cuál debe ser la abertura de las compuertas para descargar el mismo gasto, cuando el nivel en el embalse sea el máximo.

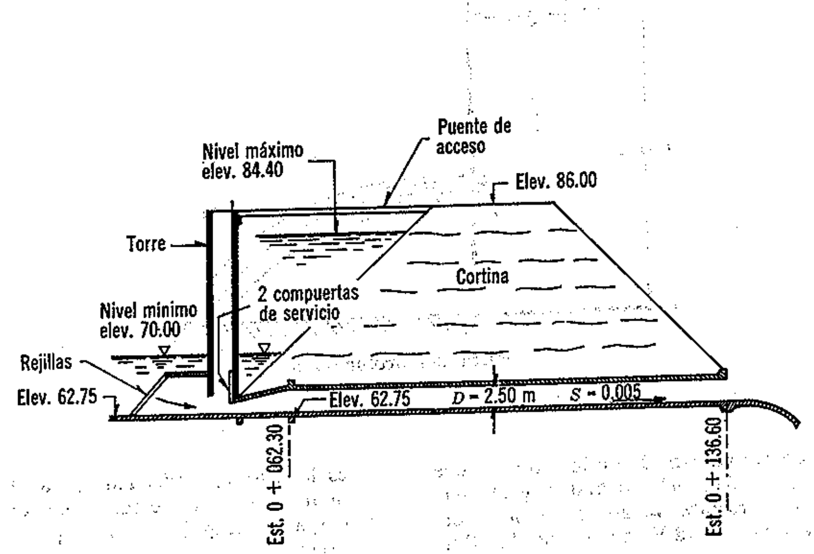


Figura del problema 8

9. La estructura de control (mostrada en la figura) consta de 7 compuertas radiales de 7 m de altura por 9 de ancho, con pilas intermedias de 2 m de espesor.

a) Calcular el gasto que descargan cuando la elevación en el embalse es de 34.40 m y de 48 m.

b) ¿Cuál debe ser la abertura de las compuertas para que, con el agua a un nivel de 48 m, el gasto total sea de 3 000 m³/segundo.

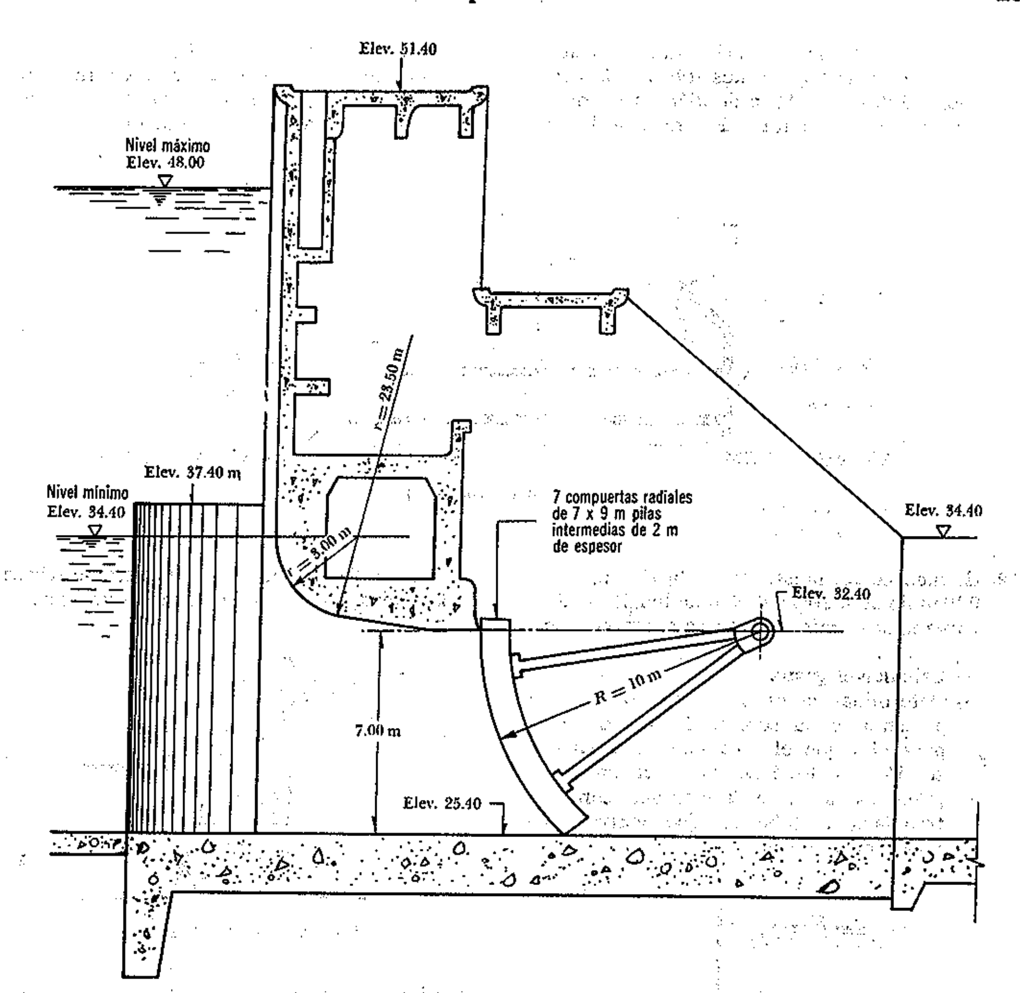
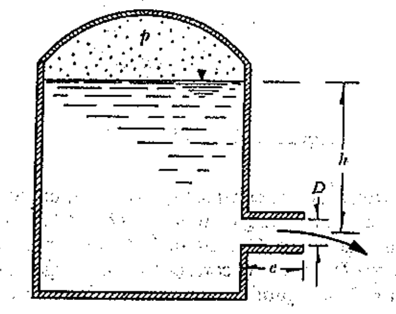
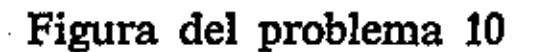


Figura del problema 9

10. El tanque a presión —de la figura— descarga al ambiente por un tubo corto de diámetro $D = 8$ cm y longitud $e = 24$ cm, que se localiza a una profundidad $h = 3$ m desde el nivel de la superficie libre del agua dentro del tanque. Calcular la presión p necesaria sobre la superficie libre del agua dentro del tanque para descargar un gasto $Q = 50$ lt/segundo.




Figura del problema 10

11. La alcantarilla de eje horizontal, mostrada en la figura, consta de dos tubos —de concreto pulido— de 0.80 m de diámetro y debe conducir un gasto total de 5 m³/seg de un lado al otro del terraplén. Determinar si hay la posibilidad de que el agua se vierta sobre el terraplén y, si es el caso, exponer las medidas necesarias para evitarlo.

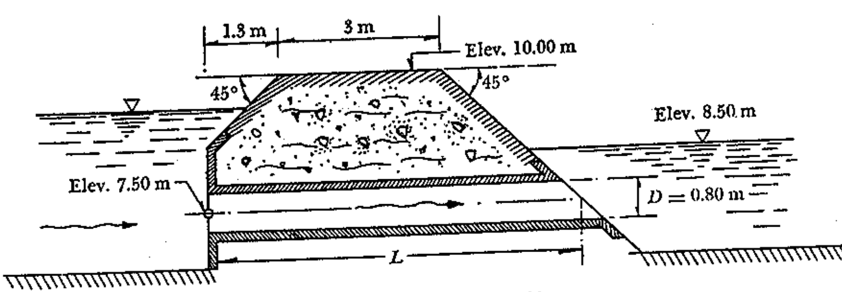


Figura del problema 11

12. El tubo corto, mostrado en la figura, tiene 0.10 m de diámetro y 0.30 m de longitud; descarga aguas abajo contra una carga $h = 8$ m.

a) Calcular el gasto.
b) Determinar la carga de presión que se presenta en la sección 1, considerando para ello que el área contraída en esa sección vale 0.6 A (A: área del tubo).
c) ¿Cuál es la carga h máxima, con que trabajaría el tubo sin que ocurra cavitación en la sección 1?

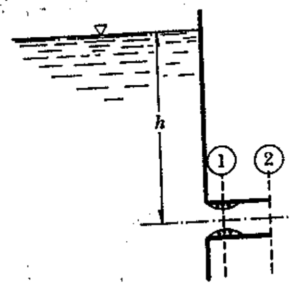


Figura del problema 12

13. A través de un conducto revestido, corto, es necesario descargar un gasto $Q = 2.3$ m³/seg, con una carga $H = 10$ m. Determinar el diámetro D de dicho conducto y la carga mínima h de ahogamiento, aguas abajo, necesaria para que la presión en el conducto no rebase la equivalente a 6 m de columna de agua.

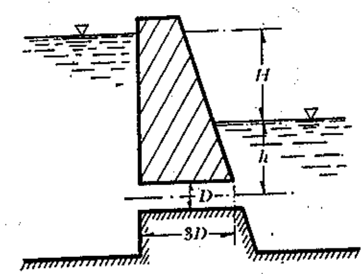


Figura del problema 13

14. El agua fluye desde un depósito (izquierda), hacia otro cerrado (derecha). El nivel en los depósitos y la presión de vacío en el derecho se mantienen constantes e iguales a $h_1 = 7$ m; $h_2 = 3$ m; y $p = 0.2$ kg/cm² (absoluta).

a) Determinar el gasto a través de un conducto cilíndrico de diámetro $d = 0.60$ m.
b) Determinar el gasto si después de dicho conducto se agrega un difusor cónico cuyo diámetro a la salida es $D = 80$ mm, el cual tiene un coeficiente de pérdida $K = 0.3$.
c) Para ambos casos encontrar la presión mínima en la sección estrangulada del conducto y dibujar la línea de cargas piezométricas.

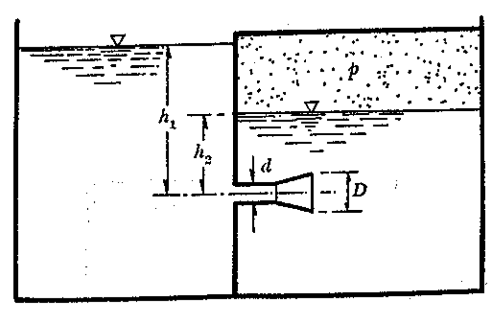


Figura del problema 14

15. Un tubo convergente-divergente colocado en la pared vertical de un tanque desaloja 4.3 lt/seg de agua con una carga de 1.5 m. Suponga que no hay pérdida de energía en la parte convergente del tubo y que la pérdida en la parte divergente es equivalente a 0.18 $(V_2^2/2g)$ (V_2: velocidad en la salida); además, suponga que la carga de presión absoluta mínima tolerable en el estrangulamiento es $p_1/\gamma = 2.40$ m, para una presión atmosférica al nivel del mar.

a) Determinar el diámetro en el estrangulamiento y en la sección de salida del tubo.
b) Suponiendo que se permita el descenso de h, demostrar que la presión en el estrangulamiento es una función lineal de la carga h.

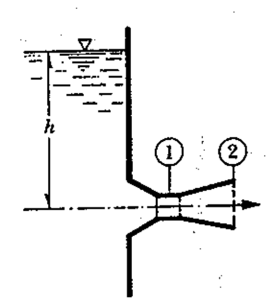


Figura del problema 15

16. Determinar el gasto máximo que puede descargar el tubo divergente, mostrado en la figura, así como la longitud e, para que se satisfagan dichas condiciones.

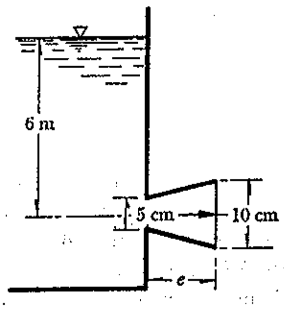


Figura del problema 16

17. Un tubo corto, constituido de dos troncos de conducto de secciones diferentes está situado sobre la pared vertical de un recipiente. El nivel del recipiente se mantiene 5 m por arriba del eje del tubo; la sección a es de 40 cm². Trazar el diagrama del gasto en función de la relación, A/a, haciendo que varíe de 1 a 4. El tubo descarga libremente y los troncos son muy cortos como para que se desprecie la fricción.

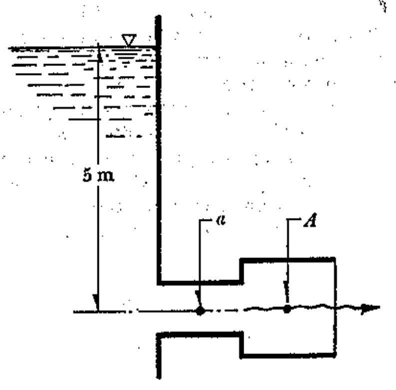


Figura del problema 17

18. Un émbolo es empujado uniformemente, dentro de un tubo de diámetro $D = 60$ mm, por una fuerza $P = 300$ kg y fuerza a la descarga de un líquido ($\gamma = 900$ kg/m³) a través de un orificio de pared delgada, de diámetro $d = 20$ mm, localizado en el extremo final del tubo. Determinar la fuerza dinámi-

ca ejercida sobre la pared del tubo en la tapa que contiene al orificio.

Figura del problema 18

19. Desde el recipiente superior, cerrado, fluye agua al inferior a través de un orificio de pared delgada $d_1 = 30$ mm; después descarga a la atmósfera a través de un tubo corto $d_2 = 20$ mm de diámetro y 60 mm de longitud.

a) Determinar el gasto a través del tubo si el manómetro marca una presión de $p_M = 0.5$ atm; los niveles $h_1 = 2$ m y $h_2 = 3$ m.

b) Calcular la presión p_2 sobre el nivel del agua del depósito inferior.

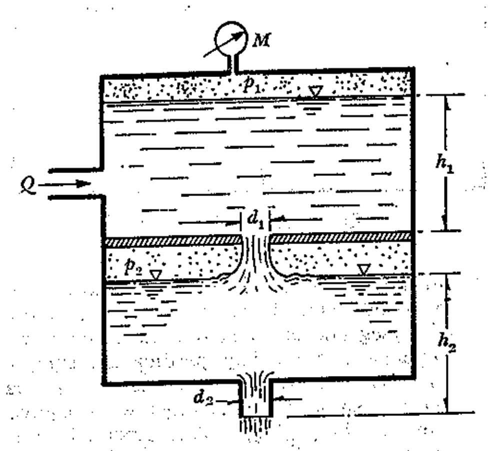


Figura del problema 19

20. Un orificio rectangular de 0.90 m de ancho y 0.60 m de altura, con descarga ahogada, se utiliza para llenar una esclusa de 100 m² de sección horizontal, cuyo nivel se encuentra inicialmente a 3 m arriba del centro del orificio. El nivel del depósito que llena la esclusa permanece constante y a 6 m arriba del centro del orificio. Obtener —por puntos— la curva que relacione el nivel variable del depósito en función del tiempo; considere un coeficiente de descarga del orificio, de 0.61.

21. Para vaciar la alberca (mostrada en la figura) se tiene un orificio de 0.2 m² de sección, situado en el fondo. Trazar, en función del tiempo, el diagrama del nivel del agua en la alberca, considerando un coeficiente de descarga de 0.62. El ancho de la alberca, normal al plano del papel, es de 10 m.

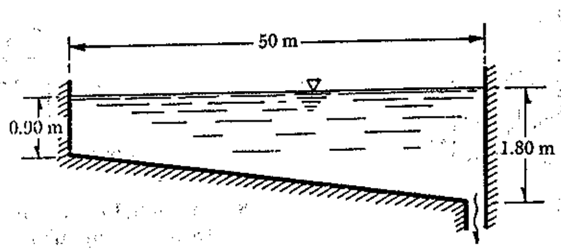


Figura del problema 21

22. Una esclusa de 120 m de longitud, 12 m de ancho y 6 m de altura, se desea vaciar en 12 minutos; calcular la sección de un orificio de descarga ahogada (coeficiente de

descarga 0.6) siguiendo cada una de las tres hipótesis siguientes.

a) Orificio de sección constante.

b) Orificio de sección, creciendo proporcionalmente con el tiempo.

c) Orificio de sección, creciendo proporcionalmente con el cuadrado del tiempo.

En cada caso tratar, en función del tiempo, los diagramas de la altura del agua en la esclusa y el gasto instantáneo en el orificio.

7

VERTEDORES

7.1 Introducción

Cuando la descarga del líquido se efectúa por encima de un muro o una placa y a superficie libre, la estructura hidráulica en la que ocurre se llama vertedor; éste puede presentar diferentes formas según las finalidades a que se destine. Así, cuando la descarga se efectúa sobre una placa con perfil de cualquier forma, pero con arista aguda, el vertedor se llama de pared delgada; por el contrario, cuando el contacto entre la pared y la lámina vertiente es más bien toda una superficie, el vertedor es de pared gruesa. Ambos tipos pueden utilizarse como dispositivos de aforo en laboratorio o en canales de pequeñas dimensiones, pero el segundo puede emplearse como obra de control o de excedencias en una presa y también de aforo en canales grandes.

El punto o arista más bajo de la pared en contacto con la lámina vertiente, se conoce como cresta del vertedor; el desnivel entre la superficie libre, aguas arriba del vertedor y su cresta, se conoce como carga (Fig. 7.1).

7.2 Vertedores de pared delgada

7.2.1 Ecuación general del gasto

Considere un vertedor de pared delgada y sección geométrica, como se observa en la Fig. 7.1, cuya cresta se encuentra a una altura w, medida desde la plantilla del canal de alimentación. El desnivel entre la superficie inalterada del agua, antes del vertedor y la cresta, es h y la velocidad uniforme de llegada del agua es V_0, de tal modo que:

$$H = h + \frac{V_0^2}{2g} \qquad (7.1)$$

Si w es muy grande, $V_0^2/2g$ es despreciable y $H = h$.

De acuerdo con la nomenclatura de la Fig. 7.1b, el perfil de las formas usuales de vertedores de pared delgada se puede representar por la ecuación general:

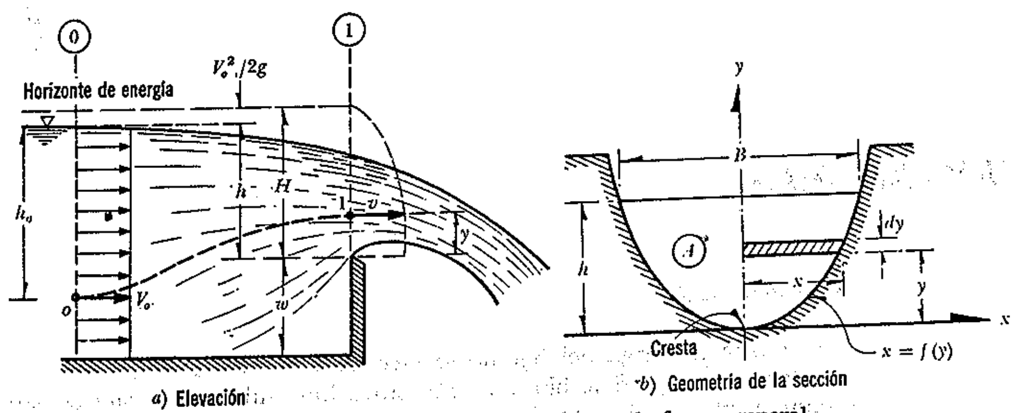


Figura 7.1. Vertedor de pared delgada de forma general.

$$x = f(y) \qquad (7.2)$$

que, normalmente, será conocida.

Aplicando la ecuación de Bernoulli para una línea de corriente entre los puntos 0 y 1, de la Fig. 7.1, se tiene:

$$h_0 + \frac{V_0^2}{2g} = h_0 - h + y + \frac{v^2}{2g}$$

o bien

$$H = h + \frac{V_0^2}{2g} = y + \frac{v^2}{2g} \qquad (7.3a)$$

Si $V_0^2/2g$ es despreciable, la velocidad en cualquier punto de la sección 1 vale

$$v = \sqrt{2g\,(h-y)} \qquad (7.3b)$$

El gasto a través del área elemental, de la Fig. 7.1b, es entonces:

$$dQ = 2\sqrt{2g}\ \mu\ x\sqrt{h-y}\ dy$$

donde μ considera el efecto de contracción de la lámina vertiente. El gasto total vale:

$$Q = 2\sqrt{2g}\ \mu \int_0^h x\,(h-y)^{\frac{1}{2}}\,dy \qquad (7.4)$$

que sería la ecuación general del gasto para un vertedor de pared delgada, la cual es posible integrar si se conoce la forma del vertedor.

En la deducción de la ecuación se han considerado hipótesis únicamente aproximadas, como la omisión de la pérdida de energía que se considera incluida en el coeficiente μ, pero quizá la más importante que se ha supuesto, es la que en todos los puntos de la sección 1 las velocidades tienen dirección horizontal y con una distribución parabólica, Ec. (7.3b), efectuando la integración entre los límites 0 y h. Esto equivale a que en la sección mencionada el tirante debe alcanzar la magnitud h. Por otra parte, al aplicar la ecuación de Bernoulli entre los puntos 0 y 1 se ha supuesto una distribución hidrostática de presiones. Esto implica una distribución uniforme de las velocidades V_0 y v para todos los puntos de las secciones 0 y 1, respectivamente, lo cual está en contraposición con la distribución parabólica que se ha supuesto para derivar la Ec. (7.3b).

La red de flujo de un vertedor rectangular (Fig. 10.12) muestra que las líneas de corriente sobre la cresta poseen una curvatura que modifica la distribución de presiones hidrostáticas, según la ley dada por la Ec. (7.3). En la Fig. 7.2 se presenta la verdadera distribución, tanto de presiones como de velocidades. La red de flujo indica, a su vez, que la lámina vertiente sufre contracciones en su frontera superior e inferior, por lo que existe una sección contraída X sobre el punto de máxima altura alcanzado por la frontera inferior de la lámina vertiente, donde se presentan velocidades cuyas componentes horizontales se apartan de la ley parabólica; además, hay una distribución de presiones también distinta de la hidrostática, como se muestra en la Fig. 7.2.

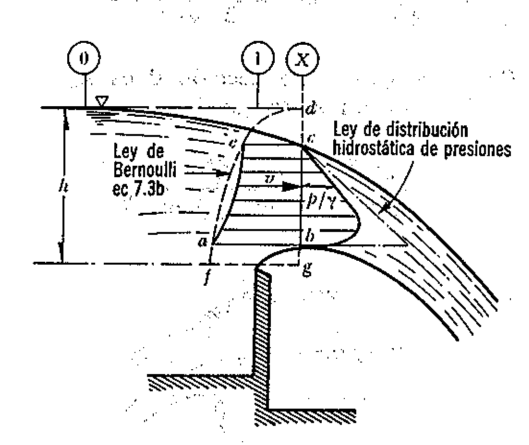


Figura 7.2. Aspecto real del flujo.

Por último, el coeficiente μ de gasto que aparece en la Ec. (7.4) representa la relación entre el área sombreada *a, b, c, e* de la Fig. 7.2, correspondiente a la verdadera distribución de velocidades; y la *f, g, d*, correspondiente a la parábola de distribución hipotética de velocidades, a saber:

$$\mu = \frac{\text{área achurada } a, b, c, e}{\text{área de la parábola } f, g, d}$$

Debe ser de tipo experimental y próximo a 0.60, que corresponde al de un orificio de pared delgada.

7.2.2 Vertedor rectangular

Para esta forma de vertedor la ecuación (7.2) es del tipo $x = b/2$ donde b es la longitud de cresta (Fig. 7.3).

Luego, la Ec. (7.4) es:

$$Q = -\mu\sqrt{2g}\ b\int_0^h (h-y)^{\frac{1}{2}}\,(-dy)$$

y efectuando la integración es:

$$Q = -\frac{2}{3}\ \mu\ \sqrt{2g}\,b\,\left[(h-y)^{3/2}\right]_0^h$$

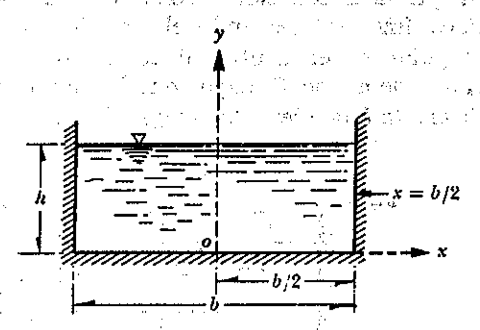


Figura 7.3. Vertedor rectangular.

y finalmente:

$$Q = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\ \mu\,b\,h^{3/2} \qquad (7.5)$$

que es la ecuación general para calcular

el gasto en un vertedor rectangular cuya carga de velocidad de llegada es despreciable. En los países que utilizan el sistema inglés de unidades se acostumbra agrupar los términos $\frac{2}{3}\sqrt{2g}\ \mu$, en un solo coeficiente C, de tal manera que

$$Q = C\, b\, h^{3/2} \qquad (7.6)$$

Esta ecuación es más sencilla que la (7.5) si bien no es homogénea, es decir, que el coeficiente C tiene las dimensiones $[L^{\frac{1}{2}}\, T^{-1}]$ y vale:

$$C = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,\mu = 2.952\,\mu \qquad (7.7)$$

A pesar de que las ecuaciones (7.5) o (7.6) valen únicamente en el caso de una velocidad de llegada despreciable, diferentes autores han investigado y obtenido fórmulas experimentales para evaluar μ, en las cuales se incluya dicho efecto para permitir que tales ecuaciones conserven su validez. En efecto, cuando el vertedor rectangular se encuentra al centro de un canal, de ancho B mayor que la longitud de cresta b del vertedor (Fig. 7.4), se producen contracciones laterales semejantes a las de un orificio. En la Ec. (7.5) se utiliza la carga total $H = h + \frac{V_0^2}{2g}$ (ecuación 7.1) en lugar de h:

$$Q = \frac{2}{3}\,\mu\sqrt{2g}\, b\left(h + \frac{V_0^2}{2g}\right)^{3/2} \qquad (7.8a)$$

Esta ecuación se puede también escribir en la forma siguiente:

$$Q = \frac{2}{3}\mu\left(1 + \frac{V_0^2}{2gh}\right)^{3/2}\sqrt{2g}\, b\, h^{3/2} =$$

$$= \kappa\sqrt{2g}\, b\, h^{3/2} \qquad (7.8b)$$

El paréntesis en la ecuación anterior se puede desarrollar en forma aproximada como sigue:

$$\left(1 + \frac{V_0^2}{2gh}\right)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}\frac{V_0^2}{2gh} + \cdots$$

Como el área en la sección 0 es $A_0 = B\,(h + w)$, resulta que

$$\frac{V_0^2}{2g\,h} = \frac{Q^2}{2g\,B^2\,(h + w)^2\, h}$$

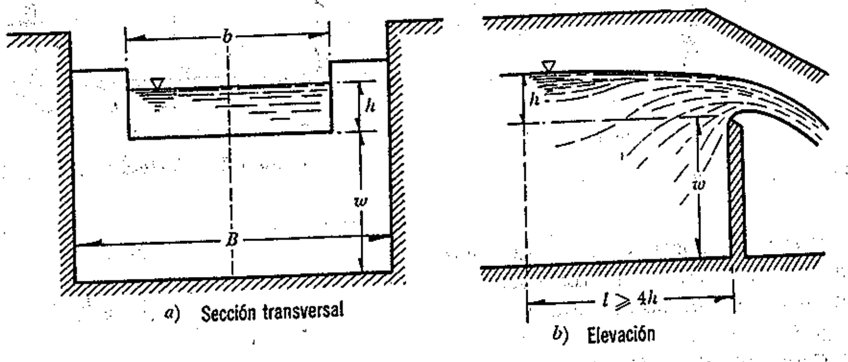


Figura 7.4. Vertedor rectangular con contracciones laterales.

Además,

$$\left(1 + \frac{V_0^2}{2gh}\right)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}\frac{Q^2}{2g\,B^2\,(h + w)^2\, h}$$

Por otra parte, de la Ec. (7.8b) se tiene:

$$Q^2 = \kappa^2\, 2\, g\, b^2\, h^3$$

que substituida en la anterior resulta:

$$\left(1 + \frac{V_0^2}{2gh}\right)^{3/2} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\frac{\kappa^2\, 2\, g\, b^2\, h^3}{2g\,B^2\,(h + w)^2\, h} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2}\kappa^2\left(\frac{b}{B}\right)^2\left(\frac{h}{h + w}\right)^2$$

Substituyendo en la Ec. (7.8b) resulta finalmente:

$$Q = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,\mu \left[1 + \frac{3}{2}\kappa^2\left(\frac{b}{B}\right)^2\left(\frac{h}{h + w}\right)^2\right] b\, h^{3/2} \qquad (7.9)$$

Lo cual demuestra que el gasto se puede seguir calculando con la Ec. (7.5) siempre que en el coeficiente μ se incluyan los efectos de b/B y de w.

Cuando el ancho del canal de llegada es igual que el de la cresta (esto es, que el vertido se efectúa sin contracciones laterales) es suficiente hacer $b = B$ en la Ec. (7.9) para llegar a conclusiones semejantes en el uso de la Ec. (7.5).

En la tabla 7.1 se presentan las fórmulas experimentales más conocidas para calcular μ de la Ec. (7.5) aplicables a vertedores con contracciones laterales o sin ellas, que tienen validez únicamente cuando la superficie inferior de la lámina vertiente se ventila correctamente. Cuando no es el caso, en la Ref. 7 se pueden obtener fórmulas adecuadas y, en la Ref. 24, una descripción detallada del funcionamiento para estas condiciones.

Además de respetar los límites de aplicación de las fórmulas, para obtener mejores resultados en la medición de gastos con vertedores rectangulares se recomienda que la cresta del vertedor sea perfectamente horizontal, con un espesor no mayor de 2 mm en bisel y la altura desde el fondo del canal $0.30\text{ m} \leqslant w \geqslant 2h$. El plano del vertedor debe ser normal al flujo y la cara, aguas arriba, perfectamente vertical, plana y lisa. El vertedor deberá instalarse al centro de un canal recto que tenga una longitud mínima de diez veces la longitud de cresta del vertedor y un área de, por lo menos, $8\,b\,h$. Si el vertedor tiene contracciones, la distancia entre los extremos del vertedor y el costado del canal no debe ser menor que 0.30 m. Si no tiene contracciones laterales debe hacerse una ventilación eficiente de la superficie inferior de la lámina vertiente. En cualquier caso, la carga sobre la cresta se debe medir en un punto a, por lo menos, cuatro veces la carga máxima hacia aguas arriba.

Cuando el vertedor rectangular sin contracciones laterales tiene una inclinación θ con respecto a la horizontal (Fig. 7.5), el coeficiente de gasto μ de la tabla 7.1 debe multiplicarse por un coeficiente C_θ que depende del ángulo de inclinación θ y que, según Boussinesq (Ref. 30), es:

$$C_\theta = 1.1951 - 0.3902\,\frac{\theta^\circ}{180^\circ} \qquad (7.10)$$

Esta ecuación es válida únicamente en el caso de que la lámina se encuentre bien ventilada y presenta mayor interés en el caso que la cresta sea móvil; por ejemplo, es conveniente una compuerta articulada en el apoyo inferior.

TABLA 7.1. Fórmulas experimentales para determinar el coeficiente de gasto μ aplicable a la Ec. (7.5) para vertedores rectangulares con contracciones laterales o sin ellas. En el caso de vertedores sin contracciones laterales haga $b = B$, *en las fórmulas.*

Autor	*Fórmula*	*Límites de aplicación*	*Observaciones*
Hegly (Ref. 30) (1921)	$\mu = \left[0.6075 - 0.045\left(\frac{B-b}{B}\right) + \frac{0.0041}{h}\right] \times \left[1 + 0.55\left(\frac{b}{B}\right)^2\left(\frac{h}{h+w}\right)^2\right]$	$0.10\ \text{m} \leq h \leq 0.60\ \text{m}$ $0.50\ \text{m} \leq b \leq 2.00\ \text{m}$ $0.20\ \text{m} \leq w \leq 1.13\ \text{m}$	El primer límite de aplicación es el más importante. Para $h/b > 0.13$ tiene mayor precisión que la fórmula SIAS.
Sociedad de Ingenieros y Arquitectos Suizos (1924) (Ref. 9) (Fórmula SIAS)	$\mu = \left[0.578 + 0.037\left(\frac{b}{B}\right)^2 + \frac{3.615 - 3(b/B)^2}{1000h + 1.6}\right] \times \left[1 + 0.5\left(\frac{b}{B}\right)^4\left(\frac{h}{h+w}\right)^2\right]$	$0.025 \leq h \leq 0.80\ \text{m}$ $b \leq 0.3\ B$ $w \geq 0.30\ \text{m}$ $\frac{h}{w} \leq 1$ en el caso de contracciones laterales	Para vertedores sin contracciones laterales los límites son: $0.025\ \text{m} \leq h \leq 0.80\ \text{m}$ $0.30\ \text{m} \leq w$ $\frac{h}{w} \leq 1$ Para $h/b \leq 0.13$, es más precisa que la de Hegly.
Hamilton-Smith	$\mu = 0.616\left(1 - \frac{b}{10B}\right)$	$0.075\ \text{m} \leq h \leq 0.60\ \text{m}$ $0.30\ \text{m} \leq b$ $0.30\ \text{m} \leq w$ $h \leq \frac{w}{2}$ $b \leq (B - 2h)$ $\frac{h}{b} \leq 0.5$	Si $B(h + w) < 10bh$, se deberá reemplazar en la Ec. (7.5) el valor de h por h' donde $h' = h + 1.4\left(\frac{V_0^2}{2g}\right)$ donde: $V_0 = \left[\frac{Q}{B(h+w)}\right]$ es la velocidad de llegada
Francis (Ref. 31)	$\mu = 0.623\left[1 - 0.1n\frac{h}{b}\right]\left[\left(1 + \frac{V_0^2}{2gh}\right)^{3/2} - \left(\frac{V_0^2}{2gh}\right)^{3/2}\right]$	$0.18\ \text{m} \leq h \leq 0.50\ \text{m}$ $2.40\ \text{m} \leq b \leq 3.00\ \text{m}$ $0.60\ \text{m} \leq w \leq 1.50\ \text{m}$ $b \geq 3h$	$V_0 = \frac{Q}{B(h+w)}$, velocidad de llegada. $n = 2$ en vertedores con contracciones laterales. $n = 0$ en vertedores sin contracciones laterales.
Rehbock (1929) (Ref. 9)	$\mu = \left[0.6035 + 0.0813\left(\frac{h + 0.0011}{w}\right)\right]\left[1 + \frac{0.0011}{h}\right]^{3/2}$	$0.01\ \text{m} \leq h \leq 0.80\ \text{m}$ $b \geq 0.30\ \text{m}$ $w \geq 0.06\ \text{m}$ $\frac{h}{w} \leq 1$	Vale sólo para vertedores sin contracciones laterales. Es muy precisa y de las más utilizadas, por su sencillez.

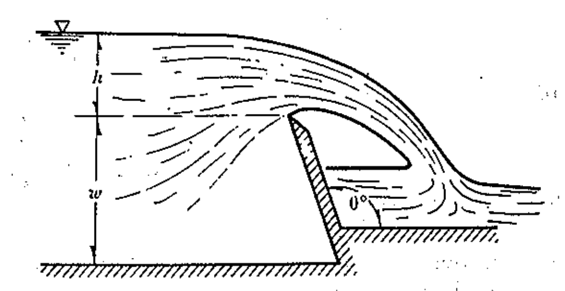


Figura 7.5. Vertedor inclinado.

Problema 7.1. Calcular el gasto en un vertedor rectangular de pared delgada en un canal del mismo ancho de la cresta $b = 2.5$ m, que trabaja con una carga $h = 0.42$ m, cuya cresta se encuentra a $w = 1.00$ m del piso del canal.

Solución. De la fórmula de Hegly (tabla 7.1) para $b = B$, tenemos:

$$\mu = \left[0.6075 + \frac{0.0041}{0.42}\right]$$

$$\left[1 + 0.55\left(\frac{0.42}{0.42 + 1.00}\right)^2\right] = 0.647$$

$$C = 2.952 \times 0.647 = 1.910$$

Substituyendo en la Ec. (7.6):

$$Q = 1.910 \times 2.5 \times (0.42)^{3/2} = 1.3\ \text{m}^3/\text{seg}$$

Utilizando la fórmula de Rehbock resulta:

$$Q = 2.952\left(0.6035 + 0.0813\,\frac{0.42 + 0.0011}{1.00}\right)$$

$$\left(1 + \frac{0.0011}{0.42}\right)^{3/2} 2.5\,(0.42)^{3/2}$$

Finalmente se tiene

$$Q = 1.286\ \text{m}^3/\text{seg}$$

Esto es, una diferencia de 1.1 % entre ambos resultados.

Problema 7.2. Calcular la carga necesaria en el vertedor del problema anterior, si se desea un gasto de $2\ \text{m}^3/\text{seg}$ en las mismas condiciones de descarga libre.

Solución. Se procede por tanteos suponiendo que con $C \approx 1.92$ en la Ec. (7.6), el gasto es aproximadamente $Q = 1.92 \times 2.5 \times h^{3/2}$.

Se empezará a calcular con

$$h = \left(\frac{2}{1.92 \times 2.5}\right)^{2/3} = 0.56\ \text{m}$$

Como C aumenta con h^2, es de esperarse que sea mayor que $C = 1.91$ del problema anterior; así, para este caso los valores h deben ser menores de 0.56 m.

De lo anterior, con $h = 0.555$ m, de la fórmula Hegly, resulta $C = 1.944$, siendo el gasto:

$$Q = 1.944 \times 2.5\,(0.555)^{3/2} = 2.009\ \text{m}^3/\text{seg}$$

que es prácticamente el valor buscado.

Problema 7.3. ¿Cuál sería el gasto en el problema 7.1 si el vertedor tuviera una inclinación $\theta = 45°$ (Fig. 7.5)?

Solución. De la Ec. (7.10) tenemos que

$$C_\theta = 1.1951 - 0.3902 \times \frac{45}{180} = 1.0976$$

y resulta:

$$Q = 1.0976 \times 1.299 = 1.426 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Problema 7.4. Calcular la descarga libre de un vertedor rectangular de 3 m de longitud con una carga de 0.60 m, ubicado en un canal de forma rectangular que tiene 5 m de ancho, en el que la elevación de la cresta es de 0.80 m sobre el fondo.

Solución. La relación h/b es

$$\frac{h}{b} = \frac{0.60}{3} = 0.2 > 0.13$$

luego, de la fórmula de Hegly:

$$\mu = \left(0.6075 - 0.045\frac{5-3}{5} + \frac{0.0041}{0.60}\right)\left[1 + 0.55\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{0.60}{0.6+0.8}\right)^2\right]$$

$$\mu = 0.618$$

y, finalmente,

$$Q = 2.952 \times 0.618 \times 3 \times (0.60)^{3/2}$$

$$Q = 2.544 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Para utilizar la fórmula de Francis es necesario calcular la carga de velocidad de llegada, lo cual significa conocer previamente el gasto y seguir un procedimiento de tanteos. Suponiendo, por ejemplo, que Q fuera el calculado anteriormente, entonces

$$V_0 = \frac{2.544}{5\,(0.8 + 0.6)} = 0.363 \text{ m/seg}$$

$$\frac{V_0^2}{2g} = \frac{(0.363)^2}{19.6} = 0.0067 \text{ m}$$

$$Q = 2.952 \times 0.623\left[1 - 0.2\frac{0.60}{3}\right]\frac{\left[\left(1+\frac{0.0067}{0.6}\right)^{3/2} - \left(\frac{0.0067}{0.6}\right)^{3/2}\right]}{3 \times (0.60)^{3/2}}$$

Por último:

$$Q = 2.500 \text{ m}^3/\text{seg}$$

que es prácticamente el valor antes obtenido.

Problema 7.5. Sobre una placa con las dimensiones que se presentan en la figura 7.6 se produce un vertido superior y una descarga por el orificio del fondo. El ancho de la placa es de 1.00 m y es igual al del canal. Determinar cuál es el gasto de vertido si el del orificio es $Q_0 = 0.3$ m³/seg, suponiendo que en ambos la descarga es libre.

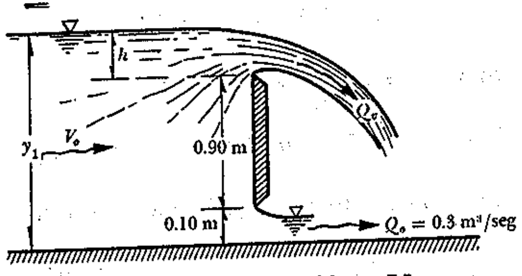


Figura 7.6. Del problema 7.5.

Solución. Es necesario determinar el tirante total que debe existir, aguas arriba de la placa, para lo cual se debe suponer inicialmente un coeficiente de gasto del orificio (Fig. 6.16) en $C_d = 0.595$ para el orificio (Fig. 6.16) en la Ec. (6.25), de la que

$$y_1 = \left(\frac{Q_0}{C_d\, b\, a\sqrt{2g}}\right)^2 = \left(\frac{0.30}{0.595 \times 1 \times 0.10\sqrt{19.62}}\right)^2$$

$$y_1 \approx 1.30 \text{ m}$$

Nuevamente se calcula $y_1/a = 13$; de la Fig. 6.16, se tiene que $C_d = 0.595$, que es el resultado anterior. La carga sobre la cresta sería entonces:

$$h = 1.30 - 0.90 - 0.10 = 0.30 \text{ m}$$

Puesto que la descarga del vertedor se hace sin contracciones laterales, la ecuación de Rehbock sería válida, a saber:

$$Q_v = 2.952\left(0.6035 + 0.0813\frac{0.301}{1}\right)\left(1 + \frac{0.0011}{0.30}\right)^{3/2} \times 1 \times (0.30)^{3/2}$$

$$Q_v = 0.306 \text{ m}^3/\text{seg}$$

La velocidad de llegada para el gasto total $Q = 0.3 + 0.306 = 0.606$

$$V_0 = \frac{0.606}{1 \times 1.30} = 0.466 \text{ m/seg}$$

y la carga de velocidad de llegada:

$$\frac{V_0^2}{2g} = \frac{(0.466)^2}{19.6} = 0.01 \text{ m}$$

que es insignificante en comparación de y_1, siendo entonces válidos los resultados anteriores.

Problema 7.6. Si en la instalación de la Fig. 7.7 el gasto que proporciona la bomba es $Q = 1.00$ m³/seg y la longitud de cresta de ambos vertedores es $b = 1.30$ m, determinar las condiciones de funcionamiento para los siguientes casos:

a) Para $d = 0.50$ m (diámetro del orificio), calcular los gastos en los vertedores Q_A y Q_B.

b) Conocidos $Q_A = 0.900$ m³/seg y $Q_B = 0.100$ m³/seg, calcular el diámetro d del orificio.

En ambos casos, de la fórmula de Francis, el coeficiente de gasto de los vertedores es

$$C_d = 2.952\,\mu = 1.84$$

y el del orificio:

$$C_d = 0.60$$

Solución *a)* Si el área del orificio es $A = 0.7854 \times (0.50)^2 = 0.1963$ m² y el gasto descargado por el mismo, es función de ΔH, de acuerdo con la Ec. (6.21) da

$$Q_0 = 0.6 \times 0.1965 \times \sqrt{2 \times 9.8 \times \Delta h} = 0.522\sqrt{\Delta h} \qquad \text{(a)}$$

y el gasto descargado por los vertedores será:

$$Q_A = 1.84 \times 1.3\, h_A^{3/2} = 2.392\, h_A^{3/2} \qquad \text{(b)}$$

y

$$Q_B = 2.392\, h_B^{3/2} \qquad \text{(c)}$$

Además:

$$Q_0 = Q_B \qquad \text{(d)}$$

$$Q_A + Q_B = 1.00 \qquad \text{(e)}$$

$$0.10 + h_A = h_B + \Delta h \qquad \text{(f)}$$

Primer tanteo. La variación del gasto en el orificio es menos sensible que en los vertedores al cambiar los niveles en

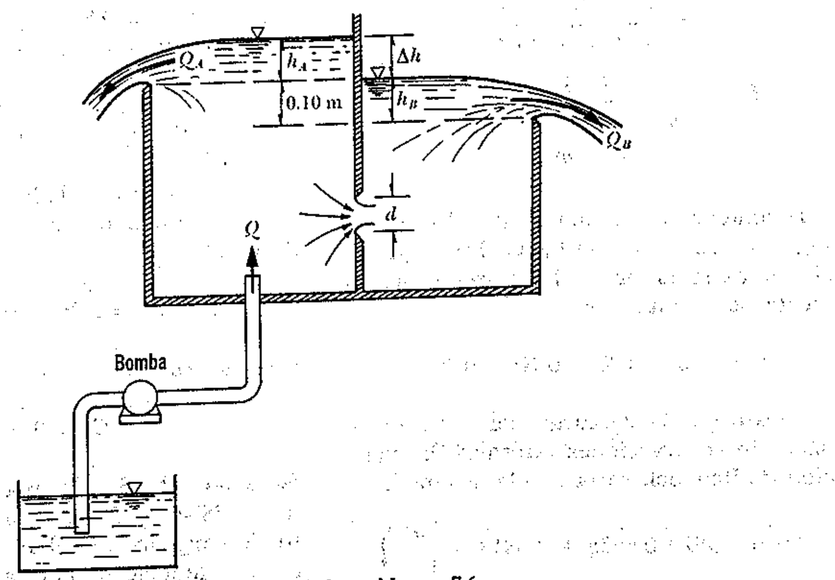


Figura 7.7. Del problema 7.6.

los tanques; por lo tanto, el gasto Q_B será, seguramente, menor que Q_A. De lo anterior se deduce que $\Delta h > 0.10$ m, pero no mayor que

$$h_A = \left(\frac{1}{2.39}\right)^{2/3} = 0.56 \text{ m}$$

Si

$$\Delta h = 0.30 \text{ m}$$

De la Ec. (a) se obtiene:

$$Q_0 = Q_B = 0.522\sqrt{0.3} = 0.286 \text{ m}^3/\text{seg}$$

y por lo tanto de la Ec. (e) resulta:

$$Q_A = 1 - 0.286 = 0.714 = 2.392\, h_A^{3/2}$$

De la Ec. (b) tenemos:

$$h_A = \left(\frac{0.714}{2.392}\right)^{2/3} = 0.447$$

y, finalmente, de la Ec. (f)

$$h_B = \left(\frac{0.286}{2.392}\right)^{2/3} = 0.243 \text{ m}$$

Un valor más aproximado para Δh sería:

$$\Delta h = 0.10 + 0.447 - 0.243 = 0.304 \text{ m}$$

que es prácticamente el supuesto, luego el tanteo es correcto. De no haber resultado así, se hubiera repetido el tanteo, siendo de cualquier manera muy rápida la convergencia, a saber:

$$Q_A = 0.714 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_B = 0.286 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Solución *b)* Resulta más sencillo y las ecuaciones aplicables son de (b) a (f), pero no la (a); entonces, de las Ecs. (b) y (c) resulta:

$$h_A = \left(\frac{0.900}{2.39}\right)^{2/3} = 0.52 \text{ m}$$

$$h_B = \left(\frac{0.100}{2.39}\right)^{2/3} = 0.12 \text{ m}$$

De la Ec. (f):

$$\Delta h = 0.10 + 0.52 - 0.12 = 0.50 \text{ m}$$

y para el orificio, su diámetro es

$$0.10 = 0.6\,(\pi d^2/4)\sqrt{2 \times 9.8 \times 0.50}$$

$$d = \sqrt{\frac{0.10}{1.475}} = 0.26 \text{ m}$$

7.2.3 Vertedor triangular

Cuando el vertedor es de sección triangular (Fig. 7.8), simétrica respecto del eje vertical y con ángulo en el vértice θ, el valor x de la Ec. (7.2) es:

$$x = y \tan\frac{\theta}{2}$$

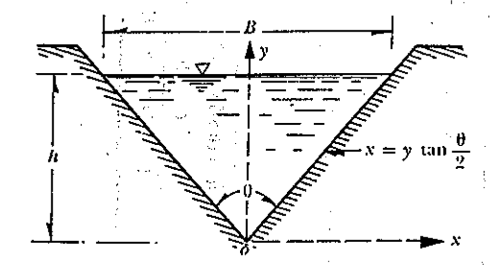


Figura 7.8. Vertedor triangular.

y la ecuación del gasto (7.4) es

$$Q = 2\sqrt{2g}\,\mu \tan(\theta/2)\int_0^h (h-y)^{1/2}\, y\, dy$$

la cual se puede integrar por un procedimiento de substitución. En efecto, haciendo $z = h - y$, entonces $y = h - z$, $dy = -dz$. Los límites de integración serían: para $y = 0$, $z = h$ y para $y = h$, $z = 0$; la ecuación anterior sería entonces:

$$Q = -2\sqrt{2g}\,\mu \tan(\theta/2)\int_h^0 z^{1/2}(h-z)\,dz =$$

$$= -2\sqrt{2g}\,\mu \tan(\theta/2)\left[\frac{2\,hz^{3/2}}{3} - \frac{2}{5}z^{5/2}\right]_h^0$$

Tomando límites y substituyendo nuevamente a z, se obtiene

$$Q = \frac{8}{15}\sqrt{2g}\tan(\theta/2)\,\mu\, h^{5/2} \quad (7.11a)$$

o bien

$$Q = C\,h^{5/2} \quad (7.11b)$$

donde C depende de θ, μ y g. Así, por ejemplo, con $\theta = 90°$ vemos que

$$C = \frac{8}{15}\sqrt{2g}\,\mu = 2.362\,\mu$$

En la tabla 7.2 se presentan las fórmulas experimentales más conocidas para calcular μ ó C de las Ecs. (7.11) y son válidas para diferentes ángulos θ en el vértice.

Si w es pequeña, el vertedor triangular puede funcionar ahogado. Si h_1 representa la carga, aguas abajo (Fig. 7.11), el coeficiente de gasto con descarga libre deberá multiplicarse por un coeficiente k independiente del ángulo θ, que vale:

$$k = \sqrt{1 - \frac{h_1}{h}}\left[1 + \frac{h_1}{2h} + \frac{3}{8}\left(\frac{h_1}{h}\right)^2\right] \quad (7.12)$$

Los vertedores triangulares se recomiendan para el aforo de gastos inferiores

TABLA 7.2. Fórmulas experimentales para determinar los coeficientes de gasto μ o C aplicables a las Ecs. (7.11a) o (7.11b) para vertedores triangulares con diferentes ángulos θ en el vértice. B representa el ancho del canal de llegada y w el desnivel entre el vértice del vertedor y el fondo de dicho canal. En cualquier caso, las fórmulas se expresan en el sistema MKS

Autor	*Fórmula*	*Límites de aplicación*	*Observaciones*
Universidad Católica de Chile (Ref. 24).	$C = \frac{8}{15}\sqrt{2g}\tan(\theta/2)\,\mu K$	Vale para $15° \leqq \theta \leqq 120°$. La profundidad w no tiene influencia en el coeficiente de gasto.	μ, coeficiente experimental que depende de h y θ según la Fig. 7.9. K es otro coeficiente que depende de B/h según la Fig. 7.10 y vale 1 si $B/h \geqq 5$ para $\theta = 90°$ y si $B/h \geqq 2.75$ para $\theta = 45°$.
Gourley y Crimp (Ref. 31).	$C = \frac{1.32\tan(\theta/2)}{h^{0.03}}$	Vale para ángulos θ de 45°, 60° y 90° y para profundidades w grandes.	Esta fórmula, substituida en la ecuación (7.11b), conduce a la ecuación: $Q = 1.32\tan(\theta/2)\,h^{2.47}$
Hegly (1921) (Ref. 31).	$\mu = \left[0.5812 + \frac{0.00375}{h}\right]\left\{1 + \left[\frac{h^2}{B(h+w)}\right]^2\right\}$	Vale para $\theta = 90°$; $0.10\text{ m} \leqq h \leqq 0.50\text{ m}$ y profundidades w pequeñas	Es de las fórmulas más precisas para vertedores con ángulo en el vértice $\theta = 90°$.
Barr (1909) (Ref. 22).	$\mu = 0.565 + \frac{0.0087}{h^{0.5}}$	Vale para $\theta = 90°$ con cargas $0.05\text{ m} \leqq h \leqq 0.25\text{ m}$; $w \geqq 3h$; $B \geqq 8h$	El valor medio $\mu = 0.593$ que resulta de esta fórmula corresponde bastante al resultado de Thompson (1861) y que substituido en la Ec. (7.11a), conduce a la ecuación: $Q = 1.42\,h^{5/2}$
Koch (1923) Yarnall (1926)	$\mu = 0.58$	Vale para $\theta = 90°$ con cargas muy grandes. $w \geqq 3h$; $B \geqq 8h$	No se limita con precisión el rango de validez.
Heyndrickx (Ref. 30).	$\mu = [0.5775 + 0.214\,h^{1.25}] \times \left\{1 + \left[\frac{h^2}{B(h+w)}\right]^2\right\}$	Vale para $\theta = 60°$ y cargas normales.	Es bastante precisa.

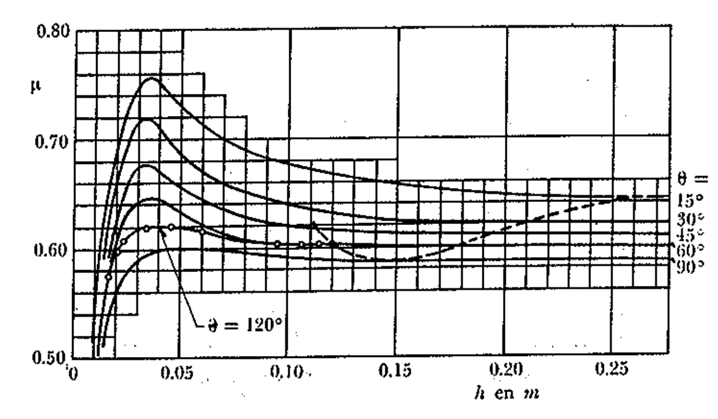


Figura 7.9. Coeficiente de gasto μ de vertedores triangulares en la fórmula de la Universidad Católica de Chile (Ref. 24).

a 30 lt/seg y cargas superiores a 6 cm y hasta de 60 cm. Su precisión es mejor que la del rectángular, para gastos pequeños, e incluso para gastos comprendidos entre 40 y 300 lt/seg. Para gastos mayores es recomendable el rectangular debido a que el triangular es más sensible a cualquier cambio en la rugosidad de la placa y, también, porque requiere mayor exactitud en la medición de las cargas, pues el gasto varía con la potencia 5/2 de la misma.

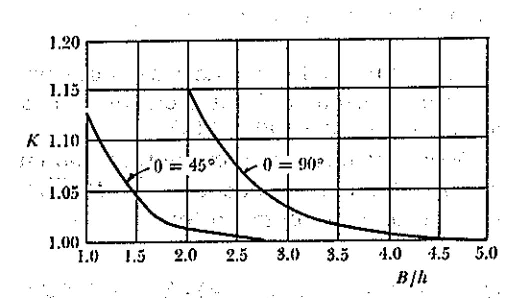


Figura 7.10. Valores de K en la fórmula de la Universidad Católica de Chile para vertedores triangulares (Ref. 24).

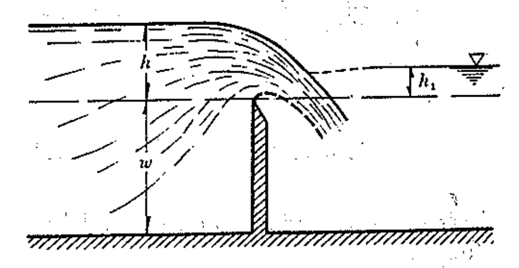


Figura 7.11. Descarga ahogada de un vertedor triangular.

7.2.4 Vertedor trapecial

El gasto de un vertedor trapecial, como el mostrado en la Fig. 7.12, se puede calcular suponiendo la suma del gasto correspondiente a uno rectangular con longitud de cresta b y el triangular formado con las dos orillas. Esto es, de las Ecs. (7.5) y (7.11a) se tiene:

$$Q = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,\mu_r\,b\,h^{3/2} + \frac{8}{15}\sqrt{2g}\tan(\theta/2)\,\mu_t\,h^{5/2}$$

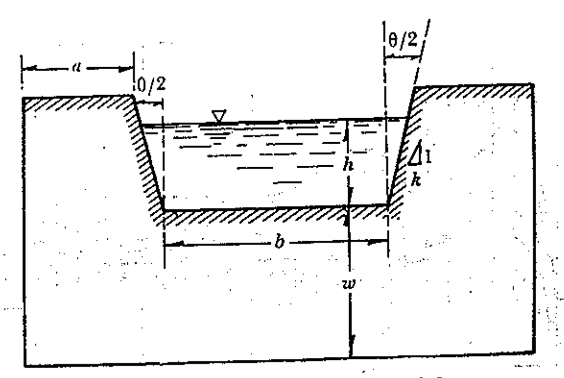


Figura 7.12. Vertedor trapecial.

o bien en la forma:

$$Q=\frac{2}{3}\sqrt{2g}\left[\mu_r+\frac{4}{5}\frac{h}{b}\mu_t\tan(\theta/2)\right]b\,h^{3/2}$$

y

$$Q=\frac{2}{3}\sqrt{2g}\,\mu\,b\,h^{3/2} \tag{7.13}$$

donde μ agrupa todos los términos del paréntesis.

Debido a que el vertedor trapecial tiene escaso interés, ha sido poco estudiado. Únicamente se le ha dado importancia al llamado de Cipolletti que tiene el trazo de un trapecio regular con taludes en los lados $k = 0.25$ (0.25 horizontal y uno vertical) y que encuentra aplicación como aforador en canales. La geometría de este vertedor ha sido obtenida de manera que las ampliaciones laterales compensen el gasto disminuido por las contracciones laterales de un vertedor rectangular, de longitud de cresta b en igualdad de condiciones de carga. Sin embargo, este hecho no ha sido plenamente comprobado. Se ha encontrado experimentalmente que el coeficiente u de un vertedor Cipolletti vale 0.63 y el gasto se determina con la ecuación:

$$Q=\frac{2}{3}\sqrt{2g}\times 0.63\,b\,h^{3/2}=$$

$$=1.861\,b\,h^{3/2} \tag{7.14}$$

la cual es válida si $0.08\text{ m}\leqslant h\leqslant 0.60\text{ m}$; $a\geqslant 2h$; $b\geqslant 3h$; $w\geqslant 3h$ y, además, para anchos de canal de 30 a 60 h. Cuando no se satisfacen estas condiciones se puede substituir $H=h+V_0^2/2g$ por h en la Ec. (7.14), para tomar en cuenta el efecto de la velocidad de llegada.

7.2.5 Vertedor circular

Stauss (1931) derivó una ecuación teórica para determinar el gasto en vertedores de forma circular (Fig. 7.13).

De la ecuación de la circunferencia, en la Fig. 7.13, se tiene que $x=\sqrt{y(D-y)}$, y de la Ec. (7.4) el gasto total es:

$$Q=2\sqrt{2g}\,\mu\int_0^h[y(D-y)(h-y)]^{1/2}dy$$

o bien

$$Q=2\sqrt{2g}\,\mu\,D^{5/2}\times\int_0^h[(y/D)(1-y/D)(h/D-y/D)]^{1/2}d(y/D)$$

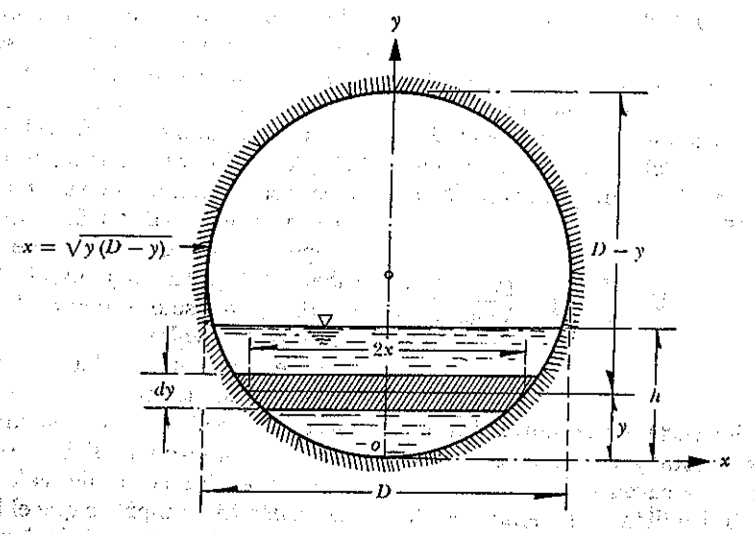


Figura 7.13. Vertedor circular.

Con $t=h/D$ y cambiando la variable de integración $z=y/D$, resulta:

$$Q=2\sqrt{2g}\,\mu D^{5/2}\int_0^t\sqrt{z(1-z)(t-z)}\,dz$$

La integración de la ecuación anterior conduce a

$$Q=\frac{4}{15}\sqrt{2g}\times$$

$$\times[2(1-t+t^2)E-(2-3t+t^2)K]\mu D^{5/2}$$

donde E y K son dos integrales elípticas. La ecuación anterior resulta, finalmente:

$$Q=\phi\,\mu D^{5/2} \tag{7.15}$$

donde D se expresa en decímetros y Q se obtiene en lt/seg. En esta fórmula ϕ es la función de h/D dada por la tabla 7.3 y μ el coeficiente de gasto determinado de la fórmula de Stauss y Jorissen (Ref. 30), a saber:

$$\mu=0.555+\frac{D}{110\,h}+0.041\frac{h}{D}$$

la cual vale para $0.20\text{ m}\leqslant D\leqslant 0.30\text{ m}$ $0.075<h/D<1$, y para distancias mínimas a la frontera del canal de llegada de $3D$ desde los cantos del vertedor.

TABLA 7.3. Coeficiente ϕ de la Ec. (7.15)

h/D	ϕ	h/D	ϕ
0.05	0.0272	0.55	2.8205
0.10	0.1072	0.60	3.2939
0.15	0.2380	0.65	3.7900
0.20	0.4173	0.70	4.3047
0.25	0.6428	0.75	4.8336
0.30	0.9119	0.80	5.3718
0.35	1.2223	0.85	5.9133
0.40	1.5713	0.90	6.4511
0.45	1.9559	0.95	6.9756
0.50	2.3734	1.00	7.4705

Ramponi propone una fórmula aproximada para calcular φ en la Ec. (7.15), como sigue:

$$\varphi = 10.12\,(h/D)^{1.975} - 2.66\,(h/D)^{6.78}$$

En caso de que el vertedor tenga diámetros hasta de 1.00 m y que no cumpla con las especificaciones de distancia del mismo a la pared del canal, se recomienda la fórmula de Ramponi para calcular μ en la Ec. (7.15):

$$\mu = \left(0.350 + 0.002\frac{D}{h}\right)\left[1 + \left(\frac{A}{A_0}\right)^2\right]$$

donde

- A área del vertedor comprendida entre la cresta y el nivel correspondiente a la carga h;
- A_0 área hidráulica del canal de llegada;
- h carga sobre la cresta, expresada en m.

Cuando la cresta del vertedor tiene forma circular en planta (Fig. 7.14), según Gourley (Ref. 9) el gasto (en sistema métrico) vale

$$Q = C\,l\,h^{1.42}$$

donde h es la carga sobre la cresta, l la longitud de desarrollo de la misma ($l = 2\pi D$) y C un coeficiente que depende del diámetro del vertedor (tabla 7.4).

TABLA 7.4. Coeficiente C en la fórmula de Gourley.

D	0.172	0.252	0.343	0.485	0.648
C	1.471	1.477	1.492	1.502	1.522

Estos resultados son válidos cuando $h < D/5$, de lo contrario se ahoga el vertedor.

Los vertedores de planta circular que descargan del interior hacia afuera, son útiles como aforadores en pozos artesianos para extraer agua del subsuelo (figura 7.15). En la Universidad de Cornell se hicieron pruebas con este tipo de vertedores para diámetros de tubos de 0.3 a 0.5 m y se encontró que su funcionamiento es efectivamente el de un vertedor cuando la relación $h/D < 0.027$; asimismo, se comporta como un chorro que sale de una tubería (flujo fuente) cuando $h/D = 1.05$, y existe un escurrimiento de transición entre ambos valores.

En el laboratorio del Instituto de Ingeniería de la UNAM, C. Cruickshank (Ref. 32) realizó investigaciones con objeto de comprobar dichos resultados y ampliar el intervalo de valores de h/D hasta 0.0015. Comprobó que el flujo de vertedor se presenta para relaciones $h/D<0.2$ y el de chorro para relaciones $h/D>2$, con el de transición entre los dos valores.

Para el flujo tipo vertedor se recomienda utilizar la Ec. (7.5), donde b es la longitud de cresta igual a la circunferencia interior del tubo; esto es, $b = \pi D$ y μ un coeficiente experimental que depende del tipo de vertido que se presente. En efecto, en un vertedor de este tipo es difícil obtener flujo de lámina libre si no se toman precauciones para ventilarla y, en ocasiones —para cargas pequeñas— resulta muy difícil lograr que la lámina de agua se despegue de la pared del cilindro. Se presentan así los tres tipos de lámina: adherente, deprimida y libre, encontradas por Bazin en vertedores rectangulares (Ref. 24); cada tipo de lámina depende del diámetro de la tubería. Cuando la lámina es libre el coeficiente μ vale 0.63 y 0.705 cuando es deprimida. Si resulta imposible evitar que la lámina se adhiera, el vertido se produce normalmente en condiciones cercanas a un vertedor de cresta ancha, siendo para esa condición $\mu = 0.60$.

En la Fig. 7.16 se presenta un resumen de lo encontrado por diferentes investiga-

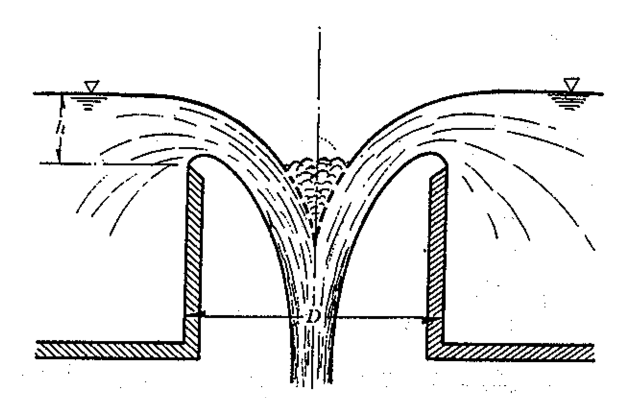


Figura 7.14. Vertedor de planta circular.

dores (Refs. 24, 32 y 33) para las tres condiciones de flujo mencionadas, en las que la selección de μ depende de los parámetros h/D y $Q^2/gh\,D^4$. Con la relación h/D y la curva de trazo continuo de la Fig. 7.16, se calcula el gasto en términos de $Q^2/gh\,D^4$, para las tres condiciones de flujo.

Siempre que exista la condición de vertido, conviene ventilar la lámina del agua después de que ha pasado el brocal del pozo, para evitar la condición de lámina deprimida cuyo coeficiente μ no está bien definido.

Para el funcionamiento de chorro la variación coincide con la ley teórica de proporcionalidad de su altura con el cuadrado de la velocidad. La curva con trazo continuo, de la Fig. 7.16, indica que para $h/D > 2$ el parámetro $Q^2/gh\,D^4$ se vuelve constante e igual a uno.

7.2.6 Vertedor parabólico

La geometría de un vertedor de forma parabólica, como el mostrado en la figura 7.17, sigue la ecuación $x = \sqrt{y/a}$.

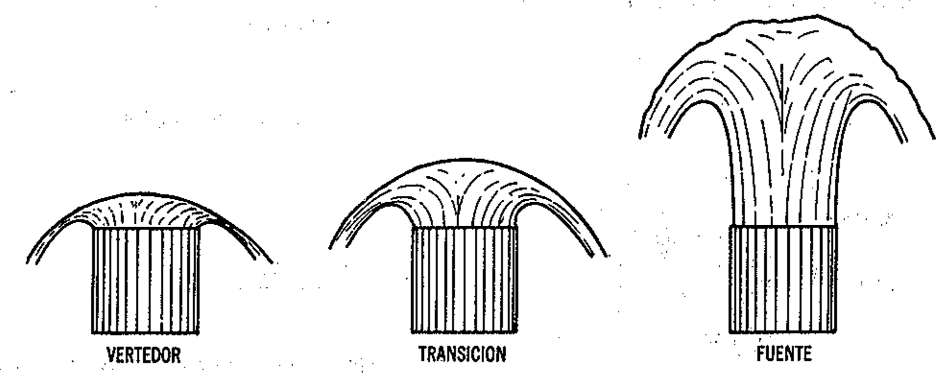


Figura 7.15. Tipos de funcionamiento del flujo fuente en pozos.

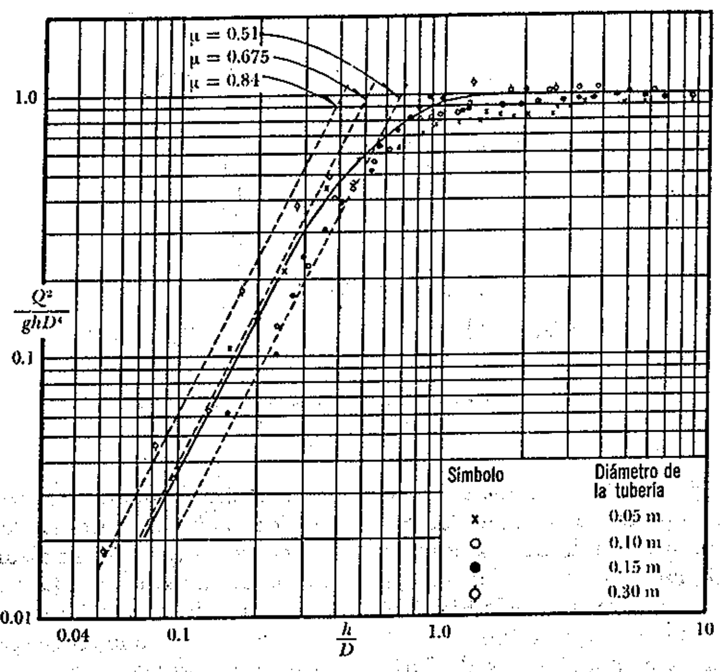


Figura 7.16. Flujo fuente en pozos; resumen de resultados experimentales.

De la Ec. (7.4) el gasto es:

$$Q = \frac{2}{a^{1/2}} \sqrt{2g}\, \mu \int_0^h (hy - y^2)^{1/2}\, dy$$

Resolviendo la integral resulta

$$Q = \frac{2}{a^{1/2}} \sqrt{2g}\, \mu \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2} (y - h/2)(hy - y^2)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + h^2/8 \text{ ang sen} \frac{y - h/2}{h/2} \right]_0^h$$

$$Q = \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2g}\, \mu}{a^{1/2}} h^2 = C h^2 \qquad (7.16)$$

donde:

$$C = \frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2g}\, \mu}{a^{1/2}} \qquad (7.17)$$

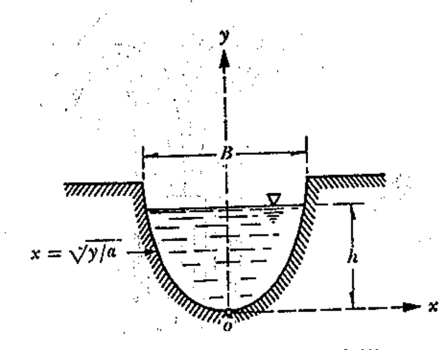


Figura 7.17. Vertedor parabólico.

Las experiencias presentadas por Mostkow (Ref. 7) indican que el coeficiente C se puede evaluar de la fórmula experimental siguiente:

$$C = \frac{2.088}{a^{0.488}} \qquad (7.18)$$

que es prácticamente el valor teórico de la Ec. (7.17); comparando las Ecs. (7.17) y (7.18), el coeficiente μ es

$$\mu = \frac{a^{1/2}}{0.7854\sqrt{2g}} C = \frac{2.658}{\sqrt{2g}} a^{0.012} \qquad (7.19)$$

TABLA 7.5. Coeficientes C y μ de la Ec. (7.19) para vertedores parabólicos según Mostkow (Ref. 7).

a	C	μ
0.625	2.6	0.592
0.5	2.9	0.591
0.333	3.6	0.598
0.25	4.1	0.595
0.20	4.6	0.592
0.167	5.0	0.589
0.143	5.4	0.588
0.125	5.7	0.587
0.111	6.1	0.585
0.10	6.4	0.582

En la tabla 7.5 se encuentran tabulados los coeficientes C y μ indicados por Mostkow, en términos de a, para vertedores parabólicos.

Americe experimentó con un vertedor parabólico de ecuación $y = 9.85\, x^2$, obteniendo para el gasto (en sistema métrico) la siguiente ecuación (Ref. 30):

$$Q = 0.606\, h^{1.98}$$

que se aproxima a la Ec. (7.16), si bien C es ahora dependiente también de h.

Si se calcula C de la ecuación general (7.18), para $a = 9.85$, resulta el valor 0.682 con una discrepancia de 11 % respecto del obtenido por Americe.

7.2.7. Vertedores proporcionales

Esta clase de vertedor, llamado también *Sutro*, es aquél cuya forma hace que el gasto de vertido sea proporcional a la carga h. Por esta característica de ley de descarga, su interés estriba en considerarlo en un laboratorio como vertedor de aforo o en canales pequeños, cuando se desea este tipo de ley para facilitar las medi-

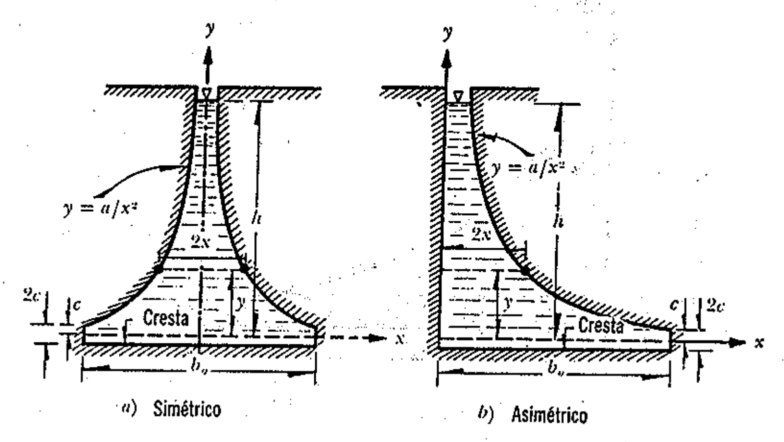


Figura 7.18. Tipos de vertedor Sutro.

ciones. Ha sido estudiado por diferentes investigadores, entre otros Mavis, Soucek, Howe y di Ricco.

La geometría del vertedor proporcional puede ser de cualquiera de las formas presentadas en la Fig. 7.18. Para seguir usando la Ec. (7.4), la correspondiente al vertedor simétrico es:

$$x = (a/y)^{1/2}$$

y el gasto es entonces:

$$Q = 2\sqrt{2g}\ a^{1/2}\ \mu \int_0^h \left(\frac{h-y}{y}\right)^{1/2} dy =$$

$$= 2\sqrt{2g}\ a^{1/2}\ \mu \int_0^h (h/y - 1)^{1/2}\, dy$$

Cambiando de variable, con $y/h = \text{sen}^2\,\theta$, $dy = 2\,h\ \text{sen}\,\theta\,\cos\,\theta\ d\theta$; ahora entre los límites θ y $\pi/2$, la integral sería:

$$\int_0^h (h/y-1)^{1/2}\, dy =$$

$$= 2\,h \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\text{sen}^2\,\theta} - 1\right)^{1/2} \text{sen}\,\theta\,\cos\,\theta\ d\theta =$$

$$= 2h \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\ d\theta$$

$$= 2h \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}\,2\,\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi\,h}{2}$$

La ecuación para el gasto resulta entonces

$$Q = \pi\sqrt{2g}\ \mu\ a^{1/2}\, h \qquad (7.20)$$

esto es, efectivamente el gasto es proporcional a la carga.

La forma que adquiere el perfil del vertedor se muestra en la Fig. 7.19, donde se observa que la curva se vuelve asintótica con el eje x lo cual haría impráctica su construcción. Para eliminar este problema, se limita el perfil del vertedor en la parte inferior, hasta un ancho finito b_0, para $y = c$ (Fig. 7.19); además, que el área de la superficie del vertedor, reducida por este concepto, se compense bajando la cresta por debajo del eje x en una cantidad d, de tal manera que el

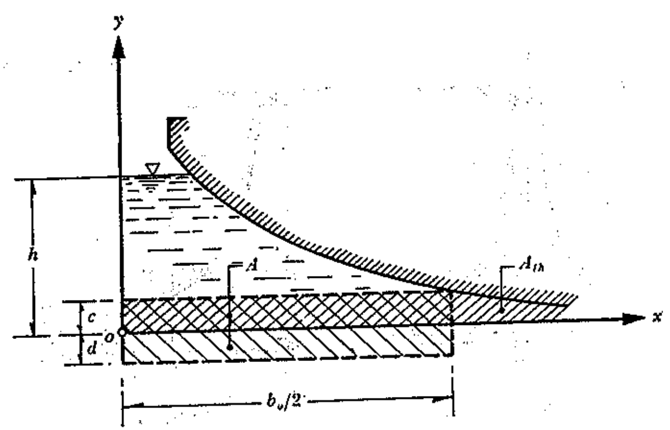


Figura 7.19. Forma de la frontera inferior del vertedor Sutro, simétrico.

área $b_0(c+d)/2$ sea igual al área teórica bajo el perfil entre $x = 0$ y $x = c$.

El área teórica bajo el perfil sería

$$A_{th} = \int_0^c 2x\, dy = a^{1/2} \int_0^c \frac{dy}{y^{1/2}} =$$

$$= 2\,a^{1/2}\,[y^{1/2}]_0^c = 2\,a^{1/2}\,c^{1/2}$$

Por otra parte, de la ecuación del perfil: para $x = b_0/2$, $y = c$, $a^{1/2} = \dfrac{b_0\,c^{1/2}}{2}$

entonces el área teórica será

$$A_{th} = b_0\,c$$

de tal manera que al igualar las áreas resulta:

$$\frac{b_0}{2}(c + d) = b_0\,c$$

$$d = c = \frac{4a}{b_0^2}$$

Esto es, el nivel de la cresta del vertedor debe bajar en una cantidad igual a c, la cual depende del ancho b_0 inicial que se desee considerar como límite inferior del vertedor. Sin embargo, experimentalmente se ha encontrado que debe agregarse todavía a d aproximadamente 3 mm más para satisfacer la ley lineal de gastos para cargas pequeñas. En rigor, la Ec. (7.20) es válida para $h \geqslant c$.

De acuerdo con las mediciones efectuadas en 1915 por diferentes investigadores (Ref. 9), el coeficiente μ varía poco con la carga h (tabla 7.6).

Pudiendo considerarse el valor medio $\mu = 0.62$ cuando el canal de llegada tiene dimensiones grandes; y $\mu = 0.67$ cuando la plantilla del canal de llegada coincide con la cresta del vertedor y su ancho

TABLA 7.6. Valores de μ en la Ec. (7.20) para vertedores proporcionales.

h, en m	μ
0.061	0.656
0.122	0.628
0.183	0.617
0.244	0.610
0.305	0.606
0.458	0.607
0.61	0.608
0.76	0.610
0.915	0.611

con b_0 (Ref. 34) para el vertedor simétrico de la Fig. 7.18a. Estos resultados son válidos para $h \geqslant c$.

Se han realizado estudios con vertedores logarítmicos cuya descarga sigue la ley $Q = \ln(2h/b_0)$ y también del tipo $Q = B\sqrt{h}$. Los resultados se pueden consultar en las Refs. 35 y 36.

7.2.8 Comparación de características de vertedores de pared delgada más usuales

La mayoría de las formas geométricas de los vertedores de pared delgada, hasta aquí estudiados, se adaptan al perfil dado por la ecuación

$$y = a\,x^r \qquad (7.21a)$$

o sea, la Ec. (7.2) es:

$$x = (y/a)^{1/r} \qquad (7.21b)$$

Si el exponente es $r = 1$ se tiene el vertedor triangular, correspondiendo $r = \infty$ al rectangular; $r = 2$ al parabólico; $r = -2$ al proporcional y así sucesivamente. En la Fig. 7.20 se presentan gráficamente las diferentes formas adoptadas, donde por facilidad se ha considerado $a = 1$.

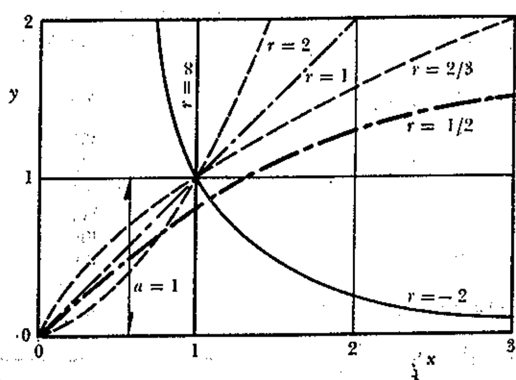


Figura 7.20. La ecuación $y = a\,x^r$ del perfil de un vertedor, para $a = 1$.

El área de la superficie ocupada por la lámina vertiente, de altura igual a la carga h (Fig. 7.1), se puede calcular con la Ec. (7.21b) en la siguiente forma:

$$A = \int_0^h 2\,x\,dy = \frac{2}{a^{1/r}}\int_0^h y^{1/r}\,dy =$$

$$= \frac{2}{a^{1/r}}\left[\frac{y^{(1/r+1)}}{1/r+1}\right]_0^h$$

al tomar los límites de integración resulta:

$$A = \frac{2}{a^{1/r}\,(1/r+1)}\,h^{(1/r+1)} = k\,h^f \qquad (7.22)$$

donde f recibe el nombre de exponente de forma y vale:

$$f = \frac{1}{r} + 1 \qquad (7.23)$$

Además,

$$k = \frac{2}{a^{1/r}\,(1/r+1)} = \frac{2}{f\,a^{1/r}} \qquad (7.24)$$

Esto significa que si el perfil de un vertedor tiene por ecuación a (7.21) el área de la superficie A depende de la carga h; y si la dependencia entre ambos se presenta gráficamente sobre un plano coordenado con escalas logarítmicas, el exponente f es igual a la pendiente de la recta que representa a la Ec. (7.22).

En la Ec. (7.21) para $y = h$, $x = B/2$ (Fig. 7.1b), por lo cual:

$$a^{1/r} = \frac{2h^{1/r}}{B} \qquad (7.25)$$

siendo entonces

$$k = \frac{B}{f}\,\frac{1}{h^{1/r}}$$

Con la Ec. (7.23), A de la (7.22), resulta

$$A = \frac{B\,h^f}{f\,h^{1/r}} = \frac{B\,h^{(1/r+1)}}{f\,h^{1/r}} = \frac{B\,h}{f} \qquad (7.26a)$$

o bien

$$f = \frac{B\,h}{A} = \frac{A'}{A} \qquad (7.26b)$$

donde $A' = B\,h$ representa el área de un rectángulo de base B y altura h; de este modo, el exponente de forma de un vertedor cualquiera representa la relación entre el área del rectángulo $A' = B\,h$ y el área de la sección. Esto es, si se conoce la carga h de vertido y el ancho B de la superficie de un vertedor cuya forma sigue la Ec. (7.21), se puede calcular el área de la sección a través del exponente de forma f, con la Ec. (7.26a) sin necesidad de efectuar la integración sobre la superficie. El cálculo en sentido contrario es también posible; esto es, cuando el perfil sigue la Ec. (7.21) se puede calcular el exponente de forma f a partir del ancho de la superficie libre y del área de la sección vertedora.

Por lo que respecta a la ecuación general del gasto, al substituir la Ec. (7.21b) en la (7.4) se pueden hacer las siguientes transformaciones:

$$Q = \frac{2\sqrt{2g}\,\mu}{a^{1/r}}\int_0^h y^{1/r}\,(h-y)^{1/2}\,dy =$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{2g}\,\mu}{a^{1/r}}\,h^{(3/2+1/r)}\right]\times$$

$$\times\left[\int_0^1 (y/h)^{1/r}\,(1-y/h)^{1/2}\,d\,(y/h)\right]$$

Si se substituye $y/h = z$, la ecuación anterior se puede escribir así:

$$Q = \frac{2\sqrt{2g}\,\mu}{a^{1/r}}\,F\,h^{(3/2+1/r)} \qquad (7.27)$$

donde

$$F = \int_0^1 z^{1/r}\,(1-z)^{1/2}\,dz \qquad (7.28)$$

en la cual se han transformado los límites de integración al cambiar de variable: de $0/h = 0$ a $h/h = 1$.

Haciendo

$$m = \mu\sqrt{2g}\;F\,f \qquad (7.29)$$

y tomando en consideración las ecuaciones (7.22) y (7.24), la Ec. (7.27) se puede también expresar en las siguientes formas:

$$Q = \frac{2\,m}{a^{1/r}\,f}\,h^{(3/2+1/r)} =$$

$$= m\,k\,h^{(3/2+1/r)} = m\,A\,h^{1/2} \qquad (7.30)$$

o bien, con

$$n = \frac{3}{2} + \frac{1}{r} = f + \frac{1}{2} \qquad (7.31)$$

también en la forma

$$Q = m\,k\,h^n \qquad (7.32)$$

ecuaciones con las cuales se podría resolver el problema inverso, es decir, que especificada una ley de variación de gastos de vertido (Ec. 7.32), se puede determinar teóricamente la forma del perfil geométrico de la sección vertedora que la satisfaga.

El valor del exponente de forma f posee un límite inferior. Puesto que un orificio practicado en la pared vertical de la placa tiene dimensiones constantes e independientes de la carga de vertido h, el exponente de forma f (Ec. 7.23) debe ser cero; $r = -1$ y, por lo mismo, de la Ec. (7.28) $F = 1$. Además, en la Ec. (7.30) A tiene que representar el área constante A' del orificio, siendo la ecuación de gasto:

$$Q = m'\,A'\sqrt{h}$$

en la cual m', A' son cantidades constan-

tes, mientras que m, A son variables en la Ec. (7.30) de acuerdo con la forma del perfil del vertedor. Si se comparan las ecuaciones de gasto: (7.5) para el rectangular, (7.11a) para el triangular, (7.16) para el parabólico y (7.20) para el proporcional [con geometría que sigue la Ec. (7.21)], se pueden obtener los resultados que se anotan en la tabla 7.7 con un resumen de los valores característicos de las diferentes secciones geométricas para fines comparativos. En la Fig. 7.21 se presenta la variación del coeficiente m y del exponente n, en la Ec. (7.32), en función del exponente de forma f y para los valores más comunes del coeficiente $\mu = 0.58$, 0.60 y 0.62. Se observa claramente la eficiencia de las diferentes formas de sección del vertedor, las cuales son útiles para conocer el valor del coeficiente n aun en aquellos vertedores cuya geometría no sigue la Ec. (7.21), bastando para ello saber cuál es el exponente de forma f a partir de la Ec. (7.26b).

TABLA 7.7. Valores característicos de los vertedores de forma usual (ref. 23)

Sección	Exp. de forma f	r	n	F	$\frac{m}{\mu} = \sqrt{2g}\,F, f$	$m = \mu \sqrt{2g}\,F$		
						$\mu = 0{,}58$	$\mu = 0{,}60$	$\mu = 0{,}62$
Orificio	0	—1	0.5	1	4.4343	2.569	2.658	2.746
Proporcional	0.5	—2.0	1.0	$\pi/2$	3.7489	2.0178	2.0873	2.1569
Rectángulo	1.0	∞	1.5	2/3	2.9530	1.7127	1.7718	1.8309
Parábola	1.5	2.0	2.0	0.3927	2.6092	1.5133	1.5655	1.6177
Triángulo	2.0	1.0	2.5	0.2667	2.3627	1.3704	1.4176	1.4649
Parábola semicúbica	2.5	2/3	3.0	0.1963	2.1738	1.2608	1.3043	1.3478

7.2.9 Vertedores con descarga sumergida

Cuando es sumergida la descarga de los vertedores de pared delgada, de cualquiera de las formas hasta ahora discutidas, la ecuación de Villemonte (Ref. 20):

$$Q = Q_1 (1 - S^n)^{0.385} \tag{7.33}$$

proporciona un método simple para evaluar el efecto de sumersión. En dicha ecuación, Q es el gasto del vertedor con descarga sumergida; Q_1 el gasto del mismo vertedor con igual carga en el supuesto de descarga libre, S es la relación de sumersión (relación de cargas aguas abajo y arriba sobre la cresta); y n el exponente de la carga h sobre la cresta en la ecuación correspondiente a Q_1 (3/2 para vertedor rectangular, 5/2 para triangular, etcétera). La carga de sumersión deberá medirse desde la superficie, aguas abajo (fuera de la zona de disturbios) hasta la cresta.

7.2.10 Vertedores con cresta oblicua a la corriente

En los casos en los cuales se desea in-

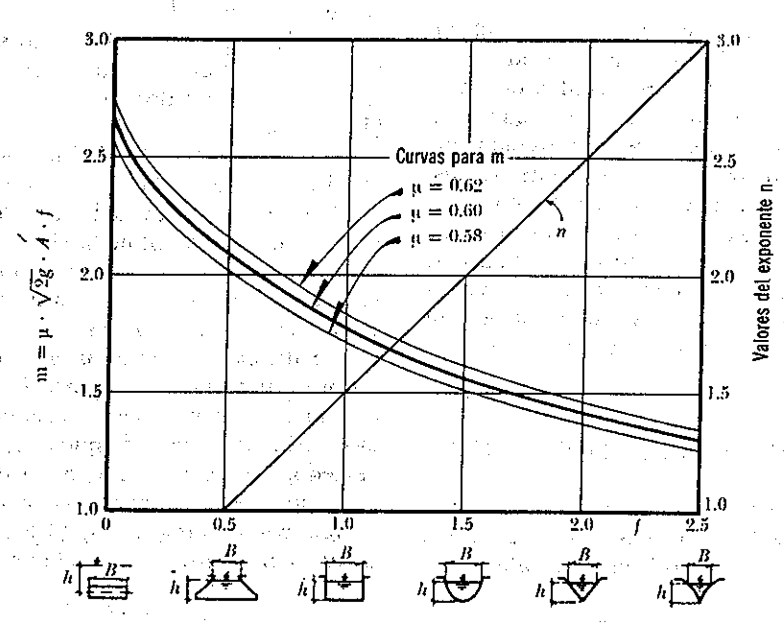


Figura 7.21. Valores de m y n en la Ec. (7.32) para las formas más comunes del vertedor de pared delgada (Ref. 23).

crementar la longitud de cresta de un vertedor, para reducir la carga del mismo y aumentar su eficiencia, se puede utilizar un vertedor oblicuo respecto al eje del canal. En la Fig. 7.22 se presenta este tipo de vertedor para la forma rectangular con un ángulo de inclinación θ respecto a la corriente. Así, la longitud de cresta es:

$$b_0 = \frac{b}{\text{sen}\ \theta}$$

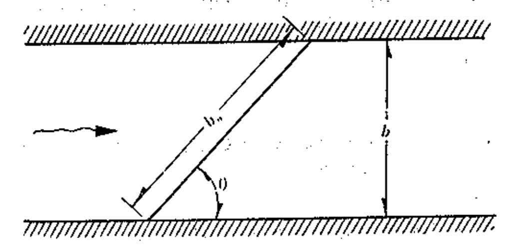


Figura 7.22. Vertedor oblicuo.

Diferentes autores han experimentado con estos vertedores, y han llegado a resultados diferentes. En cualquier caso, se ha observado que la aparente ganancia en longitud de cresta se ve reducida por una disminución en el coeficiente de gasto, por efecto de la inclinación con respecto a la cresta del flujo de llegada, de tal manera que los resultados obtenidos con la ecuación general (7.5) para vertedores rectangulares se ve afectada por un coeficiente de reducción $k < 1$ en la forma:

$$Q = k\,\tfrac{2}{3}\sqrt{2g}\,\mu\, b_0\, h^{3/2} \qquad (7.34)$$

En esta ecuación se obtiene μ con una ecuación de las indicadas en la tabla 7.1. Según Aichel, el coeficiente k vale

$$k = 1 - a\frac{h}{w} \qquad (7.35)$$

donde a depende del ángulo θ y de la relación b/w, como se indica en la tabla 7.8 (Ref. 7), con la condición de que $h/w \leq$ ≤ 0.62.

TABLA 7.8. Valores del coeficiente a en la fórmula de Aichel para vertedores oblicuos.

θ	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$b/w = 1$	0.82	0.47	0.28	0.13	0.04	0
$b/w = 2$	0.69	0.36	0.20	0.11	0.04	0

7.3. Vertedores de pared gruesa

En forma semejante a los orificios, si la cresta del vertedor no es una arista afilada, se presenta entonces el vertedor de pared gruesa que puede adquirir varias formas. En las figuras 7.23 se presenta la forma más sencilla, la cual consiste en aumentar el espesor de la cresta en un vertedor rectangular sin contracciones laterales.

Cuando $e/h < 0.67$, el chorro se separa de la cresta y el funcionamiento es idéntico al del vertedor de pared delgada (Fig. 7.23a).

Cuando $e/h > 0.67$ el funcionamiento es diferente, pues la lámina vertiente se adhiere a la cresta del vertedor (figura 7.23b). Se presentan también distintos funcionamientos, dependiendo de la altura w de la cresta sobre el fondo del canal. Cabe aclarar que los valores del coeficiente de gasto obtenidos por diferentes autores difieren entre sí, de ahí que el procedimiento comúnmente aceptado para evaluarlo, en el caso de que $e/h > 0.67$ y el vertedor sea rectangular, es el de Bazin; éste consiste en utilizar la ecuación de los vertedores rectangulares, (7.6), afectada de un coeficiente de reducción ε_1, a saber:

$$Q = \varepsilon_1\, C\, b\, h^{3/2} \qquad (7.36)$$

donde C es el coeficiente adecuado de un

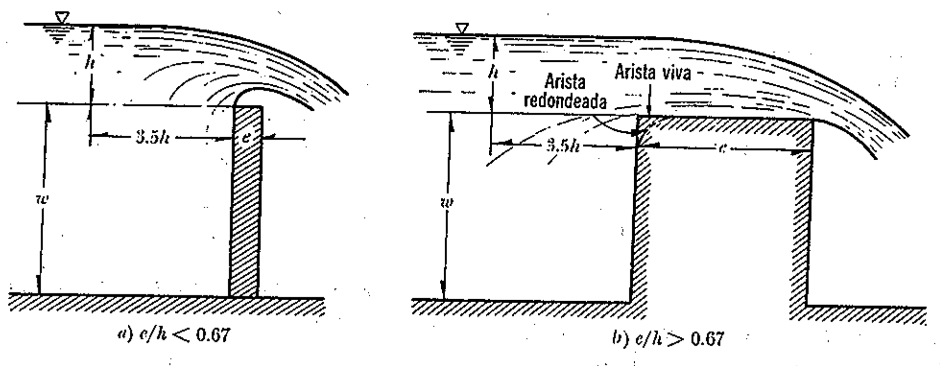


Figura 7.23. Vertedor rectangular de pared gruesa.

vertedor de pared delgada sin contracciones laterales, en iguales condiciones de descarga libre, que se evalúa con las ecuaciones de la tabla 7.1 y que toma en cuenta la altura w de la cresta sobre el fondo del canal de acceso. El coeficiente ε_1 depende de la relación e/h según la ecuación

$$\varepsilon_1 = 0.7 + \frac{0.185}{e/h} \qquad (7.37)$$

válida para relaciones con un valor hasta de $e/h = 3$.

Sin embargo, existen diferentes formas de funcionamiento de acuerdo con las relaciones e/h y w/h, las que se resumen en la Fig. 7.24 (Ref. 24), preparada con los resultados de Bazin; los valores de ε_1 se obtienen de la misma figura.

En problemas que se presentan dentro de la práctica es frecuente encontrar que este tipo de vertedores trabajen ahogados; es decir casos en que se presenta mayor reducción en el coeficiente de gasto por la influencia de la carga aguas abajo, de tal modo que la Ec. (7.36) se ve afectada de un segundo coeficiente ε_2, que toma en cuenta dicho efecto. Los valores ε_2 se obtienen de la Fig. 7.25 (Ref. 24) en razón de la relación $(h - h')/h$, donde h' es la diferencia entre la cresta y la altura de la superficie, aguas abajo, del vertedor; h' es negativo cuando el nivel está por debajo de la cresta y positivo en caso contrario. La figura mencionada se ha elaborado con los resultados de Bazin y en ella se manifiesta la poca influencia del nivel, aguas abajo, hasta valores de $h' \leq 0.5\,h$.

Cuando $e/h > 3$ se establecen, sobre la plataforma del vertedor, condiciones de flujo con líneas de corriente paralelas a ella y de distribución de presiones hidrostática; además, se deja sentir la influencia de las pérdidas de energía por fricción y de entrada. En este caso, los resultados experimentales concuerdan (Ref. 24) con la fórmula de Gibson, para ε_1:

$$\varepsilon_1 = 0.75 + \frac{0.1}{e/h} \qquad (7.38)$$

que es válida hasta valores $e/h = 10$ y para vertedores con descarga libre.

Hay fórmulas generales que permiten tomar en consideración las pérdidas por fricción en el caso de que e sea grande, así como la posibilidad de redondear el

umbral de entrada (Fig. 7.23*b*). Considerando válida la Ec. (7.6), el coeficiente C es ahora:

$$C = \frac{\left[1 + 0.26\left(\frac{h}{h+w}\right)^2\right]\sqrt{g}}{\left(\frac{3}{2} + \frac{\lambda_e}{2} + 0.004\,n\right)^{3/2}} \qquad (7.39)$$

en el caso de arista viva y con $\lambda_e = 0$, en esta misma ecuación, para el caso de entrada redondeada. Esto último significa que el redondeo del umbral compensa la pérdida por fricción.

En la Ec. (7.39) λ_e es un factor de fricción que depende de w/h, según la tabla 7.9. n representa la relación:

$$n = \frac{e}{y_c} \qquad (7.40)$$

donde y_c es el llamado tirante crítico, que

TABLA 7.9. Valores de λ_e en la Ec. (7.39).

$\frac{w}{y_c}$	≥ 3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5	0.25
$\frac{w}{h}$	≥ 2.04	1.78	1.48	1.19	0.91	0.67	0.314	0.162
λ_e	0.33	0.328	0.315	0.282	0.240	0.188	0.110	0.056

se presenta sobre la cresta y se calcula de la ecuación

$$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g\,b^2}} \qquad (7.41)$$

Observe que para calcular y_c se requiere conocer previamente el gasto vertido y ello da lugar a un procedimiento de iteración, el cual se puede simplificar notablemente si se utilizan las siguientes relaciones. Haciendo $h = \varphi\, y_c$, entonces:

$$n = \varphi\frac{e}{h} \qquad (7.42)$$

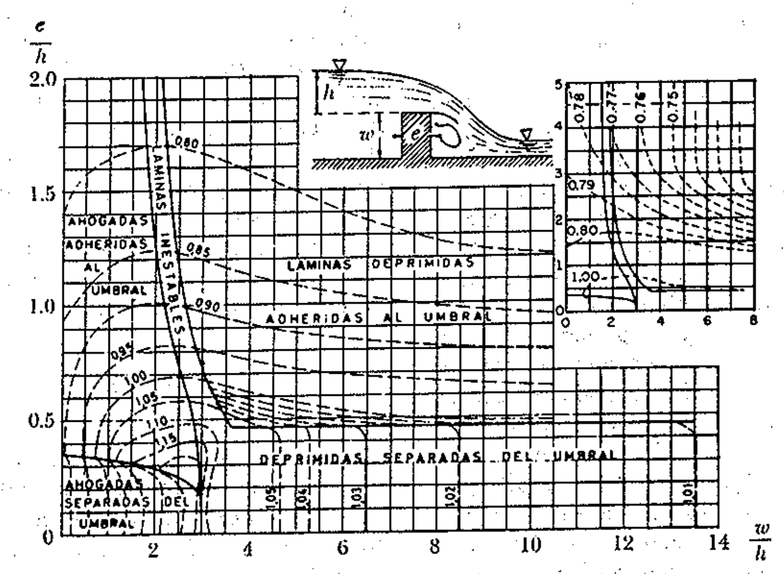


Figura 7.24. Coeficientes ε_1 de la Ec. (7.36) para vertedores de pared gruesa con descarga libre, según F. Domínguez (Ref. 24).

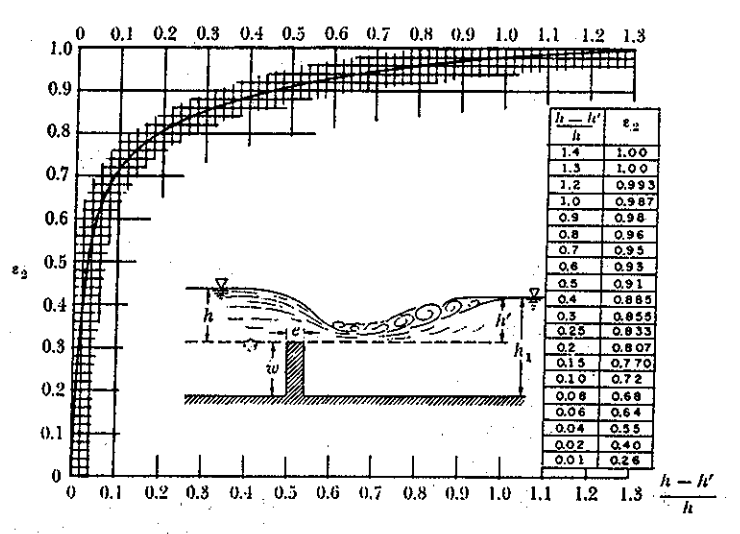


Figura 7.25. Coeficientes ε_2 para vertedores de pared gruesa con descarga ahogada, según F. Domínguez (Ref. 24).

Los valores aproximados de φ se presentan en la tabla 7.10 para entradas de arista viva. Si la entrada es redondeada, φ tiene el valor aproximado de 1.5.

TABLA 7.10. Valores de φ aplicables a la Ec. (7.42) para entradas de arista viva.

$\frac{h}{h+w}$	0.33	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
φ	1.71	1.68	1.65	1.62	1.60	1.56	1.53	1.52

Problema 7.7. Un vertedor rectangular de pared gruesa cuyo espesor $e = 0.45$ m y longitud $b = 2.5$ m, trabaja con una carga $h = 0.30$ m y una profundidad $w = 0.60$ m. Determinar el gasto vertido.

Solución. Las relaciones e/h y w/h valen:

$$\frac{e}{h} = \frac{0.45}{0.30} = 1.5 > 0.67$$

$$\frac{w}{h} = \frac{0.60}{0.30} = 2$$

Por tanto, de la Fig. 7.24, $\varepsilon_1 = 0.82$ y de la ecuación de Rehbock (tabla 7.1), tomando en cuenta ε_1, resulta:

$$Q = 0.82 \times \frac{2}{3}\left(0.6035 + 0.0813\,\frac{0.301}{0.60}\right)\left(1 + \frac{0.0011}{0.30}\right)^{3/2}\sqrt{2 \times 9.8} \times 2.5\,(0.30)^{3/2}$$

donde

$$Q = 0.625\ \text{m}^3/\text{seg}$$

7.4. Vertedores con cresta redondeada

Cuando la cresta del vertedor se redondea, el coeficiente de gasto C aumenta considerablemente respecto del calculado para uno de pared gruesa. Esto se explica

por una baja en la contracción del chorro sobre el vertedor, pues actúa sobre las partículas una aceleración centrífuga debido a la curvatura de las líneas de corriente.

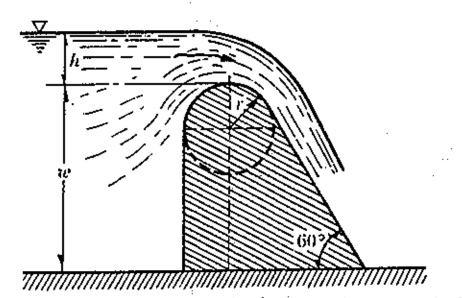


Figura 7.26. Vertedor de cresta circular y talud inclinado, aguas abajo.

En el caso del vertedor de la Fig. 7.26 el coeficiente μ, de la Ec. 7.5, según Rehbock (Ref. 30), es:

$$\mu = 0.312 + 0.09\, h/w + \sqrt{0.30 - 0.01\,(5 - h/r)^2}$$

que vale para

$$h/w \leqslant 1, w > r > 0.2\,\text{m},$$

$$h/r \leqslant \left(6 - \frac{20\,r}{w + 3r}\right)$$

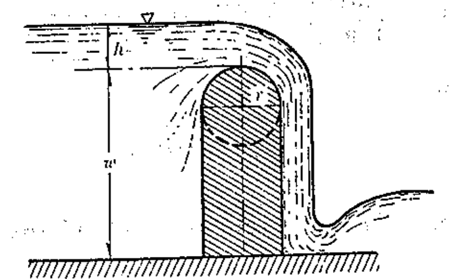


Figura 7.27. Vertedor de cresta circular y talud vertical, aguas abajo.

En el caso de vertedores como el de la Fig. 7.27, Kramer encontró experimentalmente que:

$$\mu = 1.02 - \frac{1.015}{h/r + 2.08} + [0.04\,(h/r + 0.19)^2 + 0.0223]\, r/w$$

el cual vale para

$$h/r \leqslant 4.2$$

y

$$h/r \leqslant 0.4 + 0.32\, w/r + 0.06\, \sqrt{r - 12.5}$$

Este tipo de vertedor es importante en el caso de compuertas cilíndricas con vertido superior.

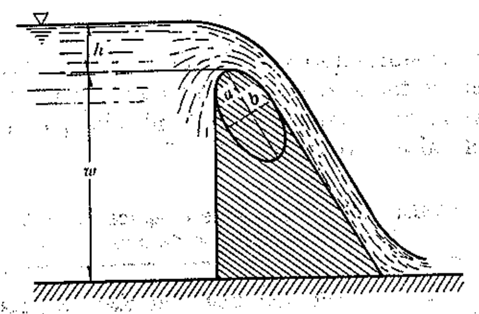


Figura 7.28. Vertedor de cresta elíptica y talud inclinado, aguas abajo.

Para vertedores como el de la Fig. 7.28, Kramer propone el empleo de la ecuación anterior, considerando que el radio r en ella se calcule con la expresión:

$$r = \left(\frac{4.57}{2\,a/b + 1} + \frac{a}{20\,b} - 0.573\right) b$$

donde a y b son las longitudes de los ejes de la elipse. Esta fórmula ha sido verificada para valores de $a = b/2$, $a = b$, $a = 2b$ y $a = 6b$.

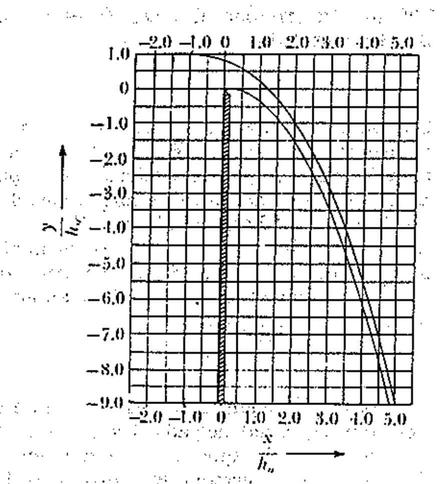
Otros resultados para vertedores de pared gruesa, con trazo trapezoidal y formas especiales, se pueden consultar en la Ref. 31.

Cabe mencionar que el vertedor de pared gruesa más importante es aquél cuyo perfil se diseña de modo que coincida con la forma de perfil inferior de la lámina vertiente, sobre un vertedor de pared delgada hipotético. Fue Creager el primero que ideó este tipo de vertedores a los cuales se les ha dado el nombre de "cimacios". Bazin y Scimemi, entre otros, han estudiado dicho perfil, pero quizá el U. S. Bureau of Reclamation es el que lo ha hecho en forma exhaustiva (Ref. 37). En la Fig. 7.29 se presentan sus resultados para el caso de un vertedor rectangular de pared delgada sin contracciones laterales, perfectamente ventilado por debajo del chorro. En dicha figura se presentan las coordenadas de los perfiles, superior e inferior, del chorro que vierte sobre un vertedor rectangular (que trabaja con una carga h), referidas a la carga h_0 medida hasta el punto más alto del perfil inferior. Esto es:

$$h_0 = 0.88889\, h$$

Si se llena de mampostería la porción existente entre el vertedor de pared delgada hipotético y el perfil inferior de la lámina vertiente, al funcionar el cimacio con una carga igual a aquella con la cual se diseñó, es de esperarse el mismo coeficiente de gasto que el de pared delgada; además, sobre la espalda de este vertedor se presentan presiones nulas cuando la carga de vertido coincide con la carga de diseño. Por ser el más utilizado en obras de excedencias y el que ha tenido más evolución, posteriormente se hará una explicación más detallada del mismo (referencia 37).

Por lo que corresponde a los vertedores de cresta redondeada, que trabajan ahogados, Keutner realizó experimentos con



Horizontales x/h_0	Verticales: Perfil superior y/h_0	Perfil inferior y/h_0
—2.4	0.989	
—2.0	0.984	
—1.6	0.975	
—1.2	0.961	
—0.8	0.938	
—0.4	0.898	
—0.2	0.870	
0.0	0.831	—0.125
0.05	0.819	—0.066
0.10	0.807	—0.033
0.15	0.793	—0.014
0.20	0.779	—0.004
0.30	0.747	0.000
0.40	0.710	—0.011
0.50	0.668	—0.034
0.75	0.539	—0.129
1.00	0.373	—0.283
2.00	—0.743	—1.393
3.00	—2.653	—3.303
4.00	—5.363	—6.013
5.00	—8.878	—9.523

Figura 7.29. Coordenadas de los perfiles, superior e inferior, de la lámina vertiente sobre un vertedor rectangular de pared delgada, sin contracciones laterales, según U. S. Bureau of Reclamation.

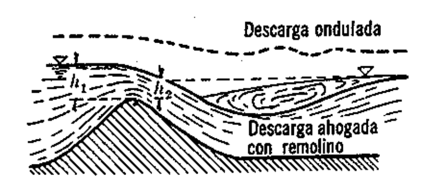


Figura 7.30. Descarga ahogada de un vertedor de cresta redondeada.

uno semejante al de la Fig. 7.30, obteniendo diferentes formas de funcionamiento de acuerdo con la magnitud de la carga, aguas arriba h_1 y la de aguas abajo, h_2. Los resultados para el coeficiente de vertido μ de la ecuación:

$$Q = \tfrac{2}{3}\,\mu\sqrt{2g}\,b\,h_1^{3/2} \qquad (7.43)$$

se muestran en la Fig. 7.31 en razón de la relación h_1/h_2. Keutner observó que la descarga ahogada corresponde a valores de $h_1/h_2 > 1.16$ y descargas de forma ondulada, como se indica en la misma figura para $h_1/h_2 < 1.16$ (Ref. 9).

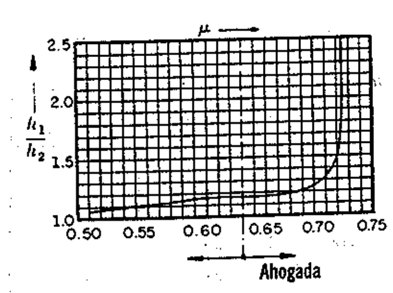


Figura 7.31. Coeficiente μ de la ecuación (7.43), para vertedores de cresta redondeada con descarga ahogada, según Keutner (Ref. 9).

PROBLEMAS

1. *a)* Un vertedor rectangular de pared delgada, con contracciones laterales, tiene una longitud de 1 m. ¿A qué altura w se debe colocar en un canal, de ancho B = 2 m, para conseguir un tirante en el canal de llegada $h + w$ = 2 m y un gasto Q = 0.25 m³/seg? *b)* ¿Cuál sería la carga sobre un vertedor triangular θ = 90° para descargar el mismo gasto?

2. Se han realizado experimentos con un vertedor rectangular de pared delgada, con una longitud de cresta de 0.92 m, colocado en un canal de 1.22 m de ancho, a una elevación w = 0.61 m de la cresta al piso del canal, obteniendo los siguientes resultados:

Q (en m³/seg)	0.286	0.538	0.835
h (en m)	0.305	0.458	0.61

Demostrar que estas observaciones son consistentes con la fórmula: $Q = C\,b\,H^n$, si $H = h + V_0^2/2g$, donde V_0 es la velocidad de llegada en el canal. Determinar los valores de C y n.

3. Un canal de sección rectangular, de 18 m de ancho, transporta un gasto máximo de 25 m³/seg, con un tirante de 1.50 m. Se desea colocar un vertedor rectangular de pared delgada (10 m de longitud de cresta) de modo que el tirante del río, aguas arriba del vertedor, aumente —cuando más— a 2.25 m. Determinar el nivel necesario de la cresta vertedora.

4. Un canal rectangular de 10 m de ancho transporta 30 m³/seg. Por medio de una pantalla vertical se proporciona, en su parte inferior, una abertura de ancho (igual al del canal) de 1.50 m de altura. El nivel de la superficie libre, aguas abajo, se encuentra a 1 m por encima del borde superior del orificio. Calcular el tirante del canal, aguas arriba de la pantalla.

5. Se desea un croquis de la instalación de un vertedor de pared delgada destinado a aforar un gasto de agua con un máximo de 70 lt/seg. Este vertedor será instalado dentro de una zanja, de 1 m de ancho, para colectar las infiltraciones provenientes de la

cimentación de una presa de tierra. La velocidad del agua —antes del vertedor— será de 0.25 m/seg para el gasto máximo. Se demanda situar la escala de limnímetro necesaria para medir la carga sobre la cresta.

6. En un canal de 2.50 m de ancho se colocan dos vertedores de pared delgada; uno rectangular de 0.80 m de longitud de cresta y otro triangular con ángulo en el vértice, de 60°, practicados sobre la misma placa (como se muestra en la figura). Determinar el gasto total vertido con una carga común de 0.35 m, si la altura de la cresta al fondo es de 0.70 m.

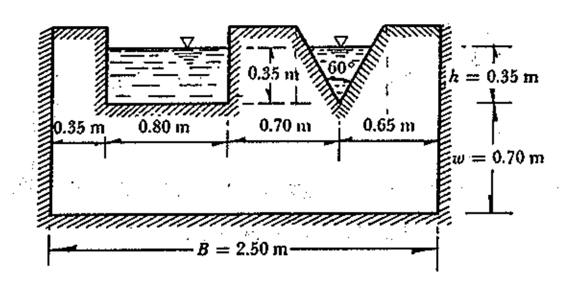


Figura del problema 6.

7. Para mantener un gasto prácticamente constante en el orificio de diámetro D = 120 mm (mostrado en la figura) durante las variaciones de entrada del agua al tanque, se ha proporcionado un vertedor rectangular de pared delgada, sin contracciones laterales y 0.70 m de longitud de cresta. La cresta del vertedor se encuentra a una altura H = 3 m desde el orificio. Determinar: *a)* el gasto Q de admisión al tanque y el del orificio, si la carga en el vertedor es h = 0.10 m, siendo los coeficientes de descarga C_d = 0.97 en el orificio y μ = 0.645 en el vertedor; *b)* el gasto Q de admisión al tanque con el cual se elimina el escurrimiento a través del vertedor.

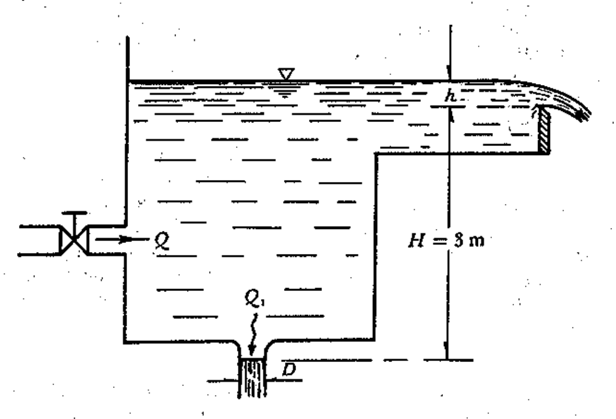


Figura del problema 7.

8. En la compuerta —mostrada en la figura— se desea descargar un gasto $Q = 5$ m³/seg, para un ancho de canal de 4 m y una carga, aguas arriba, $y_1 = 3.5$ m. Determinar la abertura a necesaria en la compuerta si aguas abajo se coloca un vertedor rectangular sin contracciones laterales, a una altura $w = 1.00$ m.

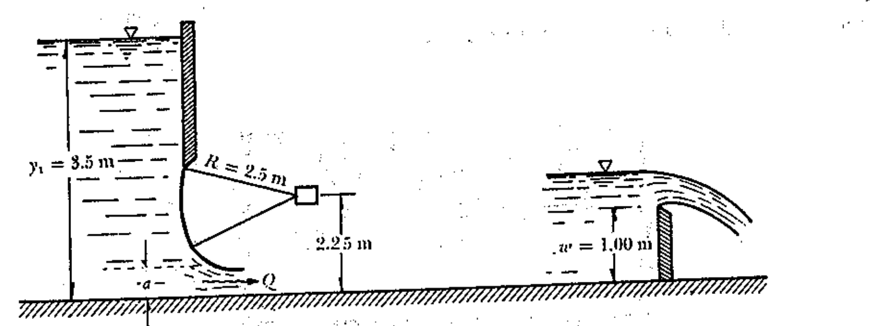


Figura del problema 8.

9. El ancho de un vertedor Cippolletti es de 0.51 m; la carga medida es $h = 0.212$ m con una velocidad de llegada de 1.52 m/seg. Calcular el gasto del vertedor.

10. Un vertedor de pared delgada, de forma circular, tiene un radio $R = 0.5$ m y funciona con una carga $h = 0.5$ m. Determinar el gasto que descarga.

11. En las pruebas de aforo, efectuadas en un pozo, se ha medido una carga máxima $h = 0.09$ m sobre el brocal del tubo de descarga de la bomba, el cual tiene un diámetro $D = 0.30$ m. Determinar el gasto máximo que proporciona el pozo.

12. Determinar la forma geométrica que debe tener un vertedor de pared delgada, para que proporcione una ley lineal de gastos, de tal manera que con la carga máxima $h = 0.76$ m descargue 500 lt/seg.

13. Un vertedor de pared gruesa, con el umbral a 1.50 m de altura desde el fondo y 3 m de longitud, tiene el borde, de aguas arriba, redondeado. Dicho vertedor se va a construir en el tramo recto de un arroyo para realizar aforos. Se desea determinar la gráfica que relacione gastos contra cargas, para ser proporcionada al aforador que efectuará las mediciones.

14. Una obra de excedencias en una presa consiste en un cimacio que trabajará con una carga máxima sobre la cresta del mismo $h_0 = 1$ m, para descargar un gasto máximo de 60 m³/seg. Determinar la longitud de cresta necesaria y el perfil que debe tener el mismo, si va a tener una altura máxima de 3 m.

15. Un vertedor de cresta redondeada se va a construir sobre el fondo de un canal, como se muestra en la figura 7.30. Determinar el gasto de vertido si va a funcionar ahogado con una carga, aguas arriba, $h_1 = 0.90$ m y otra, aguas abajo, $h_2 = 0.60$ m; además, tiene una longitud de cresta de 2.50 m.

16. Con el objeto de elevar el tirante de un río se ha construido un muro —como el mostrado en la figura— el cual tiene una longitud de 6.5 m que coincide con el ancho del río. En la proximidad del muro y aguas arriba del mismo se piensa construir una obra de toma o base de una batería, de 3 compuertas cuadradas de 0.65 m de lado, para derivar un gasto de 5 m³/seg en condiciones de descarga libre. Calcular el tirante y_1 necesario para efectuar esa derivación; el gasto Q_v que vierte sobre el muro; y el gasto total en el río Q_t.

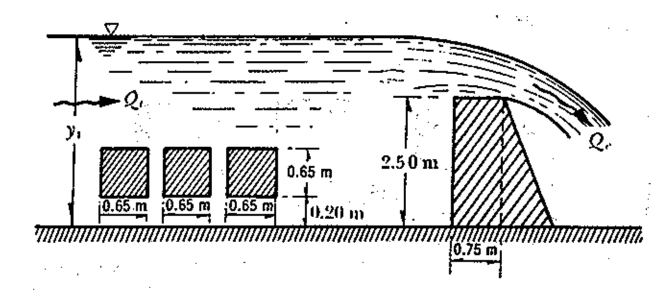


Figura del problema 16.

17. Determinar la distribución de los gastos (en el problema 7.5) si la abertura inferior de la placa cambia a 0.15 m y el gasto total aumenta a 750 lt/seg.

18. El gasto Q que entra al tanque (mostrado en la figura) es de 535 lt/seg y vierte sobre el vertedor triangular superior, con ángulo en el vértice de 60°, y sobre el rectangular inferior de 1.00 m de longitud de cresta; este último sin contracciones laterales. Determinar el nivel y del agua en el tanque y el gasto que descarga cada vertedor.

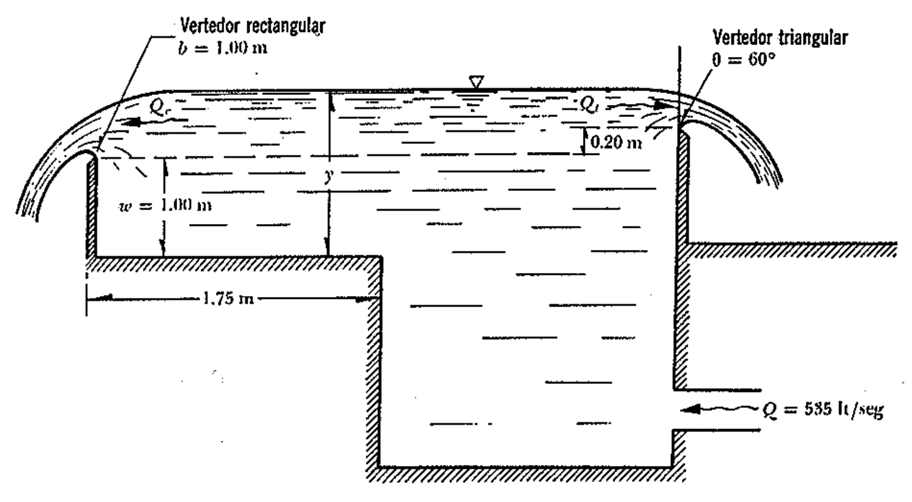


Figura del problema 18.

19. Dos tanques *A* y *B*, de 4 × 5 m de sección horizontal, se comunican a través de un orificio circular de 20 cm de diámetro. En *C* se dispone de un vertedor rectangular, de pared delgada, de 1 m de longitud de cresta. Suponiendo que en el tiempo cero, los niveles del agua son los indicados en la figura, establecer la relación analítica o gráfica entre el tiempo y los niveles del agua en los dos tanques. (El orificio es de pared delgada $C_d = 0.60$)

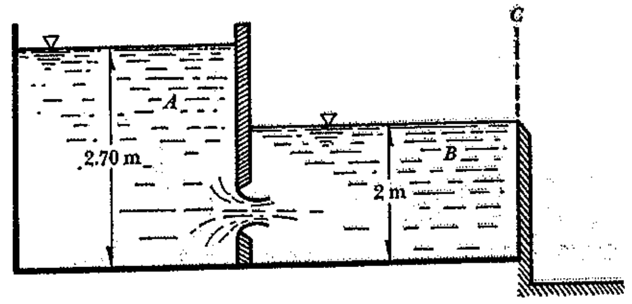


Figura del problema 19.

8

RESISTENCIA AL FLUJO EN CONDUCTOS A PRESIÓN

8.1 Aspectos generales

En la aplicación de los métodos de análisis, de los capítulos 6 y 7, no ha sido necesario el cálculo de las pérdidas de energía por fricción, debido a que se trata de problemas locales de flujo donde las pérdidas que se han evaluado se deben más bien a efectos de aceleraciones súbitas del flujo o a separaciones del mismo. Sin embargo, en estructuras largas, la pérdida por fricción es muy importante, por lo que ha sido objeto de investigaciones teóricoexperimentales para llegar a soluciones satisfactorias de fácil aplicación.

Para estudiar el problema de la resistencia al flujo resulta necesario volver a la clasificación inicial de los flujos y considerar las grandes diferencias de su comportamiento entre los flujos laminar y turbulento.

Osborne Reynolds (1883) en base a sus experimentos fue el primero que propuso el criterio para distinguir ambos tipos de flujo mediante el número que lleva su nombre, el cual permite evaluar la preponderancia de las fuerzas viscosas sobre las de inercia.

En el caso de un conducto cilíndrico a presión, el número de Reynolds se define así:

$$R_e = \frac{VD}{\nu} \tag{8.1}$$

donde V es la velocidad media, D el diámetro del conducto y ν la viscosidad cinemática del fluido.

Reynolds encontró que en un tubo el flujo laminar se vuelve inestable cuando R_e ha rebasado un valor crítico, para tornarse después en turbulento. De acuerdo con diferentes investigadores el número crítico de Reynolds adquiere valores muy distintos que van desde 2 000 (determinado por el mismo Reynolds) hasta 40 000 (calculado por Eckman). De ello se deduce que dicho valor depende en mucho de los disturbios iniciales y define además un cierto límite, abajo del cual éstos se amortiguan, estabilizando al flujo laminar.

Es interesante observar que, tanto el flujo laminar como el turbulento, resultan propiamente de la viscosidad del fluido por lo que, en

ausencia de la misma, no habría distinción entre ambos. Es más, aun en flujo turbulento el esfuerzo tangencial o de fricción, producido por el intercambio en la cantidad de movimiento entre partículas que fluctúan lateralmente, en cierto modo es resultado de los efectos viscosos.

En este capítulo se presentan los resultados experimentales más importantes para el cálculo de la resistencia al flujo de líquidos, en conductos sencillos a presión, para después poder analizar sistemas más complejos.

Los resultados que aquí se presentan son los de mayor interés práctico. Sin embargo, si el lector desea un estudio más profundo de la teoría de la resistencia al flujo, se recomienda la lectura del Apéndice B, en el cual se desarrolla la teoría semiempírica de Prandt - von Kármán, que es clásica de los flujos viscosos.

Finalmente, conviene presentar aquí algunos conceptos importantes que serán utilizados posteriormente.

Cuando la superficie de la pared de un conducto se amplifica, observamos que está formada por irregularidades o asperezas de diferentes alturas y con distribución irregular o aleatoria. Dicha característica es difícil de definir científicamente pues depende de factores como la altura media de las irregularidades de la superficie, la variación de la altura efectiva respecto de la altura media, la forma y distribución geométrica, la distancia entre dos irregularidades vecinas, etcétera.

Puesto que prácticamente es imposible tomar en consideración todos esos factores, se admite que la rugosidad puede expresarse por la altura media ε de las asperezas (*rugosidad absoluta*), como un promedio obtenido del resultado de un cálculo con las características del flujo, mas no propiamente por el obtenido como la media de las alturas determinadas físicamente de la pared, en cada conducción. Es más importante la relación que la rugosidad absoluta guarda con el diámetro del tubo, esto es, la relación ε/D, que se conoce como *rugosidad relativa*.

Existen tubos, como los de asbesto-cemento, cuya rugosidad es de forma ondulada y que se comportan *hidráulicamente* como si fueran *tubos lisos* (vidrio o plástico).

Tres conceptos geométricos de la sección de una conducción hidráulica, muy importantes en el cálculo de las pérdidas de fricción, son los siguientes.

Area hidráulica A, es decir, el área de la sección transversal ocupada por el líquido dentro del conducto.

Perímetro mojado P, que es el perímetro de la sección transversal del conducto en el que hay contacto del líquido con la pared (no incluye la superficie libre si ésta existe).

Radio hidráulico R_h, o sea la relación entre el área hidráulica y el perímetro mojado de la sección ($R_h = A/P$).

8.2 Fórmula de Darcy-Weisbach

Para un flujo permanente, en un tubo de diámetro constante, la línea de cargas piezométricas es paralela a la línea de energía e inclinada en la dirección del movimiento. En 1850, Darcy, Weisbach y otros, dedujeron experimentalmente una fórmula para calcular en un tubo la pérdida por fricción:

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \qquad (8.2a)$$

donde

- f *factor de fricción*, sin dimensiones;
- g aceleración de la gravedad, en m/seg²;

- h_f pérdida por fricción, en m;
- D diámetro, en m;
- L longitud del tubo, en m;
- V velocidad media, en m/seg.

El factor de fricción es función de la rugosidad ε y del número de Reynolds R_e en el tubo, esto es:

$$f = f(\varepsilon, R_e)$$

La fórmula de Darcy-Weisbach, ecuación (8.2a), se puede derivar por medio del análisis dimensional (Apéndice A).

Si S_f representa la relación entre la pérdida de energía y la longitud del tubo en que ésta ocurre (*pendiente de fricción*), la Ec. (8.2a) también es

$$S_f = \frac{h_f}{L} = \frac{f}{D} \frac{V^2}{2g} \qquad (8.2b)$$

8.3 Investigaciones experimentales sobre las pérdidas por fricción en tubos

Poiseuille, en 1846, fue el primero en determinar matemáticamente el factor de fricción en flujo laminar y obtuvo una ecuación para determinar dicho factor, que es:

$$f = \frac{64}{R_e} = \frac{64}{VD/\nu} \qquad (8.3)$$

la cual es válida para tubos lisos o rugosos, en los cuales el número de Reynolds no rebasa el valor crítico 2 300.

A partir de los resultados experimentales, acumulados hasta el año de 1913, Blasius llegó a la importante conclusión de que existen dos tipos de fricción para el flujo turbulento en tubos. El primero está asociado con tubos lisos donde los efectos de viscosidad predominan y el factor de fricción depende únicamente del número de Reynolds. El segundo tipo se refiere a tubos rugosos donde la viscosidad y los efectos de rugosidad influyen en el flujo, además de que el factor de fricción depende del número de Reynolds y de la rugosidad relativa.

En base a sus propias experiencias y con los datos experimentales de Saph y Schoder, Blasius formuló la siguiente expresión para tubos lisos:

$$f = \frac{0.3164}{R_e^{1/4}} \qquad (8.4)$$

al substituirla en la ecuación de Darcy-Weisbach, resulta que $h_f \sim V^{1.75}$.

Años más tarde, Stanton y Pannell, después de investigar detalladamente el flujo del aire y del agua en tubos lisos de latón, encontraron que al llevar sus resultados sobre una gráfica, de f contra R_e, los puntos se agrupaban a lo largo de una curva que —en la zona turbulenta— concuerda bastante con la fórmula de Blasius para $R_e > 10^5$. Sin embargo, atrás de este límite existía una gran divergencia indicando que el exponente de V, en la relación h_f contra V, aumentaba con R_e; ello fue confirmado por otros investigadores.

Las contribuciones más importantes las realizó Nikuradse, en Gotinga, alrededor de 1920 (Ref. 38). Este investigador obtuvo resultados de f contra R_e, en tubos lisos, que comprendían hasta valores de $R_e = 3 \times 10^6$, obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log R_e \sqrt{f} - 0.8 \qquad (8.5a)$$

o bien

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{R_e \sqrt{f}}{2.51} \qquad (8.5b)$$

También efectuó mediciones de la distribución de velocidades, en secciones transversales del tubo, que tuvieron gran valor en el desarrollo de la teoría semiempírica del flujo turbulento en tubos, especialmente los rugosos.

Nikuradse trabajó con tubos de rugosidad artificial perfectamente verificada en el laboratorio, mediante granos uniformes de arena adheridos con diferente distribución sobre la superficie interna del tubo. Una combinación juiciosa de ε y D le permitieron establecer seis valores distintos de la rugosidad relativa ε/D, que van de 1/30 hasta 1/1 014. Además, obtuvo la ecuación que lleva su nombre, válida para tubos rugosos en la zona turbulenta y que es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{D}{2\varepsilon} + 1.74 \qquad (8.6a)$$

o bien

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3.71\, D}{\varepsilon} \qquad (8.6b)$$

Los resultados de los experimentos de Nikuradse y la representación gráfica de la Ec. (8.3) para comparación, se presentan en el diagrama de la Fig. 8.1.

El diagrama de Nikuradse comprueba la validez de la ecuación siguiente.

$$f = f\,(R_e, \varepsilon/D)$$

Además, corrobora los siguientes puntos importantes.

a) Dentro del intervalo $R_e < 2\,300$ para flujo laminar, f depende exclusivamente del número de Reynolds y no de la rugosidad del tubo. La recta en torno de la cual se agrupan los puntos para flujo laminar en la Fig. 8.1, corresponde a la Ec. (8.3). Substituida esta ecuación en la de Darcy- Weisbach, el coeficiente f depende directamente de la velocidad media en el tubo.

b) A partir de $R_e = 2\,300$ se inicia la zona de transición de flujo laminar a turbulento, sin poder establecer una ley general de variación. Dentro de esta zona, f depende, tanto de R_e como de ε/D.

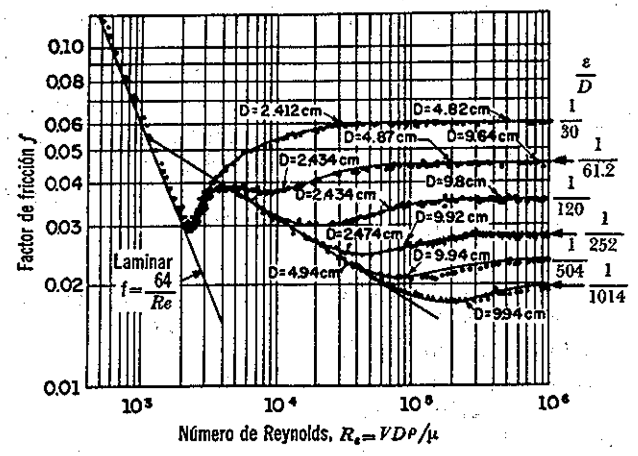


Figura 8.1. Diagrama de Nikuradse para tubos con rugosidad uniforme.

c) De acuerdo con el valor de ε/D la zona turbulenta se inicia con diferentes valores de R_e; es decir, que el número de Reynolds, como límite superior para la zona de transición, depende de la rugosidad del tubo.

d) Dentro de la zona turbulenta, esto es, para números de Reynolds grandes, f es independiente de R_e y varía exclusivamente con la rugosidad relativa ε/D. De acuerdo con la fórmula de Darcy-Weisbach, ello significa que f depende del cuadrado de la velocidad.

Como se mostrará posteriormente, la evidencia experimental obtenida por Nikuradse proporcionó la información que Prandtl y von Kármán necesitaron para apoyar y completar las fórmulas teóricas que definen el flujo turbulento en tubos lisos y rugosos. Sin embargo, el valor práctico directo de los resultados de Nikuradse tuvo algunas limitaciones debido a que era difícil correlacionar la rugosidad artificial uniforme, con el tipo irregular y ondulado de los tubos comerciales.

8.4 Resistencia al flujo en tubos comerciales

La rugosidad de los tubos comerciales no es homogénea, razón por la cual es difícil de definir científicamente. Sin embargo, se puede caracterizar por un valor medio que, desde el punto de vista de pérdida, es equivalente a una rugosidad uniformemente distribuida. Conviene aclarar que en dicho valor intervienen, además, otros factores como la frecuencia y alineamiento de las juntas en los conductos de concreto y asbesto-cemento, o bien el tipo de costura o de remachado en los tubos de acero y, finalmente, el efecto de incrustaciones y acumulamientos en los conductos, principalmente metálicos, por la acción corrosiva del agua.

Con el fin de comprobar los resultados en tuberías comerciales, diferentes investigadores hicieron estudios posteriores a los de Nikuradse y aceptaron el concepto —de rugosidad media— usado por éste, la cual determinaron por un proceso inverso. Es decir, una vez que obtuvieron experimentalmente la pérdida de fricción en una tubería de características hidráu-

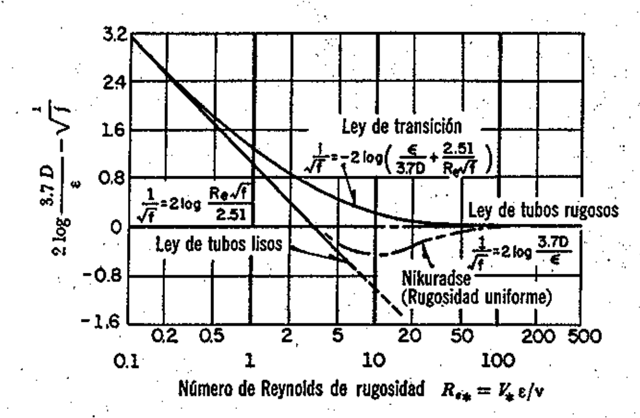


Figura 8.2. Comparación entre las curvas, en la zona de transición, para tubos comerciales y de rugosidad uniforme.

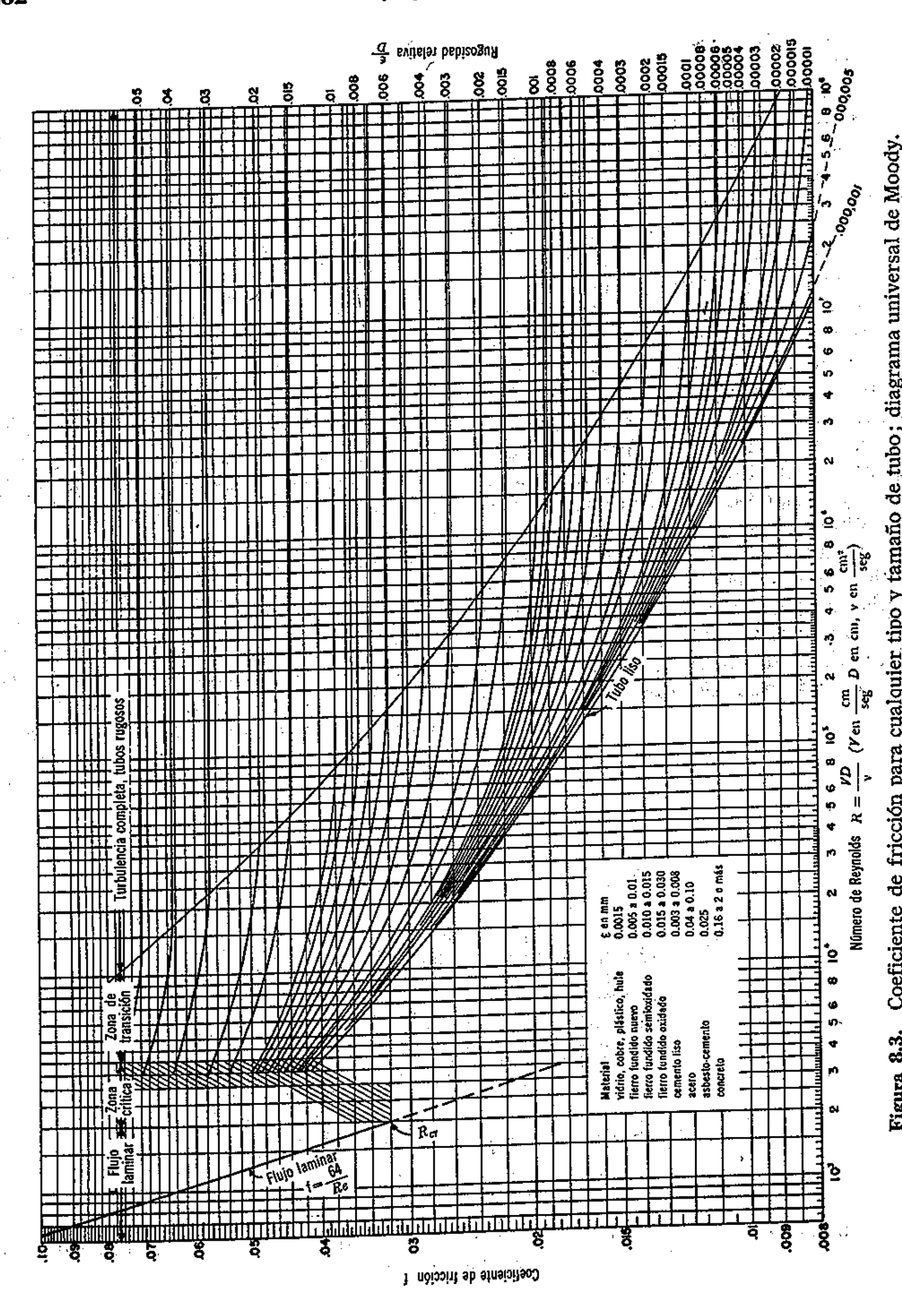


Figura 8.3. Coeficiente de fricción para cualquier tipo y tamaño de tubo; diagrama universal de Moody.

licas y geométricas conocidas, determinaron el coeficiente f de la fórmula de Darcy-Weisbach y obtuvieron, a partir de la Ec. (8.6), el valor de ε con números grandes de Reynolds.

Colebrook y White comprobaron los mismos resultados de Nikuradse, para las zonas laminar y turbulenta en tubos de *rugosidad comercial,* lo cual permite extender la validez de las Ecs. (8.3) y (8.6) a tubos comerciales. Sin embargo, dentro de la zona de transición encontraron discrepancias con los resultados en la Fig. 8.1, mismos que se muestran, comparativamente, en la Fig. 8.2 (Ref 39).

Colebrook y White presentaron la siguiente fórmula empírica para la zona de transición de flujo laminar a turbulento en tubos comerciales, a saber:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{R_e\sqrt{f}}\right) \quad (8.7)$$

Con base en estos resultados Moody preparó el *diagrama universal,* que lleva su nombre, para determinar el coeficiente de fricción f en tuberías de rugosidad comercial que transportan cualquier líquido (Fig. 8.3).

En dicho diagrama se comprueban también los mismos aspectos para los tubos de rugosidad comercial, que con el diagrama de Nikuradse de la Fig. 8.1. La curva límite inferior corresponde a los lisos y coincide parcialmente con la ecuación de Blasius (8.4).

La precisión en el uso del diagrama universal de Moody depende de la selección de ε, según el material de que está construido el tubo. En la tabla 8.1 se presentan los valores de ε para tubos comerciales y, en la Fig. 8.4, los valores de la rugosidad relativa ε/D para los materiales más comunes.

Distintos intentos de evaluar el efecto corrosivo del agua en conductos se han llevado a cabo, basándose en la reducción del gasto calculado teóricamente, de acuerdo con el *PH* del agua y el número de años de servicio de la tubería (Ref. 40). Sin embargo, el criterio que parece más efectivo es el de Genijew (Ref. 7) al modificar la rugosidad absoluta del tubo nuevo, de acuerdo con el tipo de agua que va a escurrir y el número de años de servicio; esto es:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_0 + a\,t \quad (8.8)$$

donde

- ε_0 rugosidad del tubo (nuevo), en mm;
- a coeficiente que depende del grupo en el que se clasifique el agua que va a escurrir, según la tabla 8.2;
- t número de años de servicio de la tubería;
- ε_t rugosidad del conducto, después de t años de servicio, en mm.

Problema 8.1. Determinar la dirección del flujo en el tubo mostrado en la figura 8.5, así como el gasto que transporta, donde $\gamma = 800$ kg/m³, $\mu = 0.14 \times 10^{-2}$ kg seg/m².

Solución. Con el plano horizontal de referencia al nivel del punto 2, la suma de las cargas de posición y de presión, en el punto 1, es

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{14\,000}{800} + 4.6 = 22.10 \text{ m}$$

y la carga de presión, en el 2, la siguiente:

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{21\,000}{800} = 26.25 \text{ m} > 22.10 \text{ m}$$

luego, el flujo es necesariamente de 2 a 1,

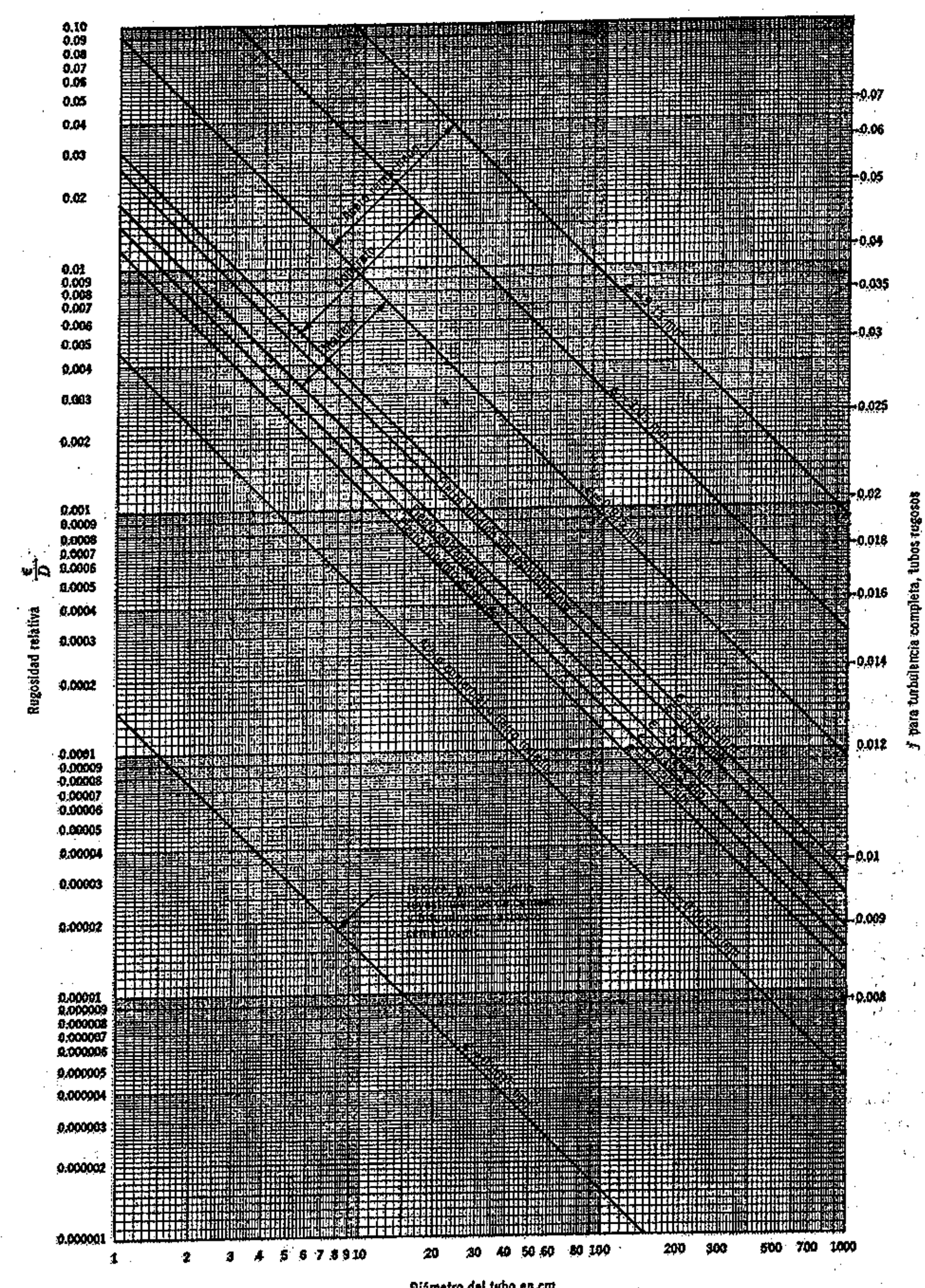


Figura 8.4. Rugosidad relativa para tubos nuevos limpios.

TABLA 8.1 Rugosidad absoluta ε en tubos comerciales

Material	*ε, en mm*
Tubos lisos	
De vidrio, cobre, latón, madera (bien cepillada), acero nuevo soldado y con una mano interior de pintura; tubos de acero de precisión sin costura, serpentines industriales, plástico, hule	0.0015
Tubos industriales de latón	0.025
Tubos de madera	0.2 a 1
Hierro forjado	0.05
Fierro fundido nuevo	0.25
Fierro fundido, con protección interior de asfalto	0.12
Fierro fundido oxidado	1 a 1.5
Fierro fundido, con incrustaciones	1.5 a 3
Fierro fundido, centrifugado	0.05
Fierro fundido nuevo, con bridas o juntas de macho y campana	0.15 a 0.3
Fierro fundido usado, con bridas o juntas de macho y campana	2 a 3.5
Fierro fundido para agua potable, con bastantes incrustaciones y diámetro de 50 a 125 mm	1 a 4
Fierro galvanizado	0.15
Acero rolado, nuevo	0.05
Acero laminado, nuevo	0.04 a 0.1
Acero laminado con protección interior de asfalto	0.05
Tubos de acero soldado de calidad normal	
Nuevo	0.05 a 0.10
Limpiado después de mucho uso	0.15 a 0.20
Moderadamente oxidado, con pocas incrustaciones	0.4
Con muchas incrustaciones	3
Con remaches transversales, en buen estado	0.1
Con costura longitudinal y una línea transversal de remaches en cada junta, o bien laqueado interiormente	0.3 a 0.4
Con líneas transversales de remaches, sencilla o doble; o tubos remachados con doble hilera longitudinal de remaches e hilera transversal sencilla, sin incrustaciones	0.6 a 0.7
Acero soldado, con una hilera transversal sencilla de pernos en cada junta, laqueado interior, sin oxidaciones, con circulación de agua turbia	1

TABLA 8.1 (*Continuación*)

Material	ε, *en mm*
Acero soldado, con doble hilera transversal de pernos, agua turbia, tuberías remachadas con doble costura longitudinal de remaches y transversal sencilla, interior asfaltado o laqueado	1.2 a 1.3
Acero soldado, con costura doble de remaches transversales, muy oxidado. Acero remachado, de cuatro a seis filas longitudinales de remaches, con mucho tiempo de servicio	2
Tubos remachados, con filas longitudinales y transversales	
a) Espesor de lámina < 5 mm	0.65
b) Espesor de lámina de 5 a 12 mm	1.95
c) Espesor de lámina > 12 mm, o entre 6 y 12 mm, si las hileras de pernos tienen cubrejuntas	3
d) Espesor de lámina > 12 mm con cubrejuntas	5.5
Tubos remachados, con cuatro filas transversales y seis longitudinales con cubrejuntas interiores	4
Asbesto-cemento nuevo	0.025
Asbesto-cemento, con protección interior de asfalto	0.0015
Concreto centrifugado, nuevo	0.16
Concreto centrifugado, con protección bituminosa	0.0015 a 0.125
Concreto en galerías, colado con cimbra normal de madera	1 a 2
Concreto en galerías, colado con cimbra rugosa de madera	10
Concreto armado en tubos y galerías, con acabado interior cuidadosamente terminado a mano	0.01
Concreto de acabado liso	0.025
Conductos de concreto armado, con acabado liso y varios años de servicio	0.2 a 0.3
Concreto alisado interiormente con cemento	0.25
Galerías con acabado interior de cemento	1.5 a 1.6
Concreto con acabado normal	1 a 3
Concreto con acabado rugoso	10
Cemento liso	0.3 a 0.8
Cemento no pulido	1 a 2
Concreto presforzado Freyssinet	0.04
Concreto presforzado Bona y Socoman	0.25
Mampostería de piedra, bien junteada	1.2 a 2.5
Mampostería de piedra rugosa, sin juntear	8 a 15
Mampostería de piedra, mal acabada	1.5 a 3

TABLA 8.2 Coeficientes a de la fórmula de Genijew

Grupo I

Agua con poco contenido mineral que no origina corrosión. Agua con un pequeño contenido de materia orgánica y de solución de hierro:

a varía de 0.005 a 0.055; valor medio, 0.025.

Grupo II

Agua con poco contenido mineral que origina corrosión. Agua que contiene menos de 3 mg/lt de materia orgánica y hierro en solución:

a varía de 0.055 a 0.18; valor medio, 0.07.

Grupo III

Agua que origina fuerte corrosión y con escaso contenido de cloruros y sulfatos (menos de 100 a 150 mg/lt). Agua con un contenido de hierro de más de 3 mg/lt:

a varía de 0.18 a 0.40; valor medio, 0.20.

Grupo IV

Agua que origina corrosión, con un gran contenido de sulfatos y cloruros (más de 500 a 700 mg/lt). Agua impura con una gran cantidad de materia orgánica:

a varía de 0.40 a 0.60; valor medio, 0.51.

Grupo V

Agua con cantidades importantes de carbonatos, pero de dureza pequeña permanente, con residuo denso de 2000 mg/lt:

a varía de 0.6 a más que 1.

dado que la carga de velocidad es la misma en ambos puntos.

La pendiente de fricción de 1 a 2 es constante y vale:

$$S_f = \frac{d}{ds}\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) = \frac{26.25 - 22.10}{9.2} = 0.451$$

Substituyendo la ecuación (8.3) en la Ec. (8.2b) y despejando a V, resulta:

$$V = \frac{\gamma S_f D^2}{32 \mu} = \frac{800 \times 0.451 \times (0.0125)^2}{32 \times 0.14 \times 10^{-2}} = 0.43 \text{ m/seg}$$

y el gasto será entonces:

$$Q = \frac{\pi}{4} D^2 V =$$

$$= \frac{\pi(0.0125)^2 \times 0.43}{4} = 0.527 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^3/seg}$$

Figura 8.5. Ilustración al problema 8.1.

y el número de Reynolds se determina, una vez calculados ρ y V, así:

$$\rho = \frac{800}{9.8} = 81.63\ \mathrm{kg\ seg^2/m^4}$$

$$\nu = \frac{0.41 \times 10^{-2}}{81.63} = 0.502 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2/seg}$$

$$R_e = \frac{0.430 \times 0.0125}{0.502 \times 10^{-4}} = 107.1 < 2\,300$$

luego entonces el flujo es efectivamente laminar.

De la Ec. (8.3) el factor de fricción vale

$$f = \frac{64}{107.1} = 0.60$$

Problema 8.2. En la Fig. 8.6 se muestra un dispositivo utilizado en el laboratorio para medir la viscosidad de los líquidos. Consiste en un recipiente a superficie libre o a presión con descarga al medio ambiente, mediante un tubo horizontal de diámetro pequeño. Dentro del recipiente se ha vaciado un líquido cuyo peso específico es $\gamma = 950\ \mathrm{kg/m^3}$ y alcanza una altura $h = 0.80$ m; hay una presión manométrica $p_0 = 0.1\ \mathrm{kg/cm^2}$ sobre la superficie libre. El diámetro del tubo es $D = 5$ cm y su longitud $L = 6$ m; el gasto descargado es de 182 kg/min. Determinar la viscosidad del líquido.

Solución. El gasto y la velocidad son los siguientes:

$$Q = \frac{182}{950 \times 60} = 0.00319\ \mathrm{m^3/seg}$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4 \times 0.00319}{\pi \times (0.05)^2} = 1.625\ \mathrm{m/seg}$$

Puesto que el tubo descarga al medio ambiente, la pérdida por fricción será:

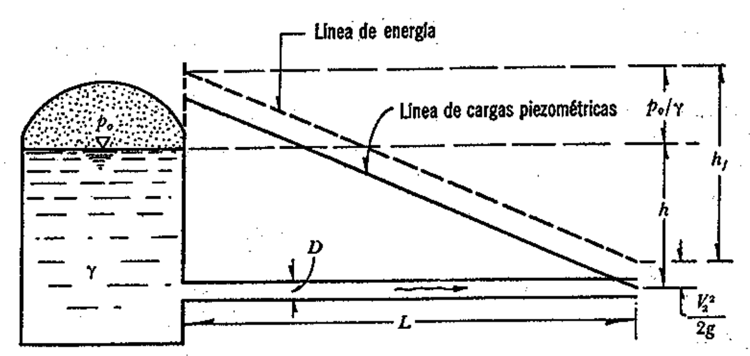


Figura 8.6. Ilustración del problema 8.2.

$$h_f = h + \frac{p_0}{\gamma} - \frac{V^2}{2g} =$$

$$= 0.8 + \frac{0.1 \times 10^4}{950} - \frac{(1.625)^2}{19.6} = 1.718\ \mathrm{m}$$

y la pendiente de fricción es:

$$S_f = \frac{1.718}{6} = 0.2863$$

Si suponemos que el flujo es laminar, de la ecuación que proporcionó la velocidad en el problema 8.1 la viscosidad dinámica resulta ser:

$$\mu = \frac{\gamma S_f D^2}{32 V} =$$

$$= \frac{950 \times 0.2863 \times (0.05)^2}{32 \times 1.625} =$$

$$= 0.013\ \mathrm{kg\ seg/m^2}$$

Faltaría verificar si el flujo es efectivamente laminar. Con $\rho = \gamma/g$, el número de Reynolds vale:

$$R_e = \frac{V D \rho}{\mu} =$$

$$= \frac{1.625 \times 0.05 \times 950}{0.013 \times 9.8} = 606 < 2{,}000$$

luego, el flujo es laminar y los resultados anteriores son correctos.

Problema 8.3. Determinar el diámetro adecuado para una tubería de 305 m de longitud que transporta 57 lt/seg de aceite, en la cual se debe vencer una carga de 13.6 m, debida a las pérdidas por fricción. A la temperatura de trabajo, el peso específico del aceite es de 900 kg/m³ y la viscosidad dinámica de 0,14646 kg seg/m². Calcular también la potencia hidráulica que la bomba debe proporcionar al fluido.

Solución. La pendiente de fricción vale

$$S_f = \frac{13.6}{305} = 0.0446$$

De la ecuación de continuidad y de la que proporcionó la velocidad media en el problema 8.1, resulta:

$$D = \left(\frac{128\,\mu\,Q}{\pi\,\gamma\,S_f}\right)^{\frac{1}{4}} =$$

$$\left(\frac{128 \times 0.14646 \times 0.057}{\pi \times 900 \times 0.0446}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$D = 0.304\ \mathrm{m}$$

Es necesario verificar que el flujo sea efectivamente laminar. La velocidad media vale

$$V = \frac{0.057 \times 4}{\pi \times (0.304)^2} = 0.786\ \mathrm{m/seg}$$

con $\rho = \gamma/g$, el número de Reynolds será:

$$R_e = \frac{0.786 \times 0.304 \times 900}{0.14646 \times 9.8} = 150$$

donde, por ser menor de 2 000, es correcto haber supuesto que el flujo es laminar.

La potencia que debe suministrar la bomba está dada por

$$P = \gamma Q H = 900 \times 0.057 \times 13.6$$

$$P = 697.68\ \mathrm{kg\ m/seg}$$

o bien

$$P = \frac{697.68}{75} = 9.3\ CV$$

Problema 8.4. Calcular la pérdida de energía por fricción en un tramo de tubo liso de 153 m de longitud y 0.10 m de diámetro, donde fluye aceite de peso específico $\gamma = 930 \text{ kg/m}^3$, viscosidad $\mu = 0.00486 \text{ kg-seg/m}^2$, si la velocidad media es: *a)* $V = 0.60 \text{ m/seg}$; *b)* $V = 3 \text{ m/seg}$.

Solución a). El número de Reynolds es:

$$R_e = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{0.60 \times 0.10 \times 930}{9.8 \times 0.00486} = 1\,172 < 2\,000$$

luego el flujo es laminar y vale la ecuación (8.3), a saber:

$$f = \frac{64}{R_e} = \frac{64}{1\,172} = 0.0546$$

La pérdida por fricción es

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = \frac{0.0546 \times 153 \times 0.36}{0.1 \times 19.6} = 1.535 \text{ m}$$

Solución b). Siguiendo un procedimiento semejante, tenemos que

$$R_e = \frac{3 \times 0.10 \times 930}{9.8 \times 0.00486} = 5\,858$$

Del diagrama de Moody, para un tubo liso $f = 0.0356$, resulta:

$$h_f = \frac{0.0356 \times 153 \times 9}{0.1 \times 19.6} = 25.01 \text{ m}$$

Problema 8.5. Determinar el gasto que fluye en un tubo de acero de 0.30 m de diámetro, que conduce agua potable con temperatura de 15°C, si se especifica que la pérdida de fricción sea de 1.20 m por cada 100 m de tubería ($\varepsilon/D = 0.00085$).

Solución: Se supone $f = 0.0188$ para un número de Reynolds grande. De la fórmula de Darcy-Weisbach, tenemos:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{h_f D}{f L} = \frac{1.20 \times 0.30}{0.0188 \times 100} = 0.1915 \text{ m}$$

$$V = 1.939 \text{ m/seg}$$

Para el agua de 15°C, $\nu = 1.145 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{seg}$, el número de Reynolds resulta ser:

$$R_e = \frac{1.939 \times 0.30 \times 10^6}{1.145} = 508\,035$$

y del diagrama de Moody $f = 0.0195$, luego:

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{1.20 \times 0.30}{0.0195 \times 100} = 0.185 \text{ m}$$

$$V = 1.905 \text{ m/seg}$$

El nuevo número de Reynolds es $R_e = 499\,130$; por lo tanto, $f = 0.0195$.

El gasto vale, finalmente:

$$Q = \frac{\pi \times 0.09}{4} \times 1.905 = 0.135 \text{ m}^3/\text{seg}.$$

Problema 8.6. Determinar el diámetro de un tubo de acero ($\varepsilon = 0.0000458$ m), necesario para transportar 0.250 m³/seg de aceite, de viscosidad cinemática $\nu = 0.00001 \text{ m}^2/\text{seg}$, a una distancia de 3 000 m con una pérdida de fricción de 23 m.

Solución. De la fórmula de Darcy-Weisbach tenemos:

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{16\,Q^2}{2g\,\pi^2 D^4}$$

Por lo tanto,

$$D^5 = \frac{8\,L\,Q^2}{g\pi^2 h_f} f = \frac{8 \times 3\,000 \times 0.0625}{9.8 \times \pi^2 \times 23} f = 0.674\,f$$

además:

$$R_e = \frac{4\,Q\,D}{\pi\nu\,D^2} = \frac{4 \times 0.250}{\pi \times 0.00001}\frac{1}{D} = \frac{31\,831}{D}$$

Si $f = 0.02$, entonces

$$D = \sqrt[5]{0.674 \times 0.02} = 0.423 \text{ m}$$

Con el valor aproximado de D, se obtiene:

$$R_e = \frac{31\,831}{0.423} = 75\,251$$

asimismo:

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.0000458}{0.423} = 0.0000108$$

Del diagrama de Moody $f = 0.0195$, el diámetro será:

$$D = \sqrt[5]{0.674 \times 0.0195} = 0.42 \text{ m}$$

Es decir, prácticamente el mismo valor que en el caso anterior, el cual corresponde al diámetro definitivo de la tubería.

8.5 Tubos de sección no circular

En el caso de tubos de sección no circular, con esquinas pronunciadas, el esfuerzo cortante en la dirección del flujo es menor en las mismas que a lo largo de las paredes. Lo anterior provoca la formación de corrientes secundarias desde la zona de alto cortante hacia el centro del tubo, mientras ocurre un flujo de circulación hacia las esquinas, con la tendencia a uniformar el cortante en la pared. El estudio fue hecho por Schiller y Nikuradse, mismos que determinaron la ley de fricción y la distribución de velocidades para tubos de sección rectangular, triangular, trapezoidal y circular, esta última con escotadura. Como conclusión a sus estudios encontraron que en estas secciones con poca simetría el factor de fricción podía calcularse, en las tres distintas zonas de escurrimiento, con las fórmulas obtenidas para tubos de sección circular; sólo basta cambiar D (diámetro del tubo circular) por $4\,R_h$, donde R_h representa el radio hidráulico de la sección transversal del tubo.

Sin embargo, en 1963 J. Malaika (Ref. 41) realizó experimentos en tubos de sección no circular, con objeto de encontrar fórmulas para el factor de fricción f. La idea se basó en que un mismo valor del radio hidráulico puede caracterizar a un número ilimitado de geometrías de la sección, por lo que deberían intervenir otros parámetros (de la sección) capaces de tomar en cuenta esta contingencia. Malaika encontró que los errores causados al despreciar los efectos geométricos son, a menudo, más pequeños que los cometidos en la apreciación de la rugosidad del conducto; sin embargo, dichos efectos pueden inducir errores en el factor de fricción hasta de 35 %, dependiendo su magnitud del gasto y de las condiciones de frontera.

Las conclusiones de Malaika fueron las siguientes.

a) Como el diámetro del círculo inscrito en una sección cualquiera es una dimensión lineal más representativa de la sección (para ser usada en los números

de Reynolds y en la rugosidad relativa en el diagrama universal de Moody) es posible utilizar las ecuaciones antes obtenidas si en lugar del diámetro D se usa el diámetro d del círculo inscrito en las secciones (Fig. 8.7).

b) La eficacia hidráulica relativa, de una variedad de formas de secciones transversales de conductos, puede expresarse por la relación adimensional entre el diámetro del círculo inscrito y el radio hidráulico.

En la Fig. 8.7 se muestran cuatro formas distintas de la sección transversal de conductos, incluyendo el diámetro d del círculo inscrito en ellas.

8.6 Fórmulas empíricas de fricción

Antes de que se conocieran las fórmulas de tipo logarítmico, las únicas disponibles para el diseño eran las de tipo exponencial, puramente empíricas, cuyo solo mérito estriba en su sencillez. Sin embargo, fueron y siguen siendo usadas. Para tubos que transportan agua, dichas ecuaciones toman la expresión general:

$$V = a\,D^x\,S_f^y \qquad (8.9a)$$

o bien, con $S_f = h_f/L$ (pendiente de fricción):

$$h_f = \left(\frac{V}{a\,D^x}\right)^{1/y} L = \left[\frac{4\,Q}{\pi\,a\,D^{(x+2)}}\right]^{1/y} L \qquad (8.9b)$$

donde el coeficiente a y los exponentes x, y son empíricos. La expresión no es adimensional, por lo que se debe tener cuidado en la conversión de unidades.

Es conveniente investigar la relación entre el factor de fricción f y los términos anteriores. Para ello, si se iguala la ecuación (8.2a) de Darcy-Weisbach con la (8.9b) y se despeja a f resulta:

$$f = 2g\,\frac{D^{(1-x/y)}}{a^{1/y}\,V^{(2-1/y)}} \qquad (8.10)$$

Dado que a normalmente varía con la rugosidad y la viscosidad, tiene por ello las mismas características que f.

Cuando las fórmulas exponenciales se representan gráficamente en el diagrama estándar $f - R_e$, aparecen como líneas rectas con diferentes pendientes. Debido a que la verdadera forma de la ecuación del factor de fricción es del tipo logarítmico, de concavidad hacia arriba (excepto en tubos rugosos en la zona turbulenta), la fórmula exponencial es aproximadamente válida únicamente en un intervalo limitado. En sus extremos, la línea recta queda debajo de la curva, con la que resulta una subestimación de la pérdida por fricción; por lo tanto, es importante tener cuidado con el intervalo en el cual se puede aplicar cada fórmula exponencial, dado que cualquier intento de extrapolación puede conducir a serios errores. Normalmente, la desviación máxima no excede de un 3 %, lo cual está dentro de los límites de seguridad en la estimación de

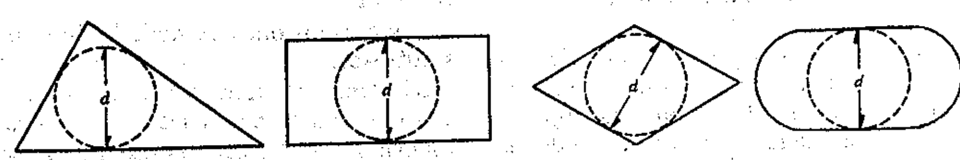


Figura 8.7. Círculo inscrito en las formas geométricas de secciones en tubos.

TABLA 8.3. Resumen de las fórmulas para el cálculo de pérdidas por fricción, aplicables al flujo de agua en conductos a presión. Las unidades se expresan en sistema MKS

Tipo de tubería y flujo	*Autor*	*Fórmula*	*Observaciones*
Cualquier tipo de tubo y flujo.	Darcy-Weisbach	$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$	Es la Ec. (8.2) y es de tipo universal; f se obtiene del diagrama universal de Moody, o de alguna de las fórmulas indicadas a continuación.
Tubos lisos o rugosos en la zona laminar.	Poiseuille	$f = \frac{64}{R_e}$	Es la Ec. (8.3) y se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach y vale para $R_e < 2\,300$.
Tubos lisos en la zona de transición o turbulenta.	Blasius	$f = \frac{0.3164}{R_e^{0.25}}$	Es la Ec. (8.4) y se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach. Vale para tubos de aluminio, latón, cobre, plomo, plástico, vidrio y asbesto-cemento para $R_e > 10^5$.
	Nikuradse	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log\left(\frac{R_e\sqrt{f}}{2.51}\right)$	Es la Ec. (8.5b) y se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach. Vale para $2.3 \times 10^4 \leq R_e \leq 3.4 \times 10^6$.
	Kozeny (Ref. 9)	$f = \frac{2g}{(7.78\log R_e - 5.95)^2}$	Se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach y vale para tubos de asbesto-cemento y para $R_e > 4\,000$.
	Richter (Ref. 43)	$f = 0.01113 + 0.917/R_e^{0.41}$	Se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach y vale para tubos de hule y para $R_e > 4\,000$.
	Ludin (Ref. 42)	$V = 140\,R_h^{0.645}\,S_f^{5/9}$	Equivale a usar la Ec. (8.9b) con $a = 57.37$, $x = 0.645$, $y = 5/9$. Vale para tubos de asbesto-cemento. En esta fórmula R_h es el radio hidráulico del tubo.

TABLA 8.3 (*Continuación*)

Tubos rugosos en la zona de transición o turbulenta.	Colebrook-White	$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3.71} + \frac{2.51}{R_e \sqrt{f}} \right)$	Es la Ec. (8.7) y vale para tubos lisos o rugosos en la zona de transición o turbulenta y con $R_e > 4\,000$. Se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach.
	Hazen-Williams (Ref. 44)	$V = 0.355\, C_H\, D^{0.63}\, S_f^{0.54}$	Equivale a usar la Ec. (8.9a) con $a = 0.355\, C_H$; $x = 0.63$, $y = 0.54$. Es la fórmula más común para tubos rugosos. C_H depende del material del tubo de acuerdo con la tabla 8.4.
Tubos rugosos en la zona turbulenta.	Nikuradse	$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3.71\, D}{\varepsilon}$	Es la Ec. (8.6b) y se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach.
	Kozeny (Ref. 9)	$f = \frac{2g}{(8.86 \log D + N)^2}$	Se aplica a la fórmula de Darcy-Weisbach. N depende del material en la tubería según la tabla 8.4.
	Chezy	$V = C \sqrt{R_h S_f}$	Es la fórmula general para este tipo de tubos y se obtiene de la fórmula de Darcy-Weisbach haciendo $D = 4 R_h$. Equivale a usar la Ec. (8.9a) con $a = 0.5\, C$; $x = y = 0.5$. C es un coeficiente que se obtiene de las fórmulas de Bazin, Kutter o Manning.
	Bazin (Ref. 31)	$C = \frac{87}{1 + \Delta/\sqrt{R_h}}$	Se aplica a la fórmula de Chezy, donde Δ depende del material de que está construido el tubo de acuerdo con la tabla 8.4.
	Kutter (Ref. 45)	$C = \frac{100 \sqrt{R_h}}{m + \sqrt{R_h}}$	Se aplica a la fórmula de Chezy, donde m depende del material de que está construido el tubo de acuerdo con la tabla 8.4.
	Manning (Ref. 42)	$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S_f^{1/2}$	Resulta de la fórmula de Chezy al considerar que $C = R_h^{1/6}/n$. Equivale a usar la Ec. (8.9a) con $a = 0.397/n$, $x = 2/3$, $y = 1/2$. n depende del material de que está construido el tubo de acuerdo con la tabla 8.4.

TABLA 8.4 Valores de C_H, Δ, m, n y N aplicables a las fórmulas de la tabla 8.3 de acuerdo con el material de que está construido el tubo

Material	C_H	Δ	m	n	N
Acero corrugado	60	—	—	—	—
Acero con juntas *lock-bar* (nuevo).	135	—	—	—	—
Acero galvanizado (nuevo y usado).	125	—	—	0.014	—
Acero remachado (nuevo).	110	—	—	0.015 a 0.016	31
Acero remachado (usado).	85	—	—	—	28 a 26
Acero soldado o con remache avellanado y embutido (nuevo).	120	—	—	0.012 a 0.013	34
Acero soldado o con remache avellanado y embutido (usado).	90	—	—	—	31 a 27
Acero sin costura (nuevo).	—	0.10	0.25	—	38
Acero sin costura (usado).	—	—	0.35	—	36
Acero soldado, con revestimiento especial (nuevo y usado).	130	—	—	—	—
Fierro fundido limpio (nuevo).	130	0.16	0.25	0.013	35
Fierro fundido, sin incrustaciones (usado).	110	0.23	0.275	—	—
Fierro fundido, con incrustaciones (viejo).	90	0.36	0.35	—	30
Plástico.	150	—	—	—	—
Asbesto-cemento (nuevo).	135	0.06	—	—	—
Cobre y latón.	130	—	—	—	—
Conductos con acabado interior de cemento pulido.	100	—	0.10	—	—
Concreto, acabado liso.	130	—	0.20	—	38
Concreto, acabado común.	120	0.18	—	—	—
Concreto monolítico, colado con cimbras deslizantes ($D > 1.25$ m).	—	—	—	0.010 a 0.011	—
Concreto monolítico bien cimbrado y pulido ($D > 1.25$ m).	—	—	—	0.011 a 0.0123	—
Concreto monolítico bien cimbrado y sin pulir ($D > 1.25$ m).	—	—	—	0.014 a 0.015	—
Concreto con acabado tosco ($D > 1.25$ m).	—	—	—	0.015 a 0.017	27 a 26
Concreto con juntas de macho y campana ($D > 0.8$ m).	—	—	—	0.0105 a 0.012	—
Concreto con juntas toscas ($D > 0.5$ m).	—	—	—	0.0125 a 0.014	30
Concreto con juntas toscas ($D < 0.5$ m).	—	—	—	0.014 a 0.017	—
Conductos para alcantarillado.	—	—	—	—	28
Tubos de barro vitrificado (drenes).	110	—	—	0.011	34
Túneles perforados en roca sin revestimiento.	—	—	—	0.025 a 0.040	—
Madera cepillada o en duelas.	120	—	0.10	0.0105 a 0.012	—

la rugosidad. En la tabla 8.3 se presenta un resumen de las principales fórmulas experimentales para el cálculo de la pérdida por fricción en tuberías.

Problema 8.7. Un tubo de acero transporta 0.152 m^3/seg de agua. Si $S_f = 0.0025$, determinar el diámetro del tubo reque rido de acuerdo con las fórmulas de: *a)* Colebrook-White ($\varepsilon = 0.3$ mm); *b)* Hazen-Williams ($C_H = 135$); *c)* Manning ($n = 0.01$). Suponer $\nu = 0.0114$ cm²/seg.

Solución a). En cualquier caso la velocidad vale:

$$V = \frac{4\,Q}{\pi\,D^2} = \frac{0.194}{D^2}$$

Substituyendo en la fórmula de Colebrook-White, resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log\left(\frac{14.75 \times 10^{-6} \times D}{\sqrt{f}} + \right.$$
$$\left. + \frac{80.9 \times 10^{-6}}{D}\right) \qquad (a)$$

De la fórmula de Darcy-Weisbach (Ec. 8.2 b) se obtiene:

$$0.0025 = \frac{f}{19.61\,D}\left(\frac{0.194}{D^2}\right)^2$$

de tal manera que: $\sqrt{f} = D^{2.5}/0.877$, y substituida en la Ec. (*a*) resulta:

$$\frac{0.877}{D^{2.5}} = -2\log\left(\frac{12.94 \times 10^{-6}}{D^{1.5}} + \right.$$
$$\left. + \frac{80.9 \times 10^{-6}}{D}\right)$$

Por un procedimiento de iteraciones resulta $D = 0.425$ m.

Solución b). Substituyendo en la fórmula de Hazen-Williams (tabla 8.3), tenemos:

$$\frac{0.194}{D^2} = 0.355 \times 135\,(0.0025)^{0.54}\,D^{0.63}$$

de la cual, $D = 0.420$ m.

Solución c). Substituyendo en la fórmula de Manning (tabla 8.3):

$$\frac{0.194}{D^2} = \frac{0.397\,D^{2/3}\,(0.0025)^{1/2}}{0.01}$$

de la cual, $D = 0.417$ m.

En la práctica, un diámetro comercial de 457 mm sería apropiado para todos los valores de D que han sido obtenidos. Para $D = 0.425$ m, $V = 1.07$ m/seg y $R_e = 4 \times 10^5$; del diagrama universal de Moody: $f = 0.0182$. Esto indica que el tubo opera en la zona de transición.

8.7 Pérdidas locales

8.7.1 Fórmula general

Las tuberías de conducción que se utilizan en la práctica están compuestas, generalmente, por tramos rectos y curvos para ajustarse a los accidentes topográficos del terreno, así como a los cambios que se presentan en la geometría de la sección y de los distintos dispositivos para el control de las descargas (válvulas y compuertas). Estos cambios originan pérdidas de energía, distintas a las de fricción, localizadas en el sitio mismo del cambio de geometría o de la alteración del flujo. Tal tipo de pérdida se conoce como *pérdida local*. Su magnitud se expresa como una fracción de la carga de velocidad, inmediatamente aguas abajo

del sitio donde se produjo la pérdida; la fórmula general de pérdida local es:

$$h = K\frac{V^2}{2\,g} \qquad (8.11)$$

donde

- h pérdida de energía, en m;
- K coeficiente sin dimensiones que depende del tipo de pérdida que se trate, del número de Reynolds y de la rugosidad del tubo;
- $V^2/2\,g$ la carga de velocidad, aguas abajo, de la zona de alteración del flujo (salvo aclaración en contrario) en m.

En los siguientes incisos se presentan los valores del coeficiente K, de acuerdo con el tipo de perturbación.

8.7.2 Pérdida por entrada

A la entrada de las tuberías se produce una pérdida por el efecto de contracción que sufre la vena líquida y la formación de zonas de separación; el coeficiente K depende, principalmente, de la brusquedad con que se efectúa la contracción del chorro. En la Fig. 8.8 se muestran algunos valores tomados de las Refs. 1 y 6.

La entrada elíptica (Fig. 8.8 h) es la que produce el mínimo de pérdidas. Si el tubo es de sección circular la ecuación de la elipse de entrada es (Ref. 37), (ver también subcapítulo 6.10

$$\frac{x^2}{(0.5\,D)^2} + \frac{y^2}{(0.15\,D)^2} = 1 \qquad (8.12)$$

Si es de sección rectangular la ecuación resulta ser:

$$\frac{x^2}{H^2} + \frac{y^2}{(0.33\,H)^2} = 1 \qquad (8.13)$$

donde H es la dimensión vertical del conducto, para definir la forma del perfil superior e inferior o la dimensión horizontal para la forma de las entradas laterales.

8.7.3 Pérdida por rejilla

Con objeto de impedir la entrada de cuerpos sólidos a las tuberías, suelen utilizarse estructuras de rejillas formadas por un sistema de barras o soleras verticales, regularmente espaciadas, que se apoyan sobre miembros estructurales; dichas rejillas obstaculizan el flujo y producen una pérdida de energía. Cuando están parcialmente sumergidas y sobresalen del nivel de la superficie del agua, el coeficiente K puede calcularse con la fórmula de Kirschmer que está de acuerdo con las experiencias de Fellenius y Spangler, además de ser válida para el flujo normal al plano de rejillas:

$$K = C_f\,(s/b)^{4/3}\,\text{sen}\,\theta \qquad (8.14)$$

donde C_f es un coeficiente que depende de la forma de la reja; V, en la Ec. 8.11, es la velocidad V_o frente a las rejas como si éstas no existieran.

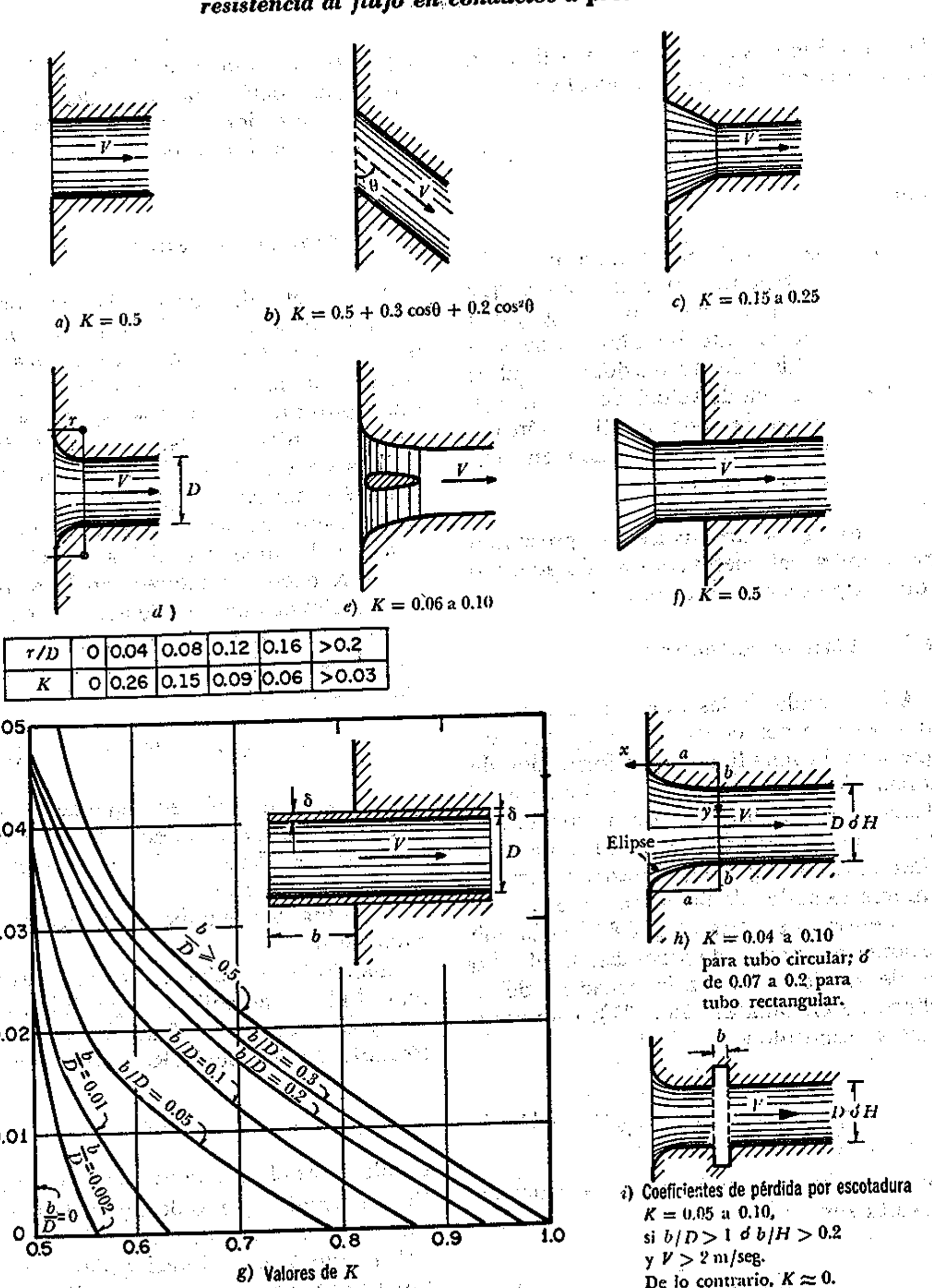
En la Fig. 8.9 se indica el significado de cada término.

Cuando la dirección del flujo no es normal al plano de rejillas, la pérdida es mayor y el coeficiente K se calcula con la fórmula de Mosonyi (Ref. 46), a saber:

$$K = K_*\,\beta \qquad (8.15)$$

donde K_* es el coeficiente de pérdida para flujo normal al plano de reja y β otro coeficiente que depende del cociente s/b y del ángulo δ de inclinación del flujo, cuyos valores se presentan en la Fig. 8.10.

Como se desconoce el grado de aplica-



r/D	0	0.04	0.08	0.12	0.16	>0.2
K	0	0.26	0.15	0.09	0.06	>0.03

Figura 8.8. Coeficientes de pérdida —por entrada— para diferentes formas.

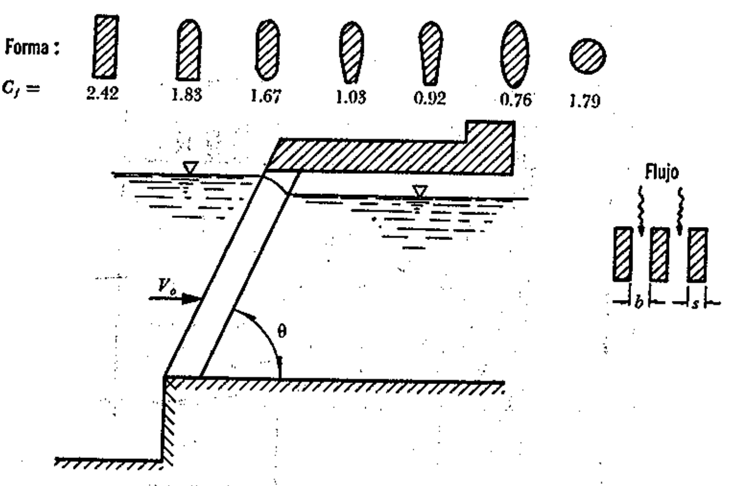


Figura 8.9. Coeficientes C_f aplicables a la fórmula de Kirschmer de acuerdo con la forma de las barras.

ción de las fórmulas anteriores a rejillas completamente sumergidas, se puede obtener una aproximación media con la fórmula de Creager (Ref. 37), siguiente:

$$K = 1.45 - 0.45\,(A_n/A_b) - (A_n/A_b)^2 \tag{8.16}$$

donde:

A_n área neta de paso entre rejillas;

A_b área bruta de la estructura de rejillas.

Debe aclararse que, al aplicar la Ec. (8.16) en la Ec. (8.11), V es la velocidad neta a través de las rejillas.

8.7.4 Pérdida por ampliación

Esta se origina al producirse una ampliación de la sección transversal del tubo. El coeficiente K depende de la brusquedad de la ampliación y para encontrarlo se usa la fórmula de Borda-Carnot (Ec. 4.45b):

$$K = C_a\left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \tag{8.17}$$

donde C_a depende del ángulo θ del difusor, como se muestra en la Fig. 8.11, la cual incluye los resultados de Gibson. Para ampliaciones bruscas se usa la misma fórmula con $C_a = 1$.

La pérdida mínima de energía se obtiene para ángulos de difusión $\theta = 8°$; para $\theta \geq 50°$ una ampliación brusca es tan confiable como la gradual.

A fin de evitar separaciones y cavitaciones, el ángulo θ del difusor debe ser

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{g\,D}}{2\,V} \quad \text{para } \theta < 20°$$

donde:

$$D = (D_1 + D_2)/2\,;\quad V = (V_1 + V_2)/2.$$

Según Hutarew (Ref. 3) el ángulo θ óptimo depende del número de Reynolds (Fig. 8.12). Para calcular θ en transiciones con

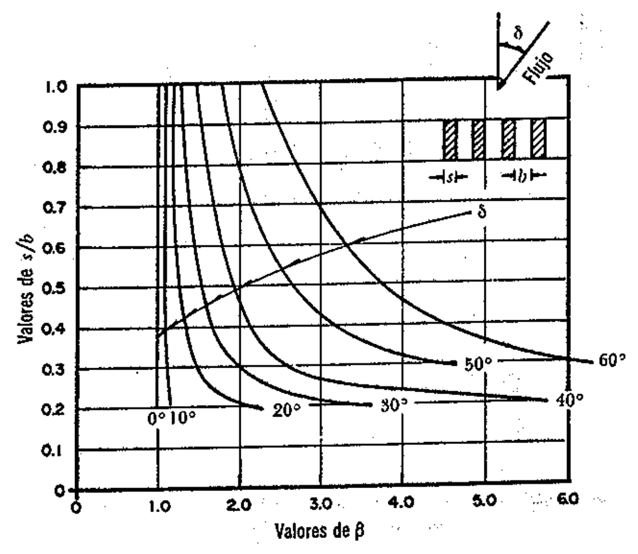


Figura 8.10. Valores de β para flujo inclinado, según Mosonyi.

sección distinta de la circular, se usa el criterio del cono equivalente, es decir, un cono truncado o limitado por áreas circulares, de la misma magnitud que las reales, en los extremos de la transición.

8.7.5 Pérdida por reducción

En este caso se produce un fenómeno de contracción semejante al de entrada a la tubería, el cual también conviene que sea gradual. Si bien en este caso la pérdida es inferior a la de la ampliación, dependiendo de la brusquedad con que se efectúa la contracción, el coeficiente de pérdida está supeditado al ángulo θ al cual ésta se produzca, de acuerdo con la tabla 8.5 de Kisieliev (Ref. 6).

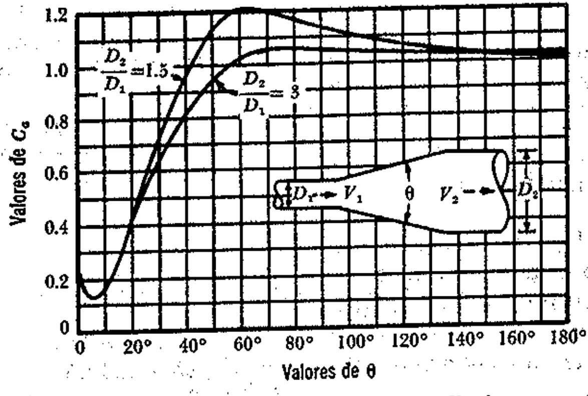


Figura 8.11. Coeficientes de pérdida para ampliaciones graduales.



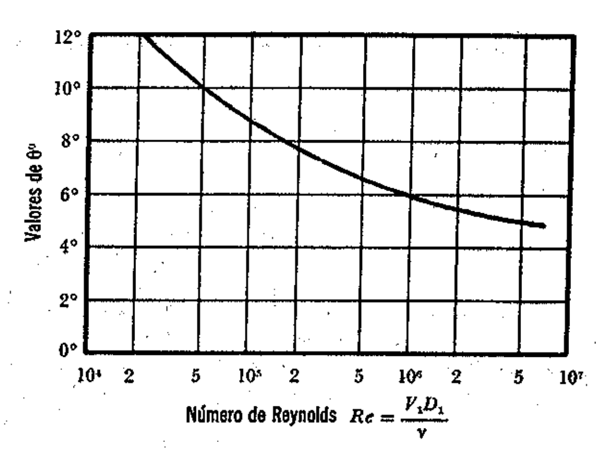


Figura 8.12. Ángulo óptimo del difusor, en función del número de Reynolds.

TABLA 8.5. Coeficiente de pérdida por reducción gradual de ángulo θ, según Kisieliev

θ	4 a 5°	7°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	60°	75°	80°
K	0.060 0.005	0.16	0.16	0.18	0.20	0.22	0.24	0.26	0.28	0.30	0.32	0.34	0.35

Con objeto de evitar pérdidas grandes, el ángulo de reducción no debe exceder de un valor especificado (Fig. 8.13).

Dicho ángulo vale:

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{g D}{V}}$$

en que

$$D = \frac{D_1 + D_2}{2}; \quad V = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

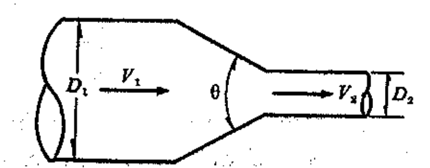


Figura 8.13. Reducción gradual.

y en este caso, $K_r = 0.1$.

Si la contracción es brusca se usan los coeficientes de Weisbach, mostrados en la Fig. 8.14, en la que aparece también la curva de Kisieliev (Ref. 6), la cual pretende dar los valores medios de todos los autores que han estudiado el problema. En el caso de tubos de pequeño diámetro, un cople reductor tiene un coeficiente de pérdida K que varía de 0.05 a 2; y para un cople que una dos tubos del mismo diámetro, K varía de 0.35 a 0.9 para diámetros variando de 100 mm a 25 mm, respectivamente.

Cuando la contracción brusca contenga un diafragma como el que aparece en la Fig. 8.15, el coeficiente de pérdida vale (Ref. 43):

$$K = \left(\frac{A_2}{\mu A_0} - 1\right)^2 + 0.04\left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2 \qquad (8.18)$$

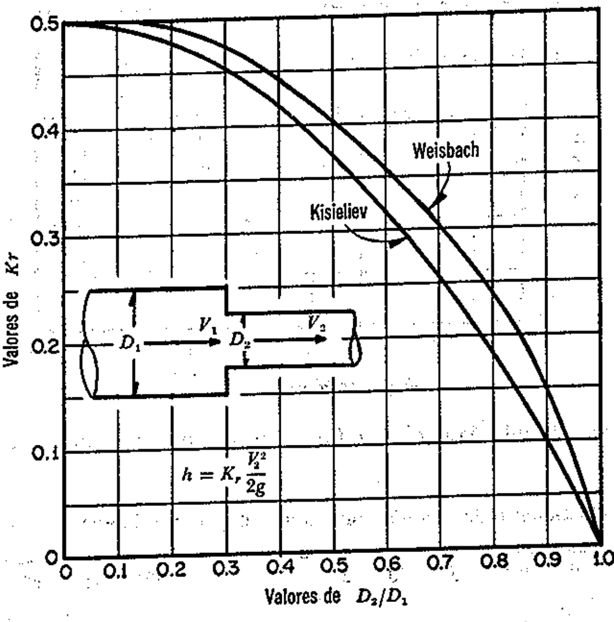


Figura 8.14. Pérdida de energía en una contracción brusca.

Siendo la pérdida $h = K V_2^2/2g$.

Si $A_0 < 0.1 A_1$ y el diafragma tiene cantos afilados, los valores de μ y K de la Ec. 8.18 se muestran en la tabla 8.6 (Ref. 43):

TABLA 8.6. Coeficientes μ y K para el cálculo de la pérdida en una contracción brusca con diafragma, para $A_0 < 0.1 A_1$

A_0/A_2	μ	K
0.1	0.616	231.7
0.2	0.614	51
0.3	0.612	19.78
0.4	0.610	9.61
0.5	0.607	5.26
0.6	0.605	3.08
0.7	0.603	1.88
0.8	0.601	1.17
0.9	0.598	0.73
1	0.596	0.48

Si $A_0 \geqq 0.1 A_1$ y el diafragma tiene cantos afilados, los valores de μ de la Ec. 8.18 se presentan en la tabla 8.7 (Ref. 43).

TABLA 8.7. Coeficiente μ para el cálculo de la pérdida en una contracción brusca con diagrama, para A_0 V 0.1 A_1

A_0/A_1	μ
0.1	0.63
0.2	0.64
0.3	0.65
0.4	0.67
0.5	0.69
0.6	0.72
0.7	0.77
0.8	0.85
0.9	0.92
1	1

Si $A_1 = A_2$ y el diafragma tiene cantos afilados ($A_0/A_1 = A_0/A_2 > 0.1$), los valores de μ y K se presentan en la tabla 8.8 (Ref. 43):



TABLA 8.8. Coeficientes de μ y K para un diafragma en un tubo de diámetro constante

A_0/A_1	μ	K
0.05	—	1 070
0.1	0.624	226
0.2	0.632	47.8
0.3	0.643	17.5
0.4	0.659	7.8
0.5	0.681	3.76
0.6	0.712	1.79
0.7	0.755	0.80
0.8	0.813	0.29
0.9	0.892	0.09
1.0	1.0	0

Si A_1 es muy grande, $\mu \approx 0.60$; según Weisbach (Ref. 9) los valores de K se presentan en la tabla 8.9 y siguen la ecuación

$$K = \left(\frac{A_2}{\mu A_0} - 1\right)^2$$

TABLA 8.9. Coeficiente de pérdida para un diafragma a la entrada de un tubo

A_2/A_0	K
1	0.44
1.25	1.17
1.5	2.25
2	5.44
3	16
5	53.7
10	245.5

8.7.6 Pérdida por cambio de dirección

Si se visualiza el flujo en un cambio de dirección, se observa que los filetes tienden a conservar su movimiento rectilíneo en razón de su inercia. Esto modifica la distribución de velocidades y produce zonas de separación en el lado interior y aumentos de presión en el exterior, con

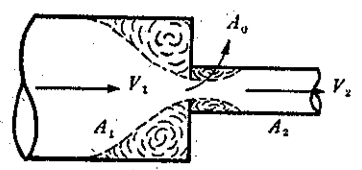


Figura 8.15. Reducción con diafragma.

un movimiento espiral que persiste en una distancia de 50 veces el diámetro. Si el cambio de dirección es gradual con una curva circular de radio medio R y rugosidad absoluta ε, para obtener el coeficiente de pérdida K se usa la gráfica de Hoffman (Fig. 8.16a) que, además, toma en cuenta la fricción en la curva (Ref. 47), donde

$$K = C_c \frac{\theta°}{90°} \tag{8.19}$$

Si el tubo es liso se usa la gráfica (de la Fig. 8.16b) de Wasielìewski (Ref. 47).

Para curvas en ductos rectangulares, se emplea la fórmula de Abramobich (Ref. 6), a saber:

$$K = 0.73\, C\, D\, E \tag{8.20}$$

donde C, D y E son coeficientes que se obtienen de las Figs. 8.17

Los coeficientes de las Figs. 8.16 b son válidos para curvas en tubos de gran diámetro. Si se trata de curvas en tubos de menor diámetro, se usan los resultados de la Fig. 8.18 (Ref. 47) de acuerdo con el diámetro nominal del tubo.

Si el cambio de dirección es brusco, el coeficiente de pérdida depende del número de Reynolds —como se muestra en la Fig. 8.19 (Ref. 47)—, de Kirchbach y Schubart, para diferentes ángulos. Si el cambio de dirección es a base de pequeños tramos rectos, los coeficientes de pérdida se obtienen de la Fig. 8.20 (Ref. 47)

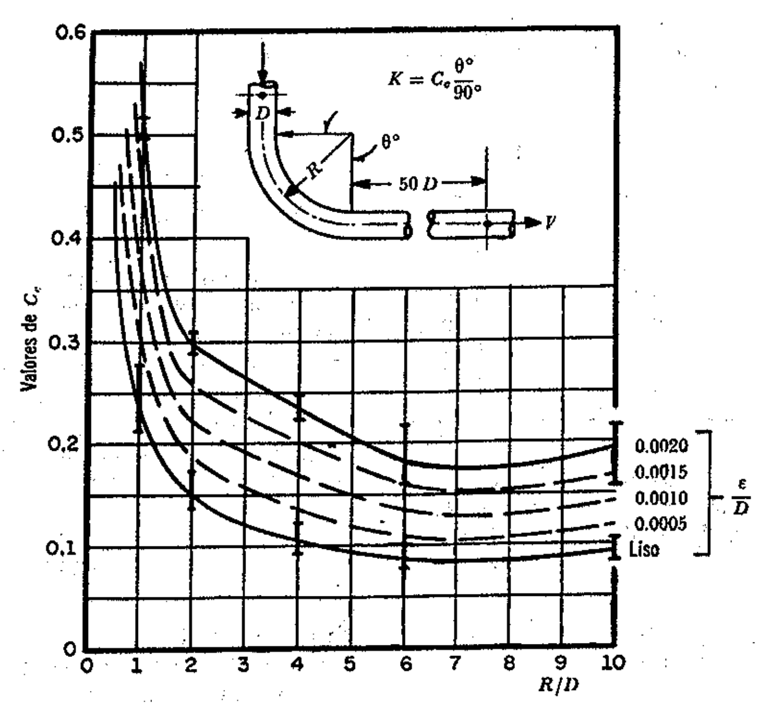


Figura 8.16a. Coeficientes C_c para curvas de diámetro constante y $R_e > 2.2 \times 10^5$, en tubos rugosos.

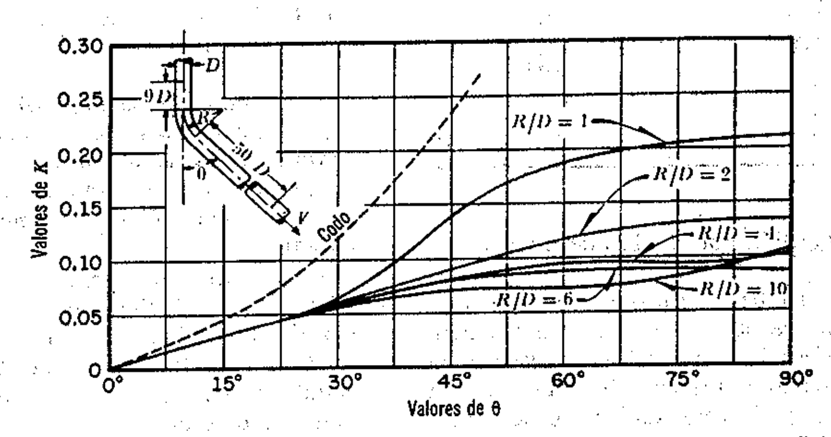
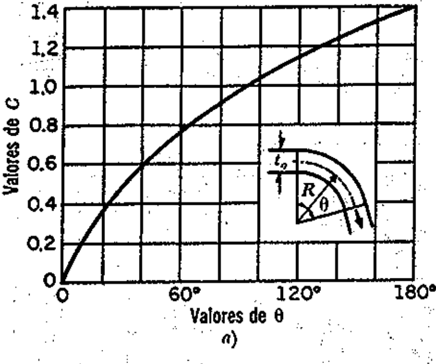
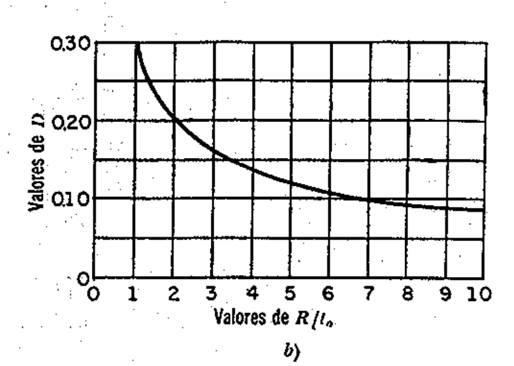


Figura 8.16b. Coeficientes de pérdida en curvas de diámetro constante con superficie lisa y número de Reynolds de 2.25×10^5.







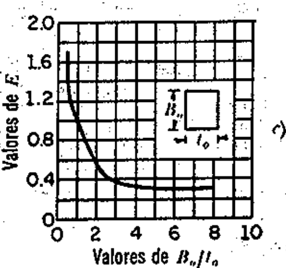


Figura 8.17. Coeficientes *C, D* y *E*, para el cálculo de la pérdida, en una curva de un tubo de sección rectangular.

que contiene los resultados, de diferentes investigadores, para tubos lisos y rugosos.

8.7.7 Pérdida por válvulas

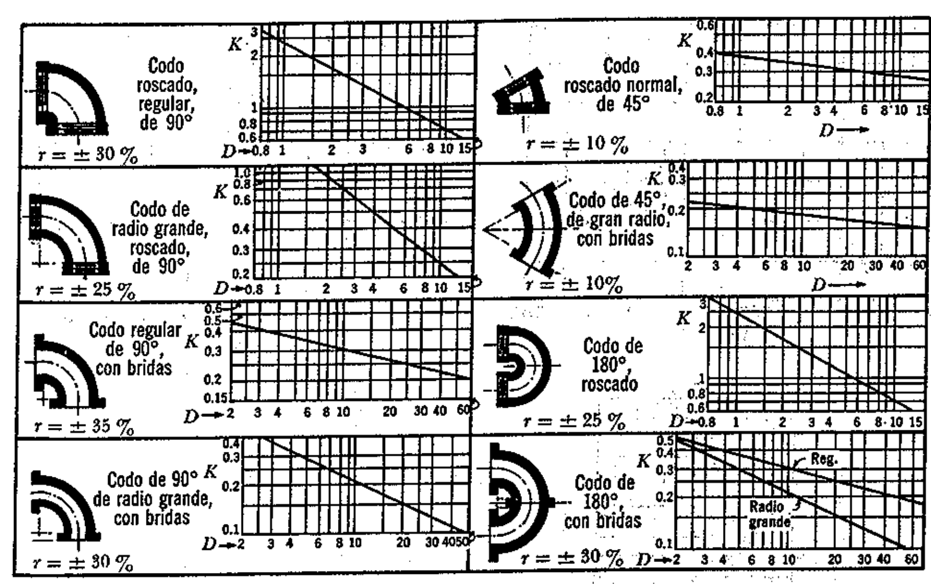
Los coeficientes de pérdida por válvulas varían de acuerdo con el tipo y, para distintas posiciones, deben ser proporcionados por los fabricantes. A falta de estos datos, se pueden utilizar los valores medios que a continuación se indican.

TABLA 8.10. Coeficientes de pérdida para válvulas de compuerta de diámetro $D = 50$ mm.

c	K	A/A_0
1/8	0.07	0.949
2/8	0.26	0.856
3/8	0.81	0.74
4/8	2.06	0.609
5/8	5.52	0.466
6/8	17	0.315
7/8	97.8	0.159
31/32	159	—

TABLA 8.11. Coeficientes de pérdida para válvulas de compuerta.

D mm		25	100	150	300	900
Valores de c	0.95	—	—	850	680	—
	0.9	—	—	215	165	—
	0.8	—	—	47	35	28
	0.75	32	16	—	—	—
	0.7	—	—	16	12	9
	0.6	—	—	7	5.5	4
	0.5	4.1	2.6	3.3	2.7	1.8
	0.4	—	—	1.7	1.3	—
	0.3	—	—	1.05	0.65	—
	0.25	0.23	0.14	—	—	—
	0.2	—	—	0.68	0.29	—
	0	0.23	0.14	—	—	—



Nota: El diámetro D corresponde al nominal y se mide en centímetros, r es el intervalo aproximado de variación para K.

Figura 8.18. Coeficientes de pérdida para los codos.

Para válvulas de compuerta (Fig. 8.21), los coeficientes de pérdida, así como la relación del área abierta, al área total del conducto, varía de acuerdo con la tabla 8.10, válida para $D = 50$ mm (Ref. 45.)

TABLA 8.12. Coeficientes de pérdida para válvulas esféricas

θ°	K	A/A_0
5	0.05	0.926
10	0.29	0.85
15	0.75	0.772
20	1.56	0.692
25	3.10	0.613
30	5.17	0.535
35	9.68	0.458
40	17.3	0.385
45	31.2	0.315
50	52.6	0.25
55	106	0.19
60	206	0.137
65	486	0.091
82	∞	0

TABLA 8.13. Coeficientes de pérdida para válvulas de lenteja

θ°	K	A/A_0
5	0.24	0.913
10	0.52	0.826
15	0.90	0.741
20	1.54	0.658
25	2.51	0.577
30	3.91	0.500
35	6.22	0.426
40	10.8	0.357
45	18.7	0.293
50	32.6	0.234
55	58.8	0.181
60	118	0.124
65	256	0.094
70	751	0.06
90	∞	0

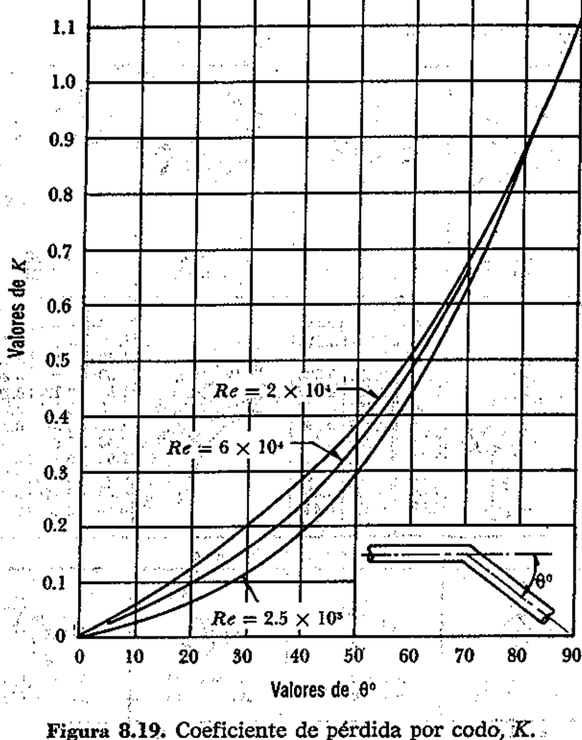
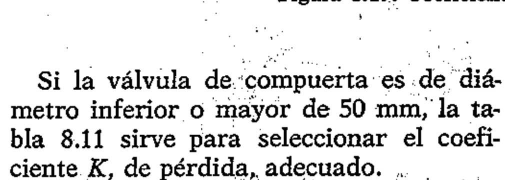


Figura 8.19. Coeficiente de pérdida por codo, K.



Si la válvula de compuerta es de diámetro inferior o mayor de 50 mm, la tabla 8.11 sirve para seleccionar el coeficiente K, de pérdida, adecuado.

Los coeficientes de pérdida, para válvulas esféricas (Fig. 8.22), dependen del ángulo de abertura θ, como se indica en la tabla 8.12.

Para válvulas de mariposa o de lenteja (Fig. 8.23), K se obtiene de la tabla 8.13.

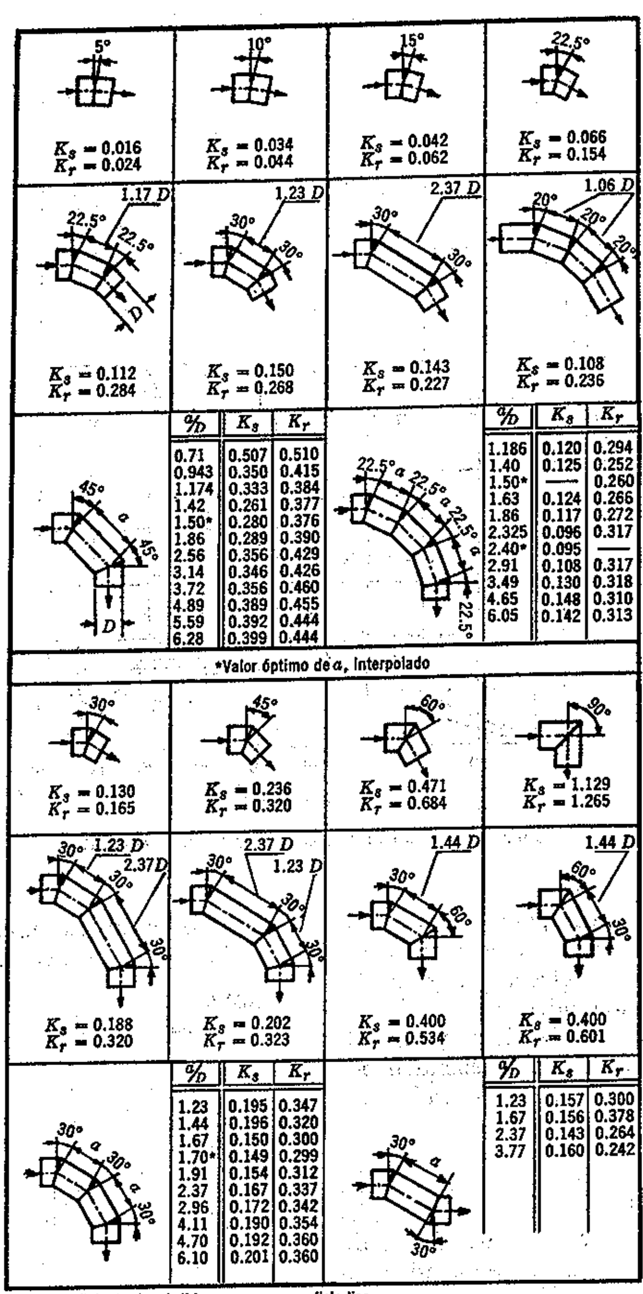
Si la válvula de mariposa está completamente abierta, el coeficiente de pérdida se obtiene de la siguiente fórmula (Ref. 6):

$$K = t/d = \frac{\text{espesor de la hoja}}{\text{diámetro}} \quad (8.21)$$

Cuando se utilice una compuerta radial (Fig. 8.24) para controlar la descarga

TABLA 8.14. Coeficientes de pérdida para compuertas radiales en una tubería

ϕ/ϕ_0	b/W	K
0.10	0.07	128
0.2	0.15	30.2
0.3	0.24	12.2
0.4	0.34	6.03
0.5	0.43	3.23
0.6	0.54	1.79
0.7	0.65	0.99
0.8	0.77	0.56
0.9	0.88	0.36
0.95	0.94	0.31
1.00	1.00	0.30



a/D	K_s	K_r
0.71	0.507	0.510
0.943	0.350	0.415
1.174	0.333	0.384
1.42	0.261	0.377
1.50*	0.280	0.376
1.86	0.289	0.390
2.56	0.356	0.429
3.14	0.346	0.426
3.72	0.356	0.460
4.89	0.389	0.455
5.59	0.392	0.444
6.28	0.399	0.444

a/D	K_s	K_r
1.186	0.120	0.294
1.40	0.125	0.252
1.50*	—	0.260
1.63	0.124	0.266
1.86	0.117	0.272
2.325	0.096	0.317
2.40*	0.095	—
2.91	0.108	0.317
3.49	0.130	0.318
4.65	0.148	0.310
6.05	0.142	0.313

*Valor óptimo de a, Interpolado

a/D	K_s	K_r
1.23	0.195	0.347
1.44	0.196	0.320
1.67	0.150	0.300
1.70*	0.149	0.299
1.91	0.154	0.312
2.37	0.167	0.337
2.96	0.172	0.342
4.11	0.190	0.354
4.70	0.192	0.360
6.10	0.201	0.360

a/D	K_s	K_r
1.23	0.157	0.300
1.67	0.156	0.378
2.37	0.143	0.264
3.77	0.160	0.242

K_s = Coeficiente de pérdida para una superficie lisa.
K_r = Coeficiente de pérdida para una superficie rugosa, $\frac{\epsilon}{D} = 0.0022$.

Figura 8.20. Coeficiente de pérdida para curvas compuestas y número de Reynolds de 2.25×10^5.

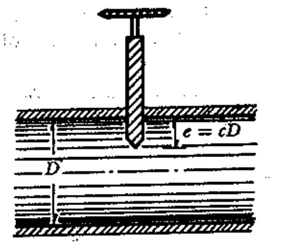


Figura 8.21. Válvula de compuerta.

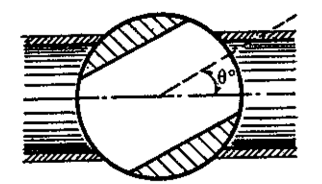


Figura 8.22. Válvula esférica.

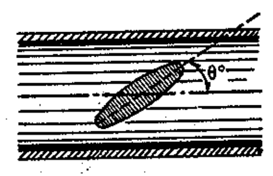


Figura 8.23. Válvula de lenteja o mariposa

en una conducción a presión, el coeficiente de pérdida, según Abeljew (Ref. 7), depende de ϕ/ϕ_0, o bien de b/w, de acuerdo con la tabla 8.14.

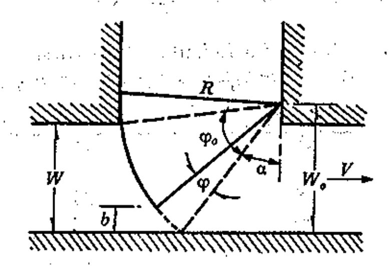
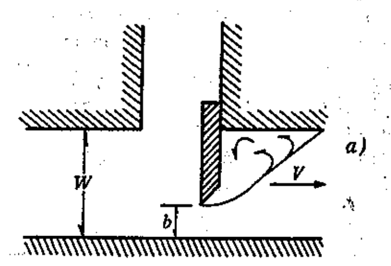


Figura 8.24. Compuerta radial en una tubería.

Si se utilizan compuertas deslizantes, como la mostrada en la Fig. 8.25a, el coeficiente de pérdida depende no sólo de la relación de abertura b/W, sino también de la forma del labio inferior de la compuerta (Fig. 8.25b). El coeficiente de pérdida se obtiene de la tabla 8.15.

TABLA 8.15. Coeficientes de pérdida para compuertas deslizantes en una tubería.

b/W	K canto afilado	K canto redondo
0.1	186.5	—
0.2	44.1	23.2
0.3	17.8	10.8
0.4	8.68	4.95
0.5	4.57	2.7
0.6	2.43	1.48
0.7	1.31	0.96
0.8	0.68	0.58
0.9	0.38	0.36
1	0.3	0.24



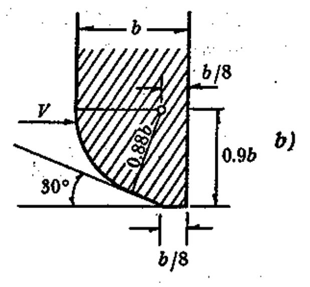


Figura 8.25. Compuertas deslizantes en una tubería.

Para válvulas de pie (Fig. 8.26) con pichancha, completamente abierta, el coeficiente de pérdida depende del diámetro (referencia 48), como se indica en la tabla 8.16.

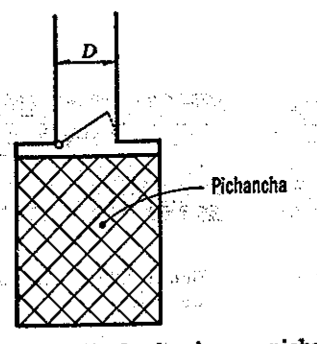


Figura 8.26. Válvula de pie con pichancha abierta.

TABLA 8.16. Coeficientes de pérdida para válvulas de pie abierta con pichancha

D, en m	K	D, en m	K
0.040	12.9	0.20	5.2
0.050	10.0	0.25	4.4
0.065	8.8	0.30	3.7
0.080	8.0	0.35	3.4
0.100	7.0	0.40	3.1
0.125	6.5	0.45	2.8
0.150	6.0	0.50	2.5

Para calcular la pérdida, exclusivamente, en la *pichancha,* el coeficiente vale (Ref. 21):

$$K = (0.675 \text{ a } 1.575)\left(\frac{A}{A_0}\right)^2 \quad (8.22)$$

donde

A área del tubo;
A_0 área neta (únicamente las perforaciones de la pichancha).

Para una válvula *check* o de retención (Fig. 8.27), completamente abierta, el coeficiente de pérdida depende del diámetro (Ref. 48) como se indica en la tabla 8.17.

TABLA 8.17. Coeficientes de pérdida para válvulas de retención completamente abiertas

D en m	K
0.05	18
0.075	11
0.10	8
0.15	6.5
0.2	5.5
0.25	4.5
0.3	3.5
0.35	3
0.4	2.5
0.5	0.8

Si la válvula de retención está, parcialmente, abierta entonces K es como se indica en la tabla 8.18 (Ref. 30).

TABLA 8.18. Coeficientes de pérdida para válvulas de retención parcialmente abiertas

δ°	K
15	90
20	62
25	42
30	30
35	20
40	14
45	9.5
50	6.6
55	4.6
60	3.2
65	2.3
70	1.7

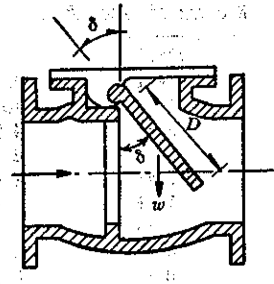


Figura 8.27. Válvula de retención.

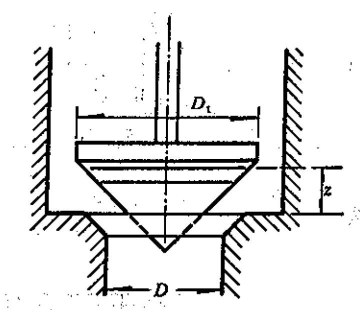


Figura 8.28. Válvula de alivio de forma cónica.

Para válvulas de alivio (Fig. 8.28) resulta conveniente emplear la fórmula (Ref. 30) siguiente:

$$K = 2.6 - 0.8\frac{D}{z} + 0.14\left(\frac{D}{z}\right)^2 \quad (8.23)$$

Si la válvula es semejante a la de la figura 8.29 (Ref. 49), entonces tenemos que:

$$K = 0.6 + 0.15\left(\frac{D}{z}\right)^2 \quad (8.24)$$

Para válvulas de pequeño diámetro totalmente abiertas, se deben usar los coeficientes de pérdida indicados en la figura 8.30.

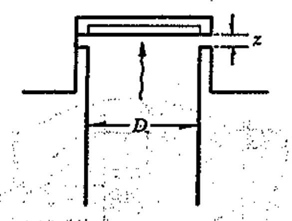


Figura 8.29. Válvula de alivio plana.

Para el control de gasto, en tuberías de gran diámetro se utilizan válvulas de aguja, en puntos intermedios o en el extremo final del conducto. La Fig. 8.31 muestra una válvula —del primer tipo— para la cual, en posición de apertura total, el gasto está expresado por la ecuación:

$$Q_{máx} = C_d \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{2\,g\,H} \quad (8.25)$$

donde

C_d = 0.58, coeficiente de gasto;
D diámetro a la entrada de la válvula, en m;
H energía total antes de la válvula,

Cuando el diámetro de la válvula de aguja (del lado de la descarga) es 0.833 D; en la Ec. (8.25), C_d = 0.503.

La Fig. 8.32 muestra las dimensiones de una válvula de aguja, del tipo utilizado en el extremo final de un conducto para controlar las descargas. El coeficiente máximo de velocidad para este tipo de válvulas, totalmente abiertas, es $C_v \approx 0.96$ a 0.98.

Esto es, la velocidad del agua en la sección contracta del chorro descargado es:

$$V_s = C_v \sqrt{2\,g\,H}$$

o sea, el coeficiente de pérdida de energía quedaría expresado por la ecuación siguiente:

$$K = \left(\frac{1}{C_v^2} - 1\right)$$

que afectaría a la carga de velocidad, $V_s^2/2\,g$, para obtener la pérdida.

En el caso de válvulas de chorro hueco, como la de la Fig. 8.33a, usadas en el extremo final de un conducto para controlar descargas, según la firma alemana Voith, C_d = 0.808 en la Ec. (8.25) para válvula totalmente abierta. Para estas mismas condiciones (de válvula totalmente abierta), la firma norteamericana U. S.

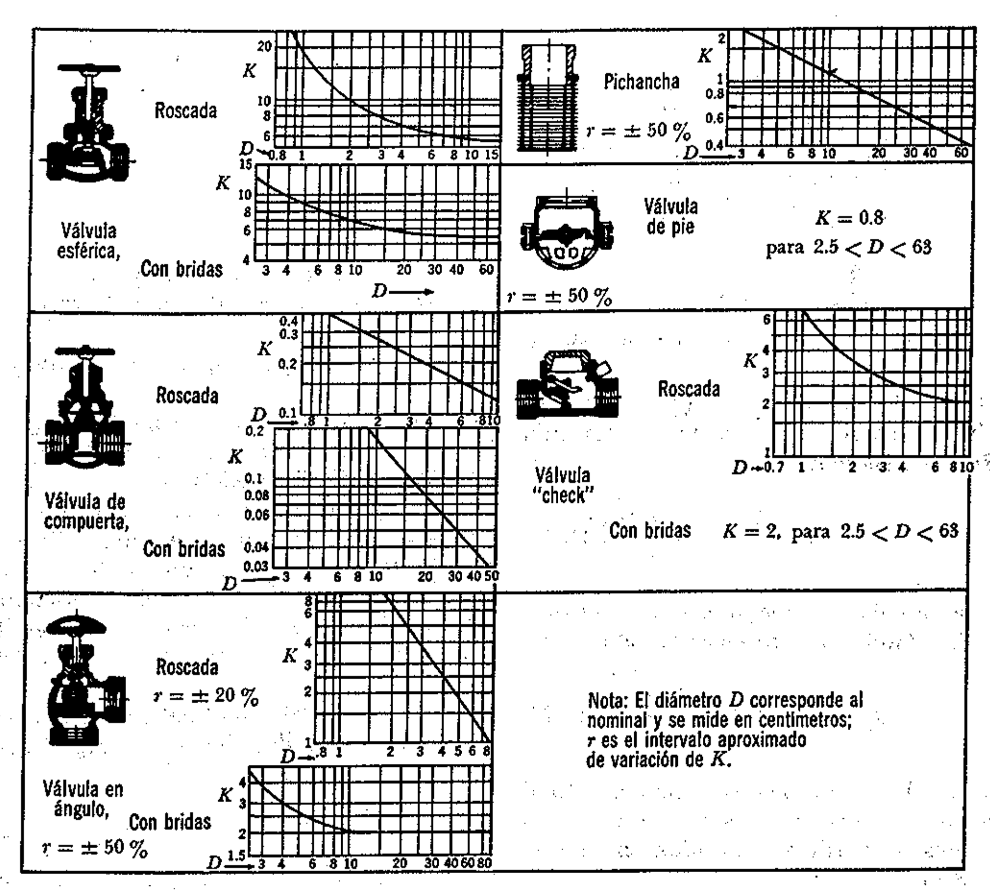


Figura 8.30. Coeficientes de pérdida para válvulas completamente abiertas.

Morgan Smith propone que $C_d = 0.85$ para las válvulas que fabrica.

El U. S. Bureau of Reclamation estudió la válvula de chorro hueco mostrada en la figura 8.33b, para la cual $C_d = 0.70$ en la Ec. (8.25); H deberá medirse un diámetro, aguas arriba, de la sección de entrada.

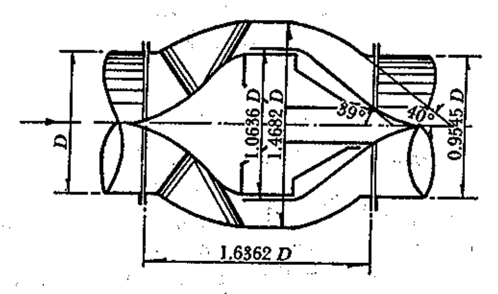


Figura 8.31. Válvula interior de aguja (U.S.B.R.).

8.7.8 Pérdida por salida

Esta pérdida vale:

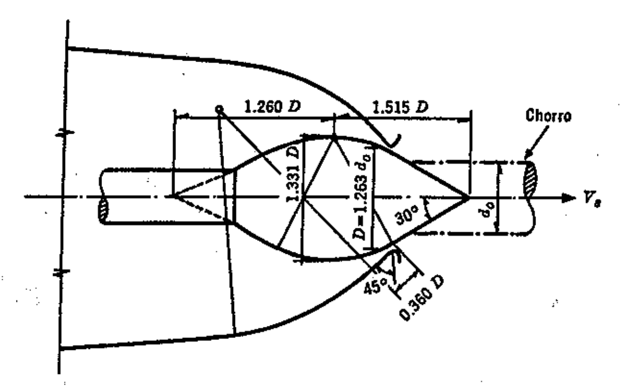


Figura 8.32. Válvula de aguja, según Escher.

$$h_s = K \frac{(V_s - V_2)^2}{2g} \qquad (8.26)$$

donde K se obtiene de la tabla 8.19 (referencia 7) (Fig. 8.34).

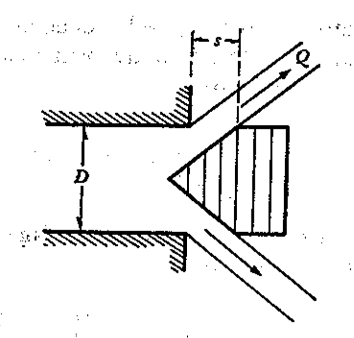


Figura 8.33a. Válvula de chorro hueco.

Figura 8.33b. Válvula de chorro hueco (U.S.B.R.).

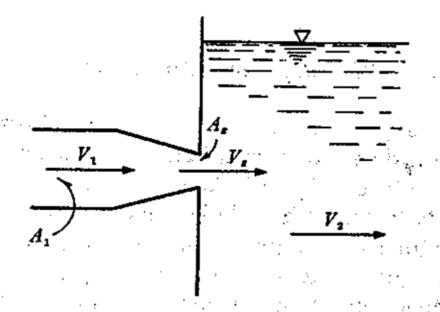


Figura 8.34. Pérdida por salida.

TABLA 8.19. Coeficientes de pérdida por salida

$\frac{A_s}{A_1}$	K
0.1	0.83
0.2	0.84
0.3	0.85
0.4	0.87
0.5	0.88
0.6	0.90
0.7	0.92
0.8	0.94
0.9	0.965
1	1.0

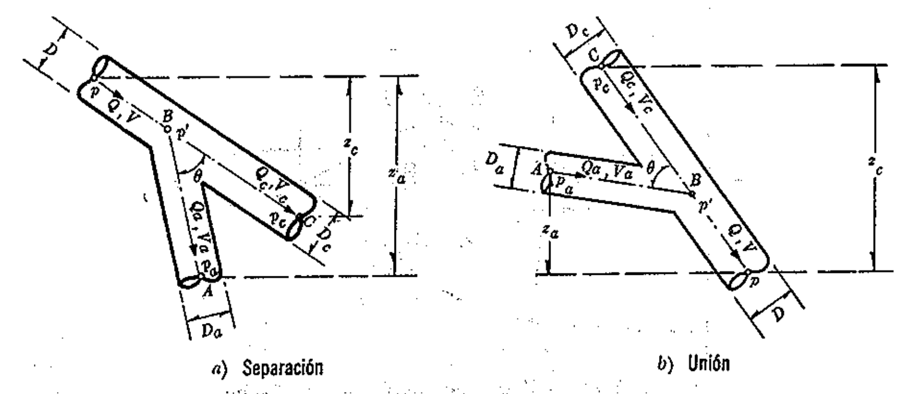


Figura 8.35. Pérdida por bifurcación.

Si la descarga es al medio ambiente, $V_2 = 0$ y $h_s = V_s^2/2g$ para $A_s = A_1$.

8.7.9 Pérdidas por bifurcación

La pérdida de energía en una bifurcación de conductos depende —además del ángulo que forman la tubería secundaria con la maestra— de la relación entre los diámetros de ambas tuberías y de la dirección de la corriente. Dicha pérdida es mayor en la unión que en la bifurcación (Figs. 8.35 a y b) y se expresa como un porcentaje de la carga de velocidad, lo que demuestra que el coeficiente K es independiente del número de Reynolds.

Con las designaciones indicadas en la Fig. 8.35a para la separación y con las secciones próximas al punto en que se realiza la bifurcación, la ecuación de la energía entre la corriente principal y la sección C (suponiendo que la pérdida por fricción es pequeña), conduce a:

$$z_c + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = \frac{p_c}{\gamma} + \frac{V_c^2}{2g} + K_c \frac{V^2}{2g}$$

o bien:

$$\frac{p - p_c}{\gamma} + z_c = \frac{V_c^2}{2g} + (K_c - 1)\frac{V^2}{2g}$$

En la misma manera, de la ecuación de la energía, entre la corriente principal y la sección A, tenemos:

$$\frac{p - p_a}{\gamma} + z_a = \frac{V_a^2}{2g} + (K_a - 1)\frac{V^2}{2g}$$

En el caso de la unión, en la Fig. 8.35b, las ecuaciones son:

$$\frac{p_c - p}{\gamma} + z_c = (K_c + 1)\frac{V^2}{2g} - \frac{V_c^2}{2g}$$

$$\frac{p_a - p}{\gamma} + z_a = (K_a + 1)\frac{V^2}{2g} - \frac{V_a^2}{2g}$$

además, en ambos casos son válidas las siguientes ecuaciones:

$$V = \frac{4Q}{\pi D^2}, \quad V_c = \frac{4Q_c}{\pi D_c^2}, \quad V_a = \frac{4Q_a}{\pi D_a^2}$$

$$Q = Q_a + Q_c$$

Los coeficientes K_a y K_c, antes definidos, son dependientes de la relación entre gastos Q_a/Q y entre los diámetros; del ángulo con que se realiza la bifurcación y del grado de redondez de los cantos en los tubos. Para el caso de cantos agudos, como los de la Fig. 8.35 y $D = D_c$, los autores Vogel, Petermann y Kinne, obtuvieron los resultados de la tabla 8.20 (Ref. 1).

TABLA 8.20. Coeficientes de pérdida para bifurcaciones en tuberías (cantos agudos)

Q_a/Q	Separación				Unión			
	θ = 90°		θ = 45°		θ = 90°		θ = 45°	
	K_a	K_c	K_a	K_c	K_a	K_c	K_a	K_c
0.0	0.95	0.04	0.90	0.04	—1.20	0.04	—0.92	0.04
0.2	0.88	—0.08	0.68	—0.06	—0.40	0.17	—0.38	0.17
0.4	0.89	—0.05	0.50	—0.04	0.08	0.30	0.00	0.19
0.6	0.95	0.07	0.38	0.07	0.47	0.40	0.22	0.09
0.8	1.10	0.21	0.35	0.20	0.72	0.51	0.37	—0.17
1.0	1.28	0.35	0.48	0.33	0.91	0.60	0.37	—0.54

Por otra parte, las relaciones más adecuadas para una separación en tubos, con cantos redondeados (redondeo con 0.1 D_a), son las indicadas en la tabla 8.21 (Ref. 43).

TABLA 8.21. Coeficientes de pérdida para bifurcaciones en tuberías (cantos redondeados)

Q_a/Q	θ	D_a/D	V_a/v	K_a
0.3	90°	1	0.3	0.76
	60°	0.61	0.8	0.59
	45°	0.58	0.9	0.35
0.5	90°	1	0.5	0.74
	60°	0.79	0.8	0.54
	45°	0.75	0.9	0.32
0.7	90°	1	0.7	0.88
	60°	1	0.7	0.52
	45°	1	0.7	0.30

En la Fig. 8.36 se presentan los coeficientes de pérdida K, para bifurcaciones de diámetro pequeño:

En obras hidroeléctricas son de especial interés las bifurcaciones simétricas mostradas en la Fig. 8.37.

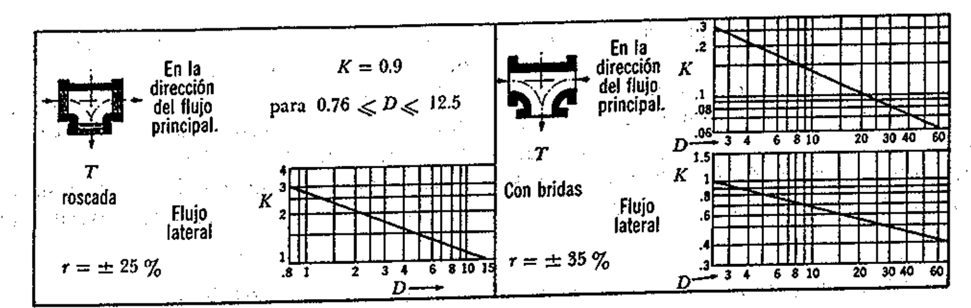
Para la bifurcación del tipo 1 (Fig. 8.37a) (D = constante), con una distribución simétrica del gasto ($Q_a/Q = 0.5$), los coeficientes de pérdida definidos en cualquiera de las dos siguientes expresiones:

$$h = K_a \frac{V^2}{2g}; \qquad h = K_a' \frac{V_a^2}{2g},$$

se obtienen de la tabla 8.22, en la cual se incluyen también los correspondientes al tipo 2, para diferentes valores de θ (referencia 1).

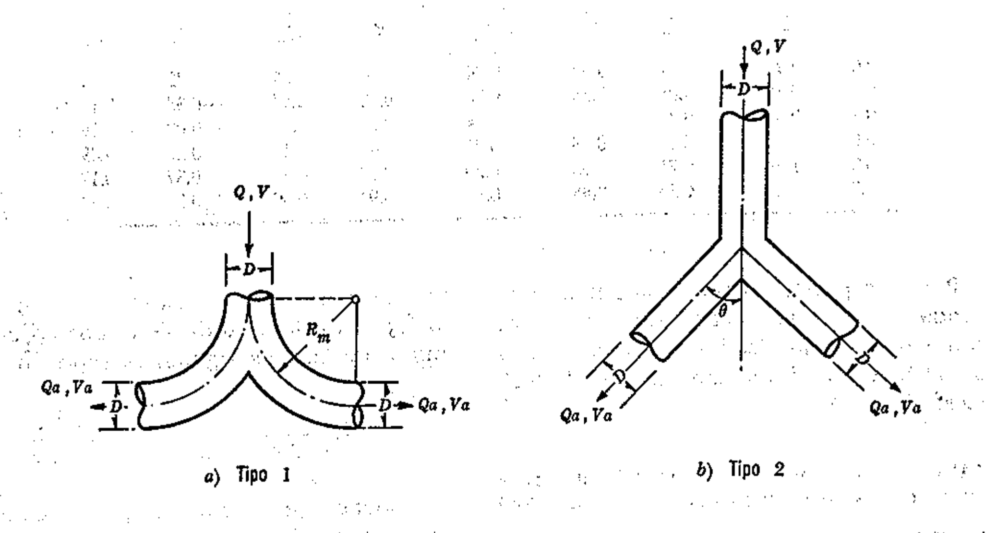
TABLA 8.22. Coeficientes de pérdida para las bifurcaciones tipos 1 y 2 (Fig. 8.37)

Tipo 1			Tipo 2		
R_m/D	K_a	K_a'	θ	K_a	K_a'
0.50	1.10	4.4	10°	0.1	0.4
0.75	0.60	2.4	30°	0.3	1.2
1.00	0.40	1.6	45°	0.7	2.8
1.5	0.25	1.0	60°	1.0	4.0
2.0	0.20	0.8	90°	1.4	5.6



Nota: El diámetro corresponde al nominal y se mide en centímetros; r es el intervalo aproximado de variación para K.

Figura 8.36. Coeficientes de pérdida en bifurcaciones de diámetro pequeño.



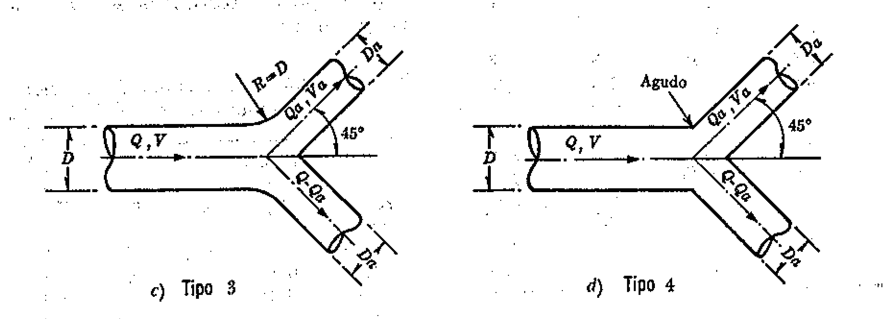


Figura 8.37. Bifurcaciones simétricas.

Por otra parte, para las bifurcaciones de los tipos 3 y 4, los correspondientes coeficientes de pérdida se presentan en la tabla 8.23.

TABLA 8.23 Coeficientes de pérdida para las bifurcaciones tipos 3 y 4 (Fig. 8.37)

Tipo	D_a/D	Q_a/Q_a	0.5	1.0
3	1	K_a	0.40	0.30
		K_a'	1.60	0.30
	0.707	K_a	0.40	0.85
		K_a'	0.40	0.21
4	1	K_a	0.55	0.50
		K_a'	2.20	0.50
	0.707	K_a	0.75	1.35
		K_a'	0.75	0.34

Gráficas de valores, más amplias, para estos coeficientes se pueden consultar en la Ref. 50.

PROBLEMAS

1. Si la velocidad crítica del agua, en un tubo de 5 cm de diámetro, es de 0.0488 m/seg, determinar la velocidad crítica del aire en un tubo de 15 cm de diámetro, ambos a 15°C de temperatura.

2. Calcular la potencia —en *CV*— requerida para bombear 50 tons de aceite por hora, a lo largo de una tubería de 0.10 m de diámetro y 1 609 m de longitud, si el aceite pesa 916 kg/m³ y tiene una viscosidad cinemática ν = 0.00186 m²/seg.

3. Agua a 10°C es forzada a fluir en un tubo capilar D = 0.8 mm y 70 m de longitud. La diferencia de presiones entre los extremos del tubo es de 0.02 kg/cm². Determinar la velocidad media, el gasto y el número de Reynolds para ν = 0.0133 cm²/seg.

4. Comparar las pérdidas de fricción, en 100 m de longitud, en un tubo de 2.5 cm de diámetro donde fluye agua con una viscosidad 0.013 poises con gastos de: *a)* 0.159 m³/h; *b)* 0. 682 m³/h. Calcular el factor de fricción adecuado con la fórmula de Poiseuille, si el flujo es laminar; y, la de Blasius, si es turbulento.

5. Un enfriador de aceite consiste de tubos de 1.25 cm de diámetro interior y 3.65 m de longitud. El aceite, con un peso específico de 900 kg/m³, es forzado a una velocidad de 1.83 m/seg. El coeficiente de viscosidad a la entrada es 0.28 poises y, a la salida, de 1 poise; puede considerarse que dicho coeficiente varía como una función lineal de la longitud. Determinar la potencia requerida para forzar el aceite a través de un grupo de 200 tubos semejantes en paralelo

6. Agua a 5°C es bombeada a un tubo de cobre, liso, a una velocidad de 1.53 m/seg. Si el tubo tiene 2.5 cm de diámetro y 46 m de longitud, calcular la diferencia de presiones requerida entre los extremos del tubo; use la fórmula de Nikuradse, para tubos lisos.

7. Los siguientes datos fueron obtenidos de una prueba en un tubo liso de 3.05 m de longitud y un cm de diámetro, usando agua cuya viscosidad fue 0.013 poises; la velocidad fue gradualmente incrementada, como sigue:

Velocidad (m/seg)					
0.183	0.214	0.244	0.274	0.305	0.335
Pérdida (m)					
0.0226	0.0265	0.0305	0.0342	0.0376	0.0506
Velocidad (m/seg)					
0.381	0.458	0.610	0.915	1.525	3.05
Pérdida (m)					
0.084	0.149	0.300	0.61	1.49	5.03

Dibujando la curva adecuada, estimar el valor del número de Reynolds R_e, para el cual probablemente ocurra la velocidad crítica y, también, mostrar que el factor de fricción f para $R_e > 5\,000$, está dado aproximadamente por $f = 0.44/R_e^{1/4}$.

8. Un aceite, de peso específico de 801 kg/m³,

es bombeado a un tubo de 0.305 m de diámetro y 6 000 m de longitud. El coeficiente de viscosidad del aceite es de 0.01865 poises. La rugosidad del tubo es tal que ε = 0.075 cm. El gasto en el tubo es de 221 lt/seg. Usando las curvas de rugosidad adecuadas, calcular la pérdida de fricción y la potencia que requiere la bomba, si su eficiencia es de 75 por ciento.

9. Aceite, con peso específico de 800 kg/m^3 y con una viscosidad cinemática de 0.1858 cm^2/seg, se bombea a un tubo de 0.15 m de diámetro y 3 050 m de longitud. *a)* Encontrar la potencia requerida para bombear 127 m^3/h. *b)* Si el aceite se calienta hasta que su viscosidad cinemática sea de 0.01858 cm^2/seg, determinar la potencia —ahora requerida— para bombear la misma cantidad de aceite que antes.

10. Determinar el número de Reynolds en un tubo de 2 mm de diámetro, cuando en él fluye agua a 25°C a una velocidad de 30 cm/seg.

11. Determinar el diámetro de la tubería vertical necesaria para que fluya un líquido, de viscosidad cinemática $\nu = 1.5\times10^{-6}$cm^2/seg, con número de Reynolds de 1800.

12. *a)* Calcular el gasto que fluye en el sistema indicado en la figura, despreciando todas las pérdidas excepto las de fricción. *b)* ¿Cuál sería el gasto en el mismo sistema, si en la línea se instala una válvula esférica abierta? Suponer una tubería lisa y una entrada redonda.

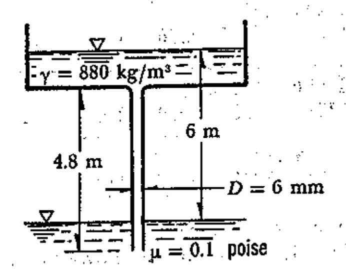


Figura del problema 12.

13. Cuando el gasto de agua en un tubo liso dado, es de 114 lt/seg, el factor de fricción es f = 0.06. ¿Qué factor de fricción se esperaría si el gasto aumenta a 684 lt/seg?

14. Agua sale de un tubo horizontal nuevo (fierro fundido) de 0.305 m de diámetro. Para determinar la magnitud de una fuga en la tubería, dos manómetros separados 610 m, aguas arriba de la fuga, indican una diferencia de presión de 0.141 kg/cm^2. Estimar el gasto de la fuga.

15. Agua fluye en un tubo, de 152 mm de diámetro, con un gasto de 89 lt/seg. La pérdida de energía entre dos secciones, separadas 30 m, es de 3.80 m. *a)* Determinar el factor de fricción. *b)* Determinar la rugosidad relativa del tubo. *c)* Identificar el material del tubo.

16. El flujo turbulento plenamente desarrollado en un tubo liso es con una velocidad media de 0.61 m/seg. Determinar la velocidad máxima al centro del tubo cuando:

a) R_e = 1 000;
b) $R_e = 10^5$.

17. En una prueba realizada con una tubería de 15 cm de diámetro se ha medido una diferencia manométrica de 350 mm, en un manómetro de agua-mercurio conectado a dos anillos piezométricos, separados 50 m. El gasto era de 3 000 lt/min. ¿Cuál es el factor de fricción f?

18. Determinar la pérdida de energía que se produce en un tramo de 1 000 m, al mantener una velocidad de 5 m/seg en una tubería de 12 mm de diámetro, $\nu = 4\times10^{-6}$ m^2/seg.

19. ¿Qué diámetro de tubería de fierro galvanizado se necesita para que sea "hidráulicamente lisa", para $R_e = 3.5\times10^5$?

20. Determinar el número de Reynolds arriba del cual el flujo en una tubería de 3 m de acero remachado, ε = 0.300 mm, es independiente de la viscosidad del fluido.

21. Determinar la rugosidad absoluta de una tubería de 1 m de diámetro, que tiene un factor de fricción f = 0.04 para $R_e = 10^6$.

22. ¿Cuál será el diámetro de una tubería nueva de fierro galvanizado, para que tenga el mismo factor de fricción para $R_e = 10^5$, que una tubería de fierro fundido de 30 cm de diámetro?

23. Calcular el factor de fricción para el aire, a presión atmosférica y 15°C, que fluye por una tubería galvanizada de 1.2 m de diámetro, a velocidad de 25 m/seg.

24. A lo largo de una tubería de fierro fundido, de 30 cm de diámetro, se bombean 60 lt/seg de un aceite; μ = 0.16 poises y γ = 870 kg/m^3. Si cada una de las bombas empleadas produce 5 kg/cm^2 de ascenso en la presión; determinar a qué distancia deben colocarse las bombas.

25. Calcular el diámetro de una tubería nueva, de fierro fundido, necesaria para transportar 300 lt/seg de agua a 25°C, a un km de longitud y con una pérdida de energía de 1.20 m.

26. Agua a 25°C fluye en un tubo liso, de 5 cm de diámetro, a una velocidad media de 3 m/seg. Determinar:

a) el número de Reynolds del flujo;
b) el factor de fricción f;
c) el gradiente de fricción.

27. Aceite, con una viscosidad cinemática ν = 0.372 cm^2/seg, fluye en un tubo inclinado de 25 mm de diámetro, con una velocidad de 1.22 m/seg. Determinar qué inclinación debe tener el tubo para que la presión en su interior permanezca constante a lo largo del mismo.

28. Aceite, de densidad ρ = 92 kg seg^2/m^4 y viscosidad cinemática ν = 2.79 cm^2/seg, fluye en un ducto cuadrado de 5 × 5 cm con velocidad media de 3.66 m/seg. *a)* Determinar la caída de presión por cada 100 m de longitud del ducto. *b)* Determinar la caída de presión por cada 100 m de longitud, si las dimensiones del ducto cambian a 2.5 × 10 cm. *c)* Determinar la misma caída de presión, si el ducto tiene una sección triangular equilátera de 2.5 cm de lado.

29. Utilizando el diagrama universal de Moody dar respuesta a las siguientes preguntas: *a)* ¿Para qué tipo de flujo la pérdida de fricción varía con el cuadrado de la velocidad? *b)* ¿Cuál es el factor de fricción para $R_e = 10^5$ —en un tubo liso— para $\varepsilon/D = 0.0001$ y para $\varepsilon/D = 0.001$? *c)* ¿Para qué rango del número de Reynolds, es constante el factor de fricción, en un tubo de fierro fundido y 152 mm de diámetro? *d)* Suponiendo que la rugosidad absoluta de un tubo dado se incrementara en un periodo de 3 años, a tres veces su valor inicial, ¿tendría ello mayor efecto en la pérdida en flujo turbulento, para números de Reynolds altos o bajos? *e)* ¿Para qué tipo de flujo f depende únicamente de R_e? *f)* ¿Para qué tipo de flujo f depende únicamente de R_e y ε/D? *g)* Si el factor de fricción es 0.06, para un tubo liso, ¿cuál sería el factor de fricción para un tubo de rugosidad relativa ε/D = 0.001, con el mismo número de Reynolds? *h)* Lo mismo para f = 0.015.

30. Aire a 15°C fluye en un ducto rectangular de 61 cm × 122 cm, fabricado con una lámina de aluminio liso a un gasto de 274 m^3/min. *a)* Determinar la caída de presión en 50 m de longitud; *b)* Determinar el diámetro necesario de un ducto cilíndrico del mismo material, para transportar este gasto con el mismo gradiente de presiones.

31. Agua fluye con un gasto de 17.1 lt/seg en un tubo horizontal de 150 mm, el cual se ensancha hasta un diámetro de 300 mm. *a)* Estimar la pérdida de energía entre los dos tubos en el caso de ampliación brusca. *b)* Determinar la longitud que debe tener el tubo de 152 mm para que la pérdida por ampliación fuese equivalente a la de fricción.

32. Una tubería horizontal, de fierro fundido con D = 500 mm, L = 1 000 m, debe transportar agua a 10°C con velocidad v = 1.5 m/seg. Determinar una curva que relacione la pérdida por fricción en la tubería con la rugosidad absoluta del tubo, al cambiar su rugosidad absoluta de ε = 0.2 mm a ε = 4 mm, durante los años de servicio de la tubería.

33. El cambio de dirección —mostrado en la figura— es tridimensional, siendo el diámetro del tubo D = 400 mm. La velocidad del agua en la tubería es V = 3 m/seg. La

presión $p_1 = 2\ \text{kg/cm}^2$. El factor de fricción $f = 0.02$ y el de pérdida local por los codos es $K_c = 1.3$. Calcular la fuerza dinámica total F, del conjunto y los momentos M_x, M_y, M_z de la misma.

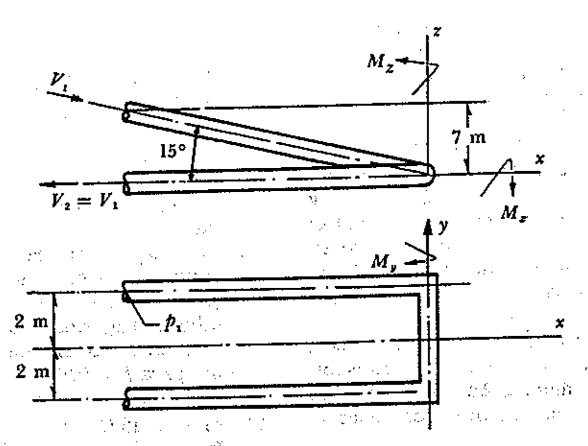


Figura del problema 33.

34. Dentro de una tubería de diámetro $D = 600$ mm se encuentra una válvula de mariposa con inclinación $\theta = 60°$, siendo su coeficiente de pérdida $K_v = 118$. El gasto que escurre en la tubería vale $Q = 140$ lt/seg. Calcular la fuerza F_n normal a la válvula, producida por el cambio de presión y la fuerza en la dirección del eje del tubo.

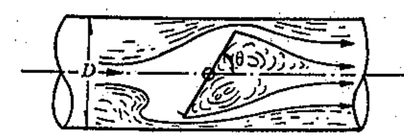


Figura del problema 34.

35. Calcular la pérdida de energía (en *CV*) para un flujo de 3 m³/min a través de una contracción brusca, en una tubería que cambia de 150 a 100 mm de diámetro.

36. *a)* Determinar *H*, en el sistema mostrado en la figura, para un flujo de aceite de 750 lt/min, $\mu = 0.1$ poises, $\gamma = 960\ \text{kg/m}^3$, para la válvula de ángulo, totalmente abierta. *b)* Calcular el valor de *K*, requerido en la válvula de ángulo, si el gasto es de 300 lt/min y la misma carga *H*. *c)* ¿Cuál sería el gasto que pasa por el mismo sistema para agua a 25°C cuando $H = 6$ m?

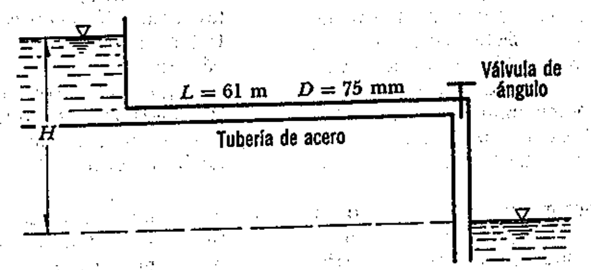


Figura del problema 36.

37. *a)* Utilizando la fórmula de Colebrook-White (Ec. 8.7) comprobar la situación de la línea $\varepsilon/D = 0.006$ en el diagrama de Moody. *b)* En esta misma fórmula, demostrar que cuando $\varepsilon = 0$ se reduce a la fórmula de Nikuradse para tubos lisos (Ec. 8.5); y que cuando R_e es muy grande, se reduce a la fórmula de Nikuradse para tubos rugosos (Ec. 8.6).

38. Elegir la respuesta correcta. El número de Reynolds superior crítico es:

a) el número para el cual el flujo cambia de turbulento a laminar;
b) aproximadamente 2,000;
c) no mayor de 2,000;
d) no es de importancia práctica en los problemas de tuberías;
e) importante desde el punto de vista del diseño de una tubería.

39. Elegir la respuesta correcta. El factor de fricción en flujo turbulento, en tuberías lisas, depende de las siguientes magnitudes:

a) V, D, p, L, μ;
b) Q, L, μ, ρ;
c) V, D, ρ, p, μ;
d) V, D, μ, ρ;
e) p, L, D, Q, V.

9

ANALISIS DE SISTEMAS DE TUBOS

9.1 Introducción

En este capítulo se hace una presentación detallada de los métodos de aforo y de análisis de sistemas de conductos a presión, que van desde el tubo único hasta el de redes de agua potable. El análisis se realiza utilizando las ecuaciones de continuidad y de energía, tomando en consideración las pérdidas por fricción y locales, cuya forma de cuantificación ha sido presentada en el capítulo 8. Dicho análisis se refiere únicamente al caso de flujo permanente.

9.2 Dispositivos de aforo en tuberías

El gasto en la sección de una tubería se puede medir indirectamente con *dispositivos de aforo*, en el sitio en el que se desea conocer. Los más comunes son los venturímetros, toberas y diafragmas, que se adaptan generalmente a tuberías de medianas y grandes dimensiones, donde es necesario llevar un control de los gastos, como en el caso de redes de abastecimiento de agua.

9.2.1 Venturímetros

La función básica de los *venturímetros* consiste en producir un estrangulamiento en la sección transversal de la tubería, el cual modifica las presiones. Con la medición de ese cambio es posible conocer el gasto que circula por la sección; el estrangulamiento de ésta es muy brusco, pero la ampliación hasta la sección original es, por el contrario, gradual.

En la Fig 9.1 se presenta el corte longitudinal de un venturímetro para una tubería, con algunos detalles sobre su geometría. En la deducción de la fórmula se supone despreciable la pérdida de energía, además de que los coeficientes α de corrección son iguales a 1.

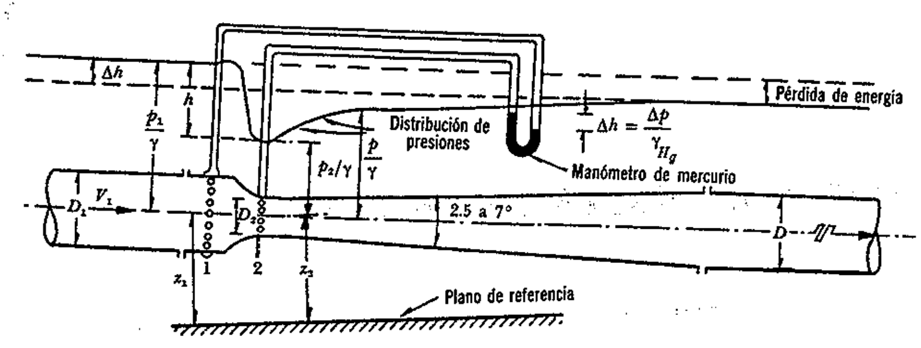


Figura 9.1. Venturímetro en una tubería.

Con z_1 y z_2 como cargas de posición de las secciones 1 y 2, respecto de un plano de referencia cualquiera, la ecuación de Bernoulli resulta ser:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} \quad (9.1)$$

Por otra parte, de la ecuación de continuidad, tenemos que

$$V_1 = \frac{V_2 A_2}{A_1} \quad (9.2)$$

Con $h = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)$; substituyendo la Ec. (9.2) en la Ec. (9.1), se obtiene:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

y en términos de la deflexión en el manómetro de mercurio, el gasto es

$$Q = \frac{C_v A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{2gh} =$$

$$= \frac{C_v A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \times \sqrt{2g\,\Delta h\left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1\right)}$$

Para corregir los errores cometidos, en la no inclusión de la pérdida de carga y que $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, la ecuación anterior se afecta de un coeficiente C_v. Además, con:

$$C_d = \frac{C_v}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} = \frac{C_v}{\sqrt{1 - m^2}} \quad (9.3)$$

donde $m = \frac{A_2}{A_1}$ es el grado de estrangulamiento, se obtiene finalmente:

$$Q = C_d A_2 \sqrt{2g\,\Delta h\left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1\right)} \quad (9.4)$$

Por un análisis dimensional (ver apéndice A), se demuestra que el coeficiente C_d depende del grado de estrangulamiento m, de los efectos viscosos y rugosidad del tubo, contenidos en los términos de pérdida de energía y, además, del tipo de venturímetro. Valores típicos

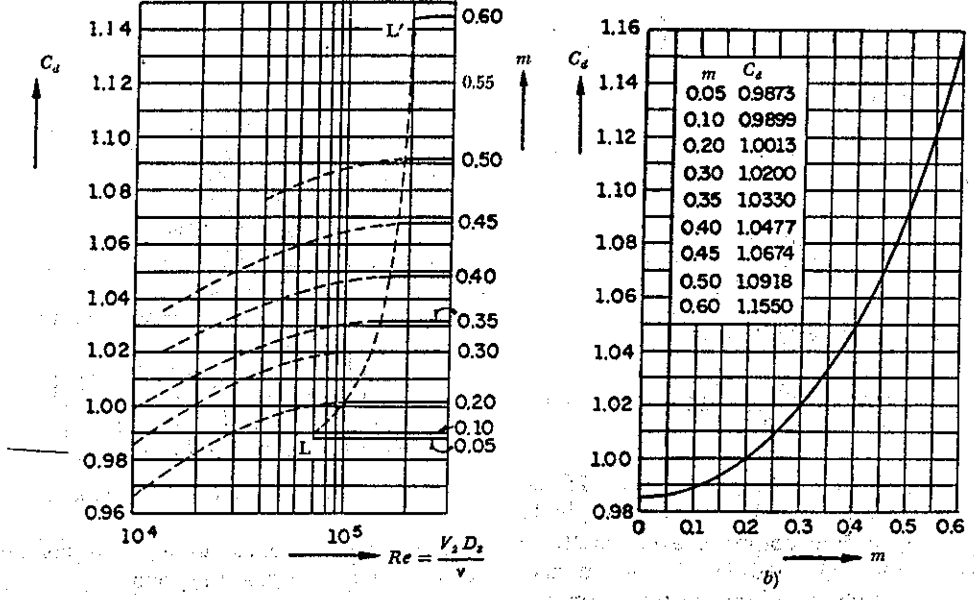


Figura 9.2. Coeficiente C_d para un venturímetro (Ec. 9.4).

medios fueron determinados experimentalmente y se presentan en la Fig. 9.2a (Ref. 30), la cual muestra que C_d depende de m y de R_e hasta el límite fijado por la línea LL', a la derecha de la cual, C_d es independiente de R_e y dependiente sólo de m, como se presenta en la Fig. 9.2b. En estas figuras el número de Reynolds es

$$R_e = \frac{V_2 D_2}{\nu}$$

donde D_2 es el diámetro de la sección estrangulada, V_2 la velocidad media en la misma, y ν la viscosidad cinemática del líquido.

Problema 9.1. Un venturímetro tiene un diámetro a la entrada $D_1 = 0.15$ m y un diámetro en el estrangulamiento $D_2 = 0.075$ m. La deflexión en el manómetro de mercurio es de 0.15 m. Calcular el gasto para una temperatura del agua de 10°C.

Solución. El peso específico del mercurio es $\gamma_m = 13\,595$ kg/m³ y la viscosidad cinemática del agua a 10°C es $\nu = 0.013$ cm²/seg.

El área de las secciones transversales vale:

$$A_1 = \pi/4 \times (0.15)^2 = 0.01767\ \text{m}^2$$
$$A_2 = \pi/4 \times (0.075)^2 = 0.00442\ \text{m}^2$$

El grado de estrangulamiento es igual a

$$m = \frac{A_2}{A_1} = 0.25$$

Considerando inicialmente que C_d es independiente de R_e, de la Fig. 9.2b se obtiene que $C_d = 1.009$. De la Ec. (9.4) resulta entonces:

$$Q=1.009\times 0.00442\sqrt{19.6\times 0.15\left(\frac{13.595}{1}-1\right)}$$

$$Q=0.0271\ \text{m}^3/\text{seg}$$

Para este gasto, la velocidad en la sección 2 sería así:

$$V_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{0.0271}{0.00442}=6.13\ \text{m/seg}$$

y el número de Reynolds:

$$R_e=\frac{V_2 D_2}{\nu}=\frac{613\times 7.5}{0.013}=3.54\times 10^5$$

Con este valor de R_e y con $m=0.25$, se obtiene el mismo valor $C_d=1.009$ de la Fig. 9.2a, lo cual comprueba el resultado obtenido para $Q=0.0271$ m³/seg. En caso de que se hubiera obtenido un valor distinto de C_d, en la Fig. 9.2a, con este nuevo coeficiente se corregiría el gasto y se obtendría otro R_e hasta ajustar todos los valores.

9.2.2 Diafragmas

En tuberías donde se permita una gran pérdida de energía para efectuar el aforo, se puede utilizar un diafragma para estrangular la sección (Fig. 9.3). Éste consiste en una placa, donde se practica un orificio de área A_0, la cual se inserta dentro de la tubería en la sección deseada. La modificación en las velocidades ocasiona un cambio de presiones, antes y después del diafragma, cuyo valor determina el gasto.

Las ecuaciones de continuidad y de Bernoulli para las secciones 1 y 2 de la Fig. 9.3 son

$$V_1=\frac{A_2}{A_1}V_2$$

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}$$

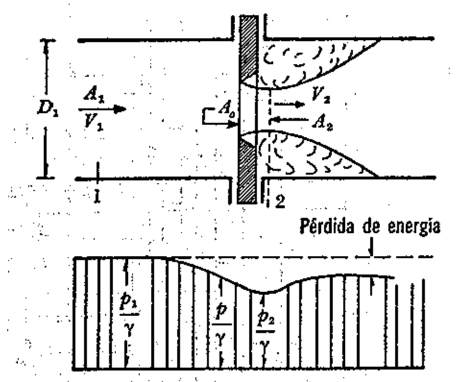


Figura 9.3. Diafragma en una tubería.

Con substituciones análogas a las del venturímetro, el gasto teórico es:

$$Q=\frac{C_v A_2}{\sqrt{1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}\sqrt{2g\frac{(p_1-p_2)}{\gamma}}$$

Con los coeficientes de contracción $C_c=A_2/A_0$ y de abertura $C_A=A_0/A_1$, de la ecuación anterior se obtiene:

$$Q=\frac{C_c C_v A_0}{\sqrt{1-C_c^2 C_A^2}}\sqrt{2g\left(\frac{p_1-p_2}{\gamma}\right)}$$

Al incluir el coeficiente de gasto C_d y medir la diferencia de presiones, en términos de la deflexión Δh, en un manómetro de mercurio, el gasto real es finalmente:

$$Q=C_d A_0\sqrt{2g\,\Delta h\left(\frac{\gamma_m}{\gamma}-1\right)} \quad (9.5)$$

El coeficiente C_d depende no sólo de la geometría del diafragma y de la rugosidad de las paredes, sino también del número de Reynolds que incluye el efecto de viscosidad del flujo. De la figura 9.4 se pueden obtener los valores de C_d para el diafragma estándar tipo *VDI* (Verein Deutscher Ingenieure). Para este tipo de diafragma, las tomas piezométricas deben quedar localizadas 2.5 cm, antes y después de la placa. Se observa que para $R_e \geq 10^5$, C_d es prácticamente independiente de R_e.

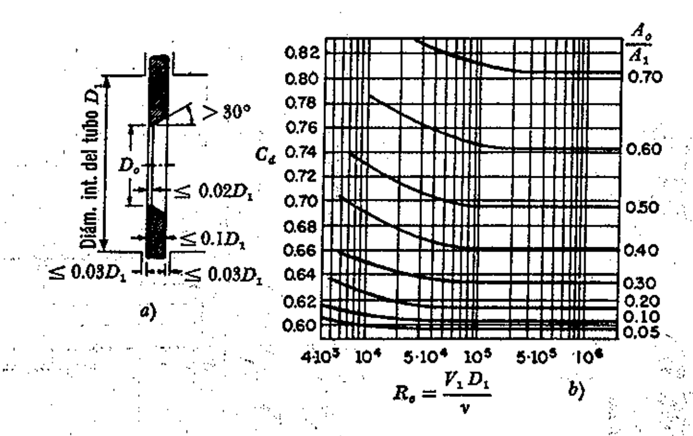


Figura 9.4. Diafragma tipo *VDI* y coeficientes de gasto (Ref. 51).

9.2.3 Toberas

En el caso de tuberías con diámetros mayores de 30 cm, se emplean toberas en lugar de diafragmas. Dos formas comúnmente usadas se muestran en las Figs. 9.5a y 9.6. La primera ha sido estudiada y sus dimensiones especificadas por la Verein Deutscher Ingenieure; su forma elimina el coeficiente de contracción haciéndolo igual a uno. Esto es, las dimensiones del orificio coinciden con las del área contraída de la Fig. 9.3 y vale la Ec. (9.5) con la única salvedad que $A_0=A_2$ y $C_c=1$. De la Fig. 9.4b se puede obtener el valor de C_d en la ecuación siguiente:

$$Q=C_d A_2\sqrt{2g\,\Delta h\left(\frac{\gamma_m}{\gamma}-1\right)} \quad (9.6)$$

Para la tobera de la Fig. 9.6, C_d varía aproximadamente entre 0.95 para $R_e = V_2 D_2/\nu = 10^5$ hasta 0.98 para $R_e = 10^6$, a partir del cual conserva constante este último valor.

Para lograr mejor precisión en los aforos con estos dispositivos, se recomienda tener un tramo de tubería recta —de por lo menos 10 a 40 *D*— antes de ellos y —de por lo menos 5 *D*— después de los mismos.

Problema 9.2. Determinar el gasto en una tubería de 0.15 m de diámetro en la cual se ha insertado una tobera de 0.10 m de diámetro. El manómetro diferencial de mercurio marca una deflexión de 0.25 m y la temperatura del agua es de 15°C.

Solución. De los datos se obtiene que $A_2 = 0.00785$ m², $A_1 = 0.01767$ m²; y para agua a 15°C $\nu = 0.0114$ cm²/seg y $A_2/A_1 = 0.444$. Suponiendo inicialmente que C_d no depende de R_e, de la Fig. 9.5b $C_d = 1.056$ y de la Ec. (9.6) el gasto vale:

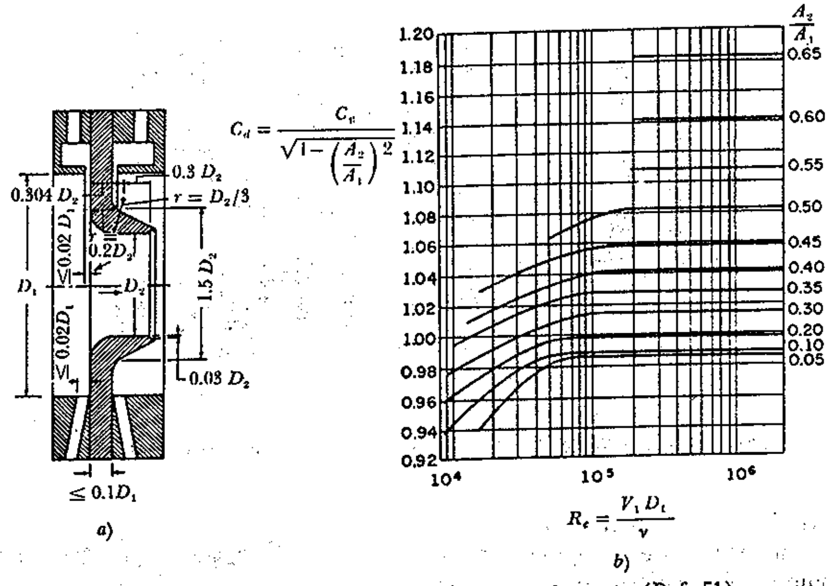


Figura 9.5. Tobera *VDI* y sus coeficientes de gasto (Ref. 51).

$$Q = 1.056 \times$$
$$\times\ 0.00785\sqrt{19.6 \times 0.25\left(\frac{13.59}{1} - 1\right)} =$$
$$= 0.065 \text{ m}^3\text{/seg}$$

entonces:

$$V_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.065}{0.01767} = 3.68 \text{ m/seg}$$

y el número de Reynolds es

$$R_e = \frac{V_1 D_1}{\nu} = \frac{368 \times 15}{0.0114} = 4.84 \times 10^5$$

De la Fig. 9.5b resulta que C_d es efectivamente independiente de R_e y el gasto es 0.065 m³/seg.

9.2.4 Aforador de codo

Otro tipo de aforador es el llamado *de codo* y consiste en medir la diferencia de presiones que se genera entre el intradós y el extradós de una curva en una tubería. En la Fig. 9.7 se detalla la disposición de las tomas piezométricas.

El gasto se obtiene de la ecuación:

$$Q = C_d K A \sqrt{2\,g\,\Delta h} \qquad (9.7)$$

donde A es el área de la tubería; $\Delta h = h_2 - h_1$ la diferencia en cargas de presión (expresada en metros de columna de agua) entre el extradós y el intradós; g la aceleración de la gravedad; C_d y K son coeficientes sin dimensiones (el primero de gasto y el segundo de forma) que dependen de la relación R/D radio del codo a diámetro del tubo, de acuerdo con la tabla 9.1.

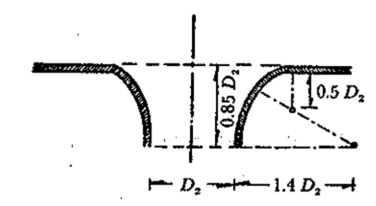


Figura 9.6. Diagrama de una tobera.

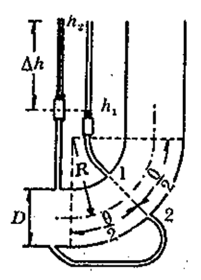


Figura 9.7. Aforador de codo.

TABLA 9.1. Coeficientes K para el aforador de codo, según Addison (Ref. 31)

R/D	C_d	K
1.0	1.23	0.570
1.25	1.10	0.697
1.50	1.07	0.794
1.75	1.05	0.880
2.00	1.04	0.954
2.25	1.03	1.02
2.50	1.03	1.02
2.75	1.02	1.14
3.00	1.02	1.20

9.3 Conducto sencillo

Es el más sencillo de los sistemas. Consiste de un conducto único alimentado en el extremo, aguas arriba, por un recipiente o una bomba y con descarga libre o a otro recipiente. El conducto puede tener cambios geométricos u obstrucciones que producen pérdidas locales de energía, además de la propia de fricción.

En la Fig. 9.8 se muestra el comportamiento de las líneas de energía y gradiente hidráulico, para el tubo que conecta dos recipientes; ambas líneas interpretan el significado físico de los términos en la ecuación de la energía. En la Fig. 4.10 se presenta el sistema alimentado por una bomba.

Para el análisis del conducto sencillo se utiliza la ecuación de continuidad y la de energía: La primera establece la invariabilidad del gasto en cualquier sección i del conducto; a saber:

$$Q = A_i V_i$$

La segunda establece la constancia de la energía entre dos secciones transversales 1 y 2 del conducto, para lo cual se acepta, usualmente, que el coeficiente α en dichas secciones valga uno. Esto es:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2\,g} +$$
$$+ \sum_1^2 h_f + \sum_1^2 h_l$$

donde

$\sum_1^2 h_f$ = suma de las pérdidas de fricción h_f, en cada tramo de la sección 1 a la 2;

$\sum_1^2 h_l$ = suma de las pérdidas locales que ocurren de la sección 1 a la 2 debidas a entrada, cambios de sección, válvulas, etcétera.

Los dos términos se expresan en razón de la carga de velocidad dentro del tramo de sección constante, si la pérdida es de fricción o aguas abajo del punto donde se produce la pérdida local. Por esta cau-

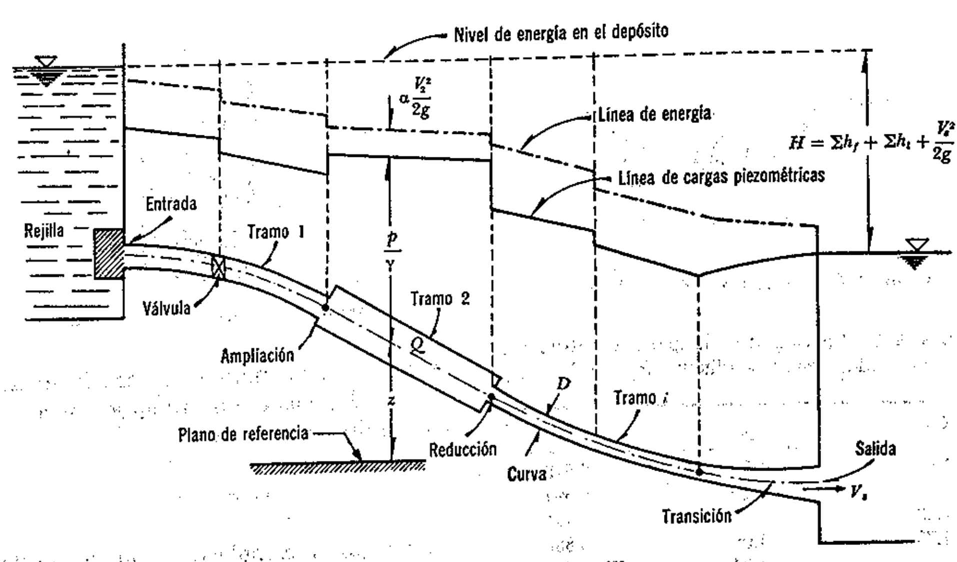


Figura 9.8. Conducto sencillo.

sa, la ecuación de la energía contendrá los valores de la velocidad, en distintas secciones del conducto, mismos que se pueden substituir por la velocidad, en un sólo tramo, utilizando la ecuación de continuidad.

Si en el sistema de la Fig. 9.8, el recipiente de aguas abajo no existe, es decir, si el conducto descarga libremente a la atmósfera, el desnivel H se mide como la diferencia de niveles entre la superficie libre en el depósito superior y el centro de gravedad de la sección final del tubo. En cualquier caso, dicho desnivel será:

$$H = \Sigma h_f + \Sigma h_i + \frac{V_s^2}{2g}$$

donde $V_s^2/2g$ es la carga de velocidad en la sección final del conducto, considerada como energía final en el caso de descarga libre, o como pérdida en el caso de descarga a otro recipiente. Se presentan dos tipos de problema:

a) *Revisión.* Conociendo H, la geometría y rugosidad del tubo, se desea calcular el gasto.

Solución. Supuesto que se desconoce la zona de flujo (laminar, transición o turbulento) en la que trabaja el tubo, la velocidad y los coeficientes de pérdida son incógnitas. Si la sección 1 se elige dentro del depósito superior y la 2 dentro del inferior, de tal manera que la velocidad de llegada sea despreciable, de la ecuación de la energía se tiene:

$$H = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \frac{V_s^2}{2g} + \sum_1^2 h_f + \sum_1^2 h_i$$

en que V_s es la velocidad en la sección final de la tubería.

Por la fórmula de Darcy-Weisbach y de pérdidas menores vemos que:

$$H = \frac{V_s^2}{2g} + \left(f_1 \frac{L_1}{D_1}\frac{V_1^2}{2g} + f_2 \frac{L_2}{D_2}\frac{V_2^2}{2g} + \cdots\right) + \left(K_1 \frac{V_1^2}{2g} + K_2 \frac{V_2^2}{2g} + \cdots\right)$$

y debido a que $V_s A_s = V_i A_i$, entonces resulta:

$$H = \frac{V_s^2}{2g}\left(1 + \frac{f_1 L_1}{D_1}\frac{A_s^2}{A_1^2} + \frac{f_2 L_2}{D_2}\frac{A_s^2}{A_2^2} + \ldots + K_1 \frac{A_s^2}{A_1^2} + K_2 \frac{A_s^2}{A_2^2} + \ldots\right)$$

la velocidad en la sección final vale

$$V_s = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_i L_i}{D_i}\frac{A_s^2}{A_i^2} + K_i \frac{A_s^2}{A_i^2}\right)}} \qquad (9.8)$$

y el gasto:

$$Q = V_s A_s$$

Puesto que se conoce ε_i/D_i, se puede estimar un valor para cada f_i, por inspección del diagrama de Moody, así como los K_i. Con dichos coeficientes, substituidos en la Ec. (9.8), se determina el gasto; de éste, $V_i = 4\,Q/\pi D_i$ y con los números de Reynolds, se obtienen nuevos valores f_i. El proceso se repite.

b) *Diseño.* Conociendo H, la geometría (con excepción de uno de los diámetros), la rugosidad y el gasto, se desea calcular uno de los diámetros (con más de un diámetro como incógnita, la solución es imposible).

Solución. Igual que el problema anterior —se utiliza la Ec. (9.8)— estimando f y D desconocidos, que se substituyen reiteradamente hasta obtener el gasto. Este problema es poco común.

Por ejemplo, en el caso de una tubería de diámetro constante y pérdidas locales despreciables, de la Ec. (9.8) vemos:

$$Q \approx \frac{\pi \sqrt{2gH}}{4\sqrt{f\,L/D^5}}$$

$$D \approx \sqrt[5]{\frac{8\,L\,Q^2}{g\,\pi^2 H}f} = \sqrt[5]{\frac{0.0827\,L\,Q^2}{H}f} \qquad (9.9)$$

también en el número de Reynolds, nos da

$$R_e = \frac{V\,D}{\nu} = \frac{4\,Q}{\pi\,\nu}\frac{1}{D} = \frac{C_2}{D} \qquad (9.10)$$

en el que se conoce a

$$C_2 = 4\,Q/\pi\nu$$

La solución consiste en los siguientes pasos:

a) Se estima un valor de f (por ejemplo 0.02).
b) Se calcula D de la Ec. (9.9).
c) Se calcula R_e de la Ec. (9.10).
d) Con R_e y ε/D, del diagrama de Moody, se determina un nuevo valor de f.
e) Con el nuevo valor de f se repite el procedimiento hasta que ésta no cambie en más de dos ciclos sucesivos.

Problema 9.3. En la Fig. 9.9 se presenta una tubería horizontal, para la descarga de fondo, de una presa con una derivación lateral. Los datos son: $H_0 = 150$ m, $L_B = 20$ m, $L_0 = 60$ m, $L_1 = 40$ m, $D_0 = 4$ m, $D_1 = 3$ m, $D_2 = 2$ m, $A_0 = 12.57$ m², $A_1 = 7.07$ m², $A_2 = 3.14$ m², $A_R = 120$ m²; rejillas con $s/b = 0.1$, $C_f = 1.67$ y $\theta = 70°$; en la válvula de mariposa $A_N = 30$ m², ancho de escotaduras $b/h = 0.2$, rugosidad del tubo $\varepsilon = 0.5$ mm.

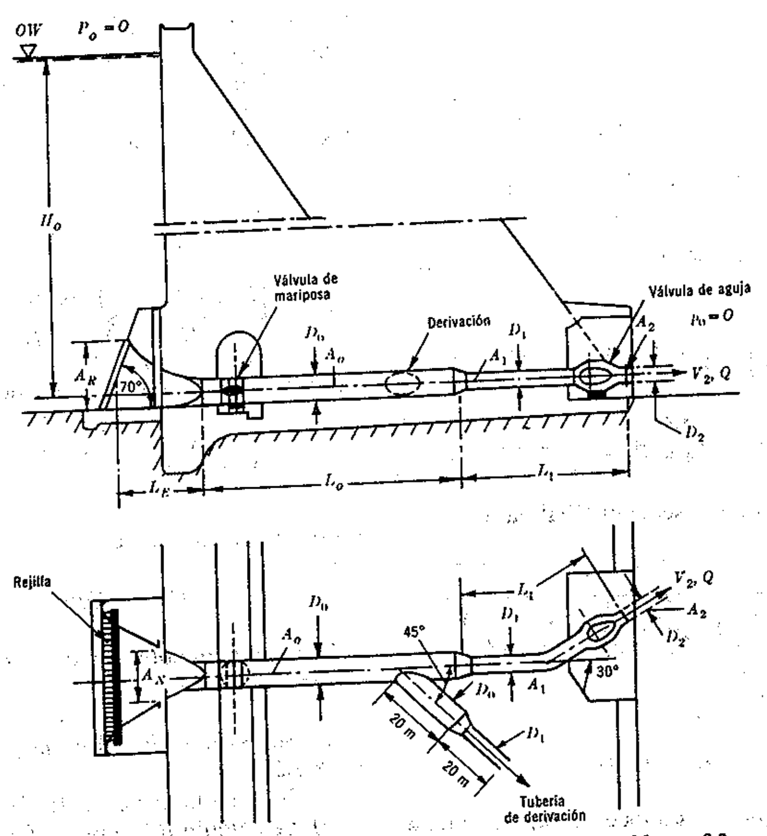


Figura 9.9. Descarga libre del desagüe de fondo del problema 9.3.

Determinar el gasto Q de la tubería, en el supuesto que se cierra el paso a la derivación lateral (Ref. 1).

Solución. Se aplica la Ec. (9.8), donde $H = H_0$ para descarga libre.

Los diferentes coeficientes de pérdida se obtienen de los valores presentados en el capítulo 8, como sigue:

1. *Rejilla.* $K = 0.073$ según la Ec. (8.14), reducido con $A_2/A_R = 0.0262$, resulta entonces: $K_1 = 0.00005$

2. *Reducción después de la rejilla.* Se usa el criterio del cono equivalente. Los diámetros equivalentes son:

$$D_R = \sqrt{\frac{4\,A_R}{\pi}} = \sqrt{\frac{120}{0.785}} = 12.37 \text{ m}$$

$$D_N = \sqrt{\frac{30}{0.785}} = 6.19 \text{ m}$$

$$\theta = 2 \text{ ang tan} \frac{D_R - D_N}{2L_E} = 2 \text{ ang tan } 0.1545 = $$
$$= 17°34'$$

De la tabla de pérdida por reducción, $K = 0.19$, con $A_2/A_N = 0.105$, se reduce a: $K_2 = 0.0021$

3. *Entrada.* Para forma de trompeta, $K = 0.08$; con $A_2/A_0 = 0.25$, se reduce a: $K_3 = 0.005$

4. *Escotaduras.* Para $V > 2$ m/seg, $K = 0.05$; con $A_2/A_N = 0.105$, se reduce a: $K_4 = 0.00055$

5. *Válvula de mariposa abierta.* Se supone $K = 0.05$; con $A_2/A_0 = 0.25$ se reduce a: $K_5 = 0.0031$

6. *Pérdida por bifurcación.* De la tabla para separación, $K_e = 0.04$ (cerrada la derivación lateral); con $A_2/A_0 = 0.25$, se reduce a: $K_6 = 0.0025$

7. *Pérdida por reducción.* Con θ entre 4 y 5°, se elige $K = 0.019$; con $A_2/A_1 = 0.445$, se reduce a: $K_7 = 0.00376$

8. *Cambio de dirección.* Con $\theta = 30°$, $\varepsilon/D_1 = 0.5/3\,000 = 1.67 \times 10^{-4}$ y $R/D \approx 2$; de la Fig. 8.16a, $C_e = 0.18$ y de la Ec. (8.19) tenemos:

$$K = 0.18 \times \frac{30}{90} = 0.06$$

Con $A_2/A_1 = 0.445$ se reduce a: $K_8 = 0.0119$

9. *Válvula de aguja.* Con $C_v = 0.96$, $K = 0.08507$ y con $A_2/A_2 = 1.0$, tenemos: $K_9 = 0.08507$

10. *Fricción en la zona de entrada.* Se considera cero; $K_{10} = 0$.

11. *Fricción en el tramo de longitud L_0.* $\varepsilon/D_0 = 1.25 \times 10^{-4}$; y con R_e grande, del diagrama de Moody $f_0 = 0.0125$ y $f_0\,L_0/D_0 = 0.188$; con $A_2/A_0 = 0.25$, se reduce a: $K_{11} = 0.01175$

12. *Fricción en el tramo de longitud L_1.* $\varepsilon/D_1 = 1.67 \times 10^{-4}$ y $f_1 = 0.0132$, $f_1 L_1/D_1 = 0.176$; con $A_2/A_1 = 0.445$, se reduce a: $K_{12} = 0.03485$

Total: $\Sigma K = 0.16063$

De la Ec. (9.8), la velocidad a la salida es:

$$V_2 = \sqrt{\frac{19.6 \times 150}{1.16063}} = 50.3 \text{ m/seg}$$

y el gasto:

$$Q = 50.3 \times 3.14 = 158 \text{ m}^3/\text{seg}$$

La pérdida total de energía en toda la conducción es

$$h = H_0 - \frac{V_2^2}{2g} = 150 - \frac{(50.3)^2}{19.6}$$

Finalmente:

$$h = 20.91 \text{ m}$$

Problema 9.4. La instalación hidroeléctrica, con la geometría mostrada en la Fig. 9.10, abastece a una casa de máquinas un gasto de 8.98 m³/seg. La instalación consta de una galería con acabado interior de cemento de 3.00 m de diámetro, una cámara de oscilación y una tubería de acero soldado, nuevo, de 1.50 m de diámetro. Determinar: *a)* la carga neta sobre las máquinas: *b)* la potencia neta —en kw— que produce el sistema, si las máquinas tienen una eficiencia de un 82%; *c)* la eficiencia de todo el sistema; *d)* el nivel de la superficie del agua en la cámara de oscilación que, para las condiciones de flujo permanente, actúa como un simple tubo piezométrico.

Solución a). Las áreas en la galería y tubería son, respectivamente:

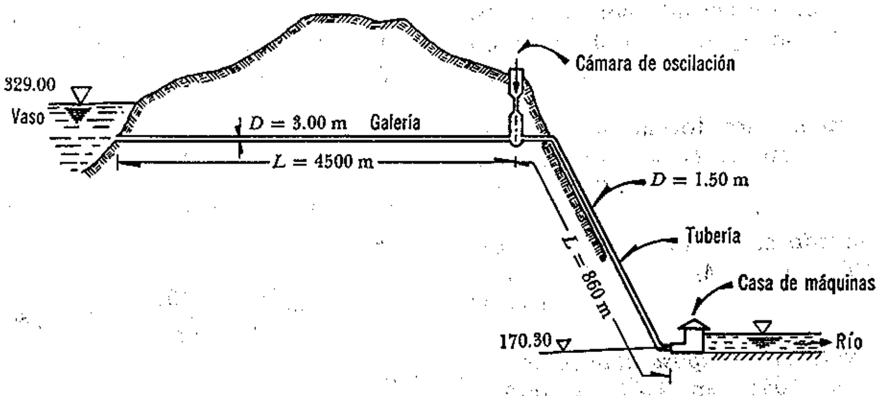


Figura 9.10. Instalación hidroeléctrica del problema 9.4.

$$A_g = 0.7854\,(3)^2 = 7.069\ \text{m}^2$$

$$A_t = 0.7854\,(1.5)^2 = 1.767\ \text{m}^2$$

y las velocidades:

$$V_g = \frac{8.98}{7.069} = 1.27\ \text{m/seg}$$

$$V_t = \frac{8.98}{1.767} = 5.08\ \text{m/seg}$$

La ecuación de la energía, entre una sección dentro del vaso y la de salida de la tubería, es:

$$329 = 170.3 + \frac{p_t}{\gamma} + \frac{V_t^2}{2g} + \Sigma h$$

La carga neta sobre las máquinas es entonces:

$$H_n = \frac{p_t}{\gamma} + \frac{V_t^2}{2g} = 158.7 - \Sigma h$$

Debido a que la longitud de los tubos es grande, las pérdidas locales se consideran despreciables respecto de las de fricción.

El número de Reynolds, en la galería para agua a 15°C ($\nu = 1.145 \times 10^{-6}$ m²/seg), es:

$$R_e = \frac{1.27 \times 3 \times 10^6}{1.145} = 3.33 \times 10^6$$

y en la tubería:

$$R_e = \frac{5.08 \times 1.5 \times 10^6}{1.145} = 6.66 \times 10^6$$

De la tabla 8.1 y del diagrama de Moody, tenemos que:

para la galería: $\varepsilon = 1.5$ mm,

$$\varepsilon/D = 0.0005, \quad f = 0.0169;$$

para la tubería: $\varepsilon = 0.075$ mm,

$$\varepsilon/D = 0.00005, \quad f = 0.011.$$

Las pérdidas de fricción serán:

$$h_{fg} = 0.0169\,\frac{4\,500}{3}\,\frac{(1.27)^2}{19.6} = 2.09\ \text{m}$$

$$h_{ft} = 0.011 \times \frac{860}{1.5}\,\frac{(5.08)^2}{19.6} = 8.30\ \text{m}$$

$$\Sigma h = 10.39\ \text{m}$$

y la carga neta:

$$H_n = 158.7 - 10.39 = 148.31\ \text{m}$$

Solución b). La potencia neta del sistema vale:

$$P = \eta_m\,\gamma Q\,H_n = 0.82 \times 1{,}000 \times 8.98 \times 148.31$$

$$P = 1\,092\,095.5\ \text{kg m/seg}$$

En caballos de vapor:

$$P = \frac{1\,092\,095.5}{75} = 14\,561.3\ CV$$

En kilovatios:

$$P = \frac{14\,561.3}{0.736} = 19\,784.3\ \text{kw}$$

Solución c). La eficiencia de todo el sistema es la relación, entre la potencia neta y la que se produciría con la carga bruta, al no ocurrir pérdidas en la conducción y en las máquinas.

La carga bruta es

$$H_b = 329 - 170.3 = 158.7\ \text{m}$$

y la eficiencia del sistema:

$$\eta_s = \frac{\eta_m\,\gamma Q\,H_n}{\gamma Q\,H_b} = \frac{\eta_m\,H_n}{H_b} =$$

$$= \frac{0.82 \times 148.31}{158.7} = 0.766;\ 76.6\ \text{por ciento.}$$

La eficiencia de la conducción resulta ser:

$$\eta_c = \frac{\gamma Q\,H_n}{\gamma Q\,H_b} = \frac{148.31}{158.7} = 0.935;$$

93.5 por ciento.

Solución d). De la ecuación de la energía, entre el vaso y la sección de la galería en la base de la cámara de oscilación, con $h_{fg} = 2.09$m de los cálculos anteriores, resulta entonces:

$$329 = N.C. + \frac{V_g^2}{2g} + h_{fg}$$

$$N.C. = 329 - \frac{(1.27)^2}{19.6} - 2.09 = 326.828\ \text{m}^*$$

Problema 9.5. El sifón mostrado en la Fig. 9.11 consiste en un tubo de acero soldado, de rugosidad $\varepsilon = 0.15$ mm, con una descarga de 1 000 lt/seg; el radio de las curvas es $R = 1.5\,D$. Determinar el diámetro comercial necesario y la carga de presión en el punto S.

Solución. En un primer tanteo, al despreciar las pérdidas locales, se supone $f = 0.016$. Con $L = 102.6$ m y $H = 3 - 0.6 = 2.40$ m, de la Ec. (9.9) resulta:

$$D \approx \sqrt[5]{\frac{0.0827 \times 102.6 \times 1^2}{2.4}\,0.016} \approx 0.56\ \text{m}$$

Puesto que considerar las pérdidas locales implicaría seguramente un diámetro mayor, se supone que $D = 0.60$ m, por lo que el área del tubo sería

$$A = \frac{\pi}{4}\,(0.6)^2 = 0.2827\ \text{m}^2$$

* Debido a que el flujo dentro de la galería se encuentra en la zona turbulenta, es posible emplear las fórmulas de tipo exponencial o logarítmico. Por ejemplo, con $N = 34$ en la fórmula de Kozeny, la pérdida de energía en la galería es:

$$h_{fg} = \frac{V_g^2\,L}{[8.86 \log D + N]^2\,D} =$$

$$= \frac{(1.27)^2 \times 4\,500}{[8.86 \log (3) + 34]^2 \times 3} = 1.655\ \text{m}$$

que es inferior al obtenido con la fórmula de Darcy.

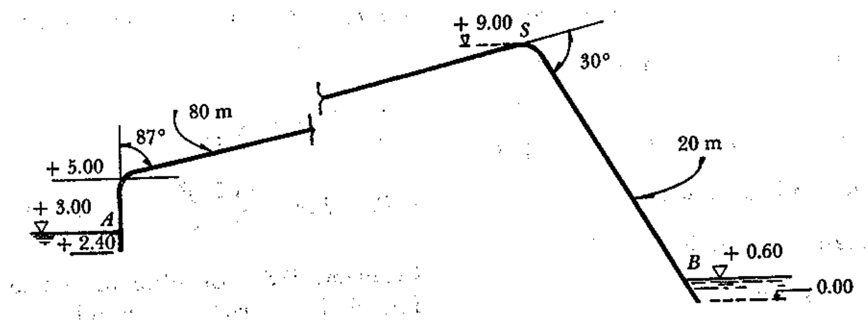


Figura 9.11. Sifón del problema 9.5.

y la velocidad:

$$V = \frac{1}{0.2827} = 3.54 \text{ m/seg}$$

Para la pérdida por fricción, el número de Reynolds aproximado para $\nu = 1.145 \times 10^{6}$ m²/seg, es el siguiente:

$$R_e = \frac{3.54 \times 0.6 \times 10^{6}}{1.145} = 1.855 \times 10^{6}$$

Con $\varepsilon/D = 0.00015/0.6 = 0.00025$, del diagrama de Moody $f = 0.0148$ y el coeficiente de pérdida por fricción, resulta:

$$f\frac{L}{D} = \frac{0.0148 \times 102.6}{0.6} = 2.531$$

Si se considera como coeficiente de pérdida por entrada, $K_e = 0.08$ y, de la Fig. 8.16a $C_c = 0.206$, entonces de la ecuación (8.19) los coeficientes de pérdida por curvatura son:

$$\text{Curva a } 87°: K_c = 0.206\,\frac{87}{90} = 0.20$$

$$\text{Curva a } 30°: K_c = 0.206\,\frac{30}{90} = 0.07$$

$$\text{Total: } 0.27$$

entonces,

$$1 + f\frac{L}{D} + K_e + K_c = 3.881$$

y con $A_s/A_1 = 1$, de la Ec. (9.8), vemos que:

$$V = \sqrt{\frac{19.6 \times 2.40}{3.881}} = 3.48 \text{ m/seg}$$

siendo el gasto:

$$Q = 0.2827 \times 3.48 = 0.984 \text{ m}^3\text{/seg}$$

o sea, como es 1.5 por ciento menor que el gasto deseado, el diámetro necesario es de 0.60 m.

La carga de presión en S se calcula de la ecuación de la energía entre A y S, así:

$$3.00 = 9.00 + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} \times (1 + fL/D + K_e + K_c)$$

luego entonces,

$$\frac{p}{\gamma} = -6.00 - \frac{V^2}{2g} \times (1 + fL/D + K_e + K_c)$$

donde L es ahora 82.60 m, y K_c únicamente es de la primera curva. Por tanto, los coeficientes de pérdida por fricción, entrada y curvatura respectivamente son:

$$f\frac{L}{D} = 0.0148 \times \frac{82.6}{0.6} = 2.04$$

$$K_e = 0.08$$

$$K_c = 0.20$$

siendo la suma total igual a 3.32. Por tanto, la carga de presión en el punto S vale:

$$\frac{p}{\gamma} = -6.00 - \frac{(3.48)^2}{19.6} \times 3.32 = -8.05 \text{ m}$$

De lo anterior, resulta en S una carga de presión inferior a la atmosférica, próxima a la de vaporización del agua (subcapítulo 1.7) y no recomendable.

Problema 9.6. Una bomba de 25 *CV* de potencia y 75 por ciento de eficiencia, debe abastecer un gasto de 6 m³/min de agua, a 10°C, a un recipiente cuyo nivel se encuentra 10 m arriba del cárcamo de bombeo. La tubería de conducción es de fierro fundido con incrustaciones ($\varepsilon = 0.76$ mm), con una longitud de 100 m, tres curvas de radio $R = 5D$ (dos de 45° y una de 90°) y una válvula con $K_v = 8$. Determinar el diámetro necesario en la tubería.

Solución. La potencia suministrada por la bomba a la tubería es:

$$P = 75 \times 0.75 \times 25 = 1\,406 \text{ kg m/seg}$$

y la carga de bombeo para $Q = 6/60 = 0.1$ m³/seg, la siguiente:

$$H_n = \frac{P}{\gamma Q} = \frac{1\,406}{1\,000 \times 0.1} = 14.06 \text{m}$$

Como se dispone de esta energía inmediatamente después de la bomba, de la ecuación de la energía resulta que

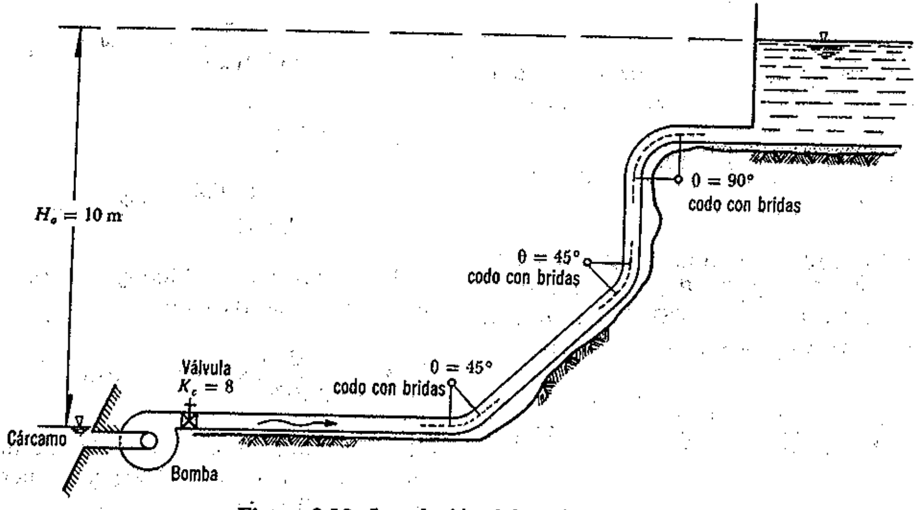


Figura 9.12. Instalación del problema 9.6.

$$14.06 = 10 + \frac{V^2}{2g} + f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} + K_c\frac{V^2}{2g} + K_v\frac{V^2}{2g}$$

$$4.06 = \frac{V^2}{2g}(1+f\,L/D+K_c+K_v) \quad (a)$$

Igual que en el problema anterior, se resuelve por iteraciones. Después de efectuar varios ciclos, se propone $D = 0.254$ m cuya área, velocidad y carga de velocidad son:

$$A = \frac{\pi}{4}(0.254)^2 = 0.05065\ \text{m}^2$$

$$V = \frac{0.1}{0.05065} = 1.974\ \text{m/seg}$$

$$\frac{V^2}{2g} = 0.199\ \text{m}$$

El número de Reynolds para $\nu = 0.0131$ cm²/seg es:

$$R_e = \frac{1.974 \times 0.254 \times 10^6}{1.31} = 3.827 \times 10^5$$

y para $\varepsilon/D = 0.076/25 = 0.003$ del diagrama de Moody, $f = 0.026$, se obtiene:

$$f\frac{L}{D} = \frac{0.026 \times 100}{0.254} = 10.24$$

De la Fig. 8.18, para codos a 45°, $C_c = 0.16$ y para 90° $C_c = 0.25$. Por lo cual, $K_c = 2 \times 0.16 + 0.25 = 0.57$. Por tanto, de la Ec. (9.8) o de la Ec. (a) nos da:

$$V = \sqrt{\frac{19.6 \times 4.06}{1 + 10.24 + 0.57 + 8}} = 2\ \text{m/seg}$$

siendo el gasto:

$$Q = 2 \times 0.05065 = 0.102\ \text{m}^3/\text{seg}$$

entonces, el diámetro de 254 mm es el adecuado.

Problema 9.7. Una bomba extrae agua ($\nu = 0.0112$ cm²/seg) desde un cárcamo y la entrega, a un tanque elevado, por una tubería —de 381 m de longitud y 102 mm de diámetro— de fierro fundido y asfaltado (Fig. 9.13). La tubería de succión es vertical de 1.73 m de longitud y está equipada con una válvula de pie. El tubo de descarga contiene dos codos regulares con bridas $R/D = 1.4$, una válvula *check* y una válvula de compuerta. Determinar la carga de succión h_s (antes de la bomba), la carga de bombeo h_d y la lectura en el manómetro del lado de la descarga p_d, cuando el gasto sea de 757 lt/min. Calcular la potencia en CV, de la bomba, si ésta tiene una eficiencia de 80 %.

Solución. Tubería de succión. Para $D = 102$ mm, de la Fig. 8.4 $\varepsilon/D = 0.0012$, para fierro fundido y asfaltado. La velocidad y el número de Reynolds en el tubo es:

$$V = \frac{4 \times 0.757}{60\pi(0.102)^2} = 1.544\ \text{m/seg};$$

$$\frac{V^2}{2g} = 0.12\ \text{m}$$

$$R_e = \frac{154.4 \times 10.2}{0.0112} = 1.41 \times 10^5$$

Del diagrama de Moody, $f = 0.0225$ y la pendiente de fricción:

$$S_f = \frac{0.0225}{0.102} \times 0.12 = 0.0265$$

El coeficiente de pérdida en la válvula de pie es $K = 0.8$ (Fig. 8.30) y la pérdida correspondiente:

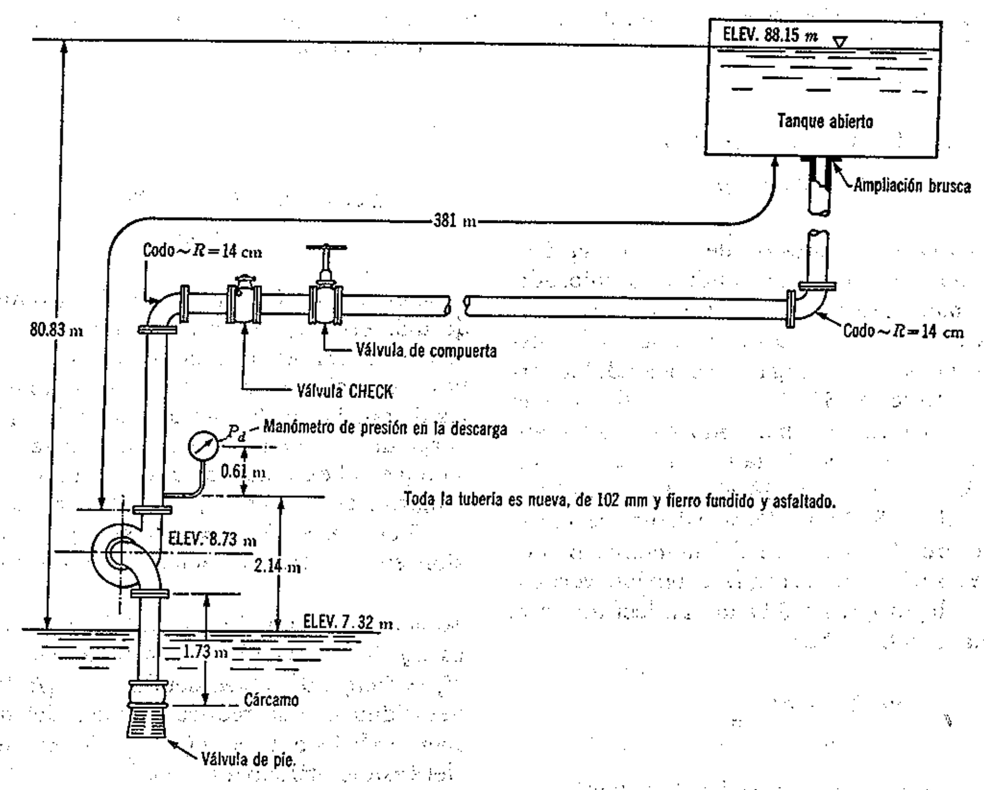


Figura 9.13. Instalación referente al problema 9.7.

$$h_v = 0.8 \times 0.12 = 0.096\ \text{m}$$

La bomba debe elevar el agua desde la altura de 7.32 m a la de 8.73 m. De esta manera la carga de succión es:

$$h_s = (8.73 - 7.32) + 0.0265 \times 1.73 + 0.096 = 1.552\ \text{m}$$

la cual es negativa, dado que corresponde al lado de succión. Tubería de descarga. La pérdida de fricción en la tubería de descarga es:

$$h_f = 0.0265 \times 381 = 10.10\ \text{m}$$

Los coeficientes de pérdida en los accesorios se obtienen de las Figs. 8.18 y 8.30.

Codo regular con bridas (90°), $K = 0.31 \quad \times 2 = 0.62$
Válvula check con bridas, $K = 2.00 \quad 2.00$
Válvula de compuerta con bridas, $K = 0.17 \quad 0.17$
Salida (A_a/A_1), $K = 1.00 \quad 1.00$

$K = 3.79$

y la pérdida de energía por los accesorios:

$$h = 3.79 \times 0.12 = 0.455\ \text{m}$$

La bomba debe elevar el agua desde la altura de 8.73 m a la de 88.15 m. La carga de bombeo será:

$$h_d = (88.15 - 8.73) + 10.10 + $$
$$+ 0.455 = 89.975 \text{ m}$$

La carga de presión del lado de la descarga y en el punto donde está colocado el manómetro, será igual a la carga estática más la pérdida de fricción en la descarga menos la carga de velocidad. La carga estática es 80.83 — 2.14 = 78.69 m. Las otras cantidades han sido calculadas anteriormente; por lo tanto, la carga de presión requerida es 78.69 + 0.45 + 10.10 — — 0.12 = 89.12 m. Para calcular la carga de presión al centro del manómetro será necesario considerar la conexión vertical de altura igual a 0.61 m. La lectura en el manómetro será:

$$\frac{p_d}{\gamma} = \frac{89.12 - 0.61}{1\,000} =$$
$$= 88.51 \text{ m}; \quad p_d = 8.851 \text{ kg/cm}^2.$$

La carga total de bombeo es igual al desnivel entre los dos tanques, más las pérdidas totales en la conducción, a saber:

$$H_t = 80.83 + 0.0265 \times 1.73 +$$
$$+ 0.096 + 10.10 + 0.455 = 91.527 \text{ m}$$

y la potencia que debe proporcionarse a la bomba, la siguiente:

$$P = \frac{\gamma Q H_t}{75\,\eta} =$$
$$= \frac{1\,000 \times 0.757 \times 91.527}{75 \times 60 \times 0.8} = 19.2 \text{ CV}$$

Problema 9.8. En una tubería horizontal, de diámetro D, se mantiene una presión p_1 a la entrada; a lo largo de la misma hay n orificios laterales localizados a iguales distancias, cada uno de los cuales descarga un gasto q (lt/seg). Calcular la presión p en el extremo cerrado del tubo si su longitud es $l = 600$ m; su diámetro $D = 15$ cm; $n = 20$; $q = 1$ lt/seg, y la presión en el extremo inicial es de 1.5 atm.

Solución. Como el gasto total en el tubo es nq, la velocidad a la entrada resulta: $V_1 = 4\,nq/\pi D^2 = \alpha\, n$, siendo $\alpha = 4q/\pi D^2$; velocidad que se reduce después del primer orificio a $V_2 = \alpha(n-1)$ y después del i-ésimo orificio a $V_i = \alpha[n-(i-1)]$, por lo cual $V_n = \alpha$ y $V_{n+1} = 0$.

La distancia a entre cada orificio es $a = 1/(n+1)$.

La pérdida de fricción para el tramo i es:

$$h_i = f_i \frac{a}{D}\frac{V_i^2}{2g} = f_i \frac{a\,\alpha^2}{2\,g\,D}[n-(i-1)]^2$$

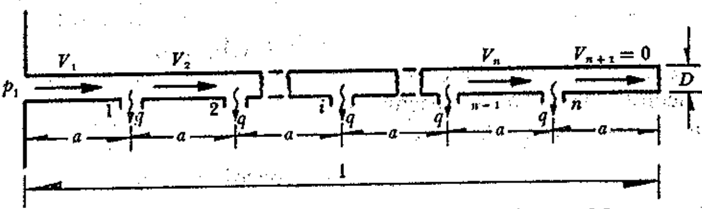


Figura 9.14. Ilustración referente al problema 9.8.

Como f no cambia, la pérdida total de fricción será:

$$H_f = \sum_{i=1}^{n} h_i = \frac{f\,a\,\alpha^2}{2\,g\,D}\sum_{i=1}^{n}[n-(i-1)]^2$$

puesto que:

$$\sum_{i=1}^{n}[n-(i-1)]^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

resulta que:

$$H_f = \frac{4}{3}\frac{f\,q^2\,l}{\pi^2\,g\,D^5}\,n\,(2n+1)$$

Substituyendo a $q = \pi D^2 V_1/4\,n$, en la ecuación anterior, se obtiene:

$$H_f = \frac{1}{3}\frac{f\,l}{D}\frac{V_1^2}{2\,g}\left(1 + \frac{1}{2\,n}\right)$$

Ya que $(f\,l\,V_1^2/2\,g\,D)$ es la pérdida por fricción en todo el tubo, en el supuesto de que no se hicieran las derivaciones, para n grande, resulta entonces:

$$H_f = \frac{1}{3}H$$

Con los datos proporcionados: $q = 1$ lt/seg, $l = 600$ m, $D = 15$ cm, $n = 20$ y $f = 0.03$, se obtiene $H_f = 2.679$ m.

La carga de presión en el extremo cerrado del tubo se calcula de la ecuación de energía siguiente:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} = \frac{p}{\gamma} + H_f$$

Con $V_1 = n\,\alpha = 1.132$ m/seg, $p/\gamma = 12.389$ m

La ecuación de energía, entre un punto en el orificio de entrada y el punto i (con C_i velocidad de descarga del orificio i), conduce a que

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2\,g} = \frac{p_i}{\gamma} + \frac{C_i^2}{2\,g} + \frac{f\,a}{D} \times$$
$$\times \sum_{m=1}^{i}\frac{V_m^2}{2\,g} + K\frac{V_i^2}{2\,g}$$

donde:

$$V_m = \alpha[n-(m-1)]$$
$$K = 3$$

por lo que entonces:

$$C_i^2 = \frac{2}{\rho}(p_1 - p_i) + V_1^2 - 3\,V_i^2 - \frac{f\,a}{D}\alpha^2 \times$$
$$\times \sum_{m=1}^{i}[n-(m-1)]^2 \qquad (a)$$

ahora resulta:

$$\sum_{m=1}^{i}[n-(m-1)]^2 =$$
$$= \sum_{m=1}^{i}[(n+1)^2 - 2\,m\,(n+1) + m^2] =$$
$$= i(n+1)^2 - 2\,(n+1)\sum_{m=1}^{i} m + \sum_{m=1}^{i} m^2$$

puesto que:

$$\sum_{m=1}^{i} m = \frac{i}{2}(i+1)$$
$$\sum_{m=1}^{i} m^2 = \frac{1}{6}\,i\,(i+1)(2\,i+1)$$

se obtiene así:

$$\sum_{m=1}^{i}[n-(m-1)]^2 =$$

$$= \frac{i}{6}\left[6\,n\,(n+1-i) + \right.$$
$$\left. + \, i\,(2\,i-3) + 1\right] = S_{n,\,i}$$

por lo tanto, resulta:

$$C_i^2 = \frac{2}{\rho}(p_1 - p_i) + \alpha^2\,[n^2 -$$
$$- 3\{n-(i-1)\}^2 - f\frac{a}{D}S_{n,\,i}] \quad (b)$$

El diámetro d_i del orificio i se determina de

$$q = \frac{\pi\,d_i^2}{4}\,C_i \qquad (c)$$

Puesto que $\alpha = 4\,q/\pi\,D^2 = 0.0566$ m/seg, de la Ec. (b) se pueden obtener las velocidades C_i, correspondientes a los orificios desde $i = 1$ hasta 20; de la Ec. (c) los diámetros de los mismos. Los cálculos se indican en la siguiente tabla.

i	$S_{n,\,i}$	C_i, en m/seg	d_i, en cm
1	400✓	9.392	1.164
2	761✓	9.055	1.186
5	1 630	8.191	1.247
10	2 485	7.263	1.324
15	2 815	6.894	1.359
20	2 870	6.845	1.364

9.4 Sistema de tubos en paralelo

En ocasiones resulta necesario derivar varios ramales de un mismo tubo (figura 9.15), para lo cual se pueden presentar dos casos:

1. Se conoce la pérdida entre A y B y se desea determinar el gasto en cada ramal.
2. Se conoce el gasto total y se desea determinar la pérdida entre A y B, así como la distribución del gasto en cada ramal.

Ambos casos ocurren independientemente de las energías que existan en A y B. El primero no ofrece dificultad puesto que una vez conocida la pérdida, se puede calcular el gasto en cada ramal en base a que funciona con una carga igual a la pérdida determinada; esto es, que con $\Delta H_i = \Delta H_2 = \ldots = \Delta H$, la pérdida de energía vale:

$$\Delta H = K_i \frac{V_i^2}{2\,g} \qquad (9.11a)$$

por lo que:

$$V_i = \sqrt{\frac{2g\,\Delta H}{K_i}} \qquad (9.11b)$$

donde:

$$K_i = f_i \frac{L_i}{D_i} + \Sigma K_{li}$$

siendo el gasto:

$$Q_i = A_i\,V_i \qquad (9.12)$$

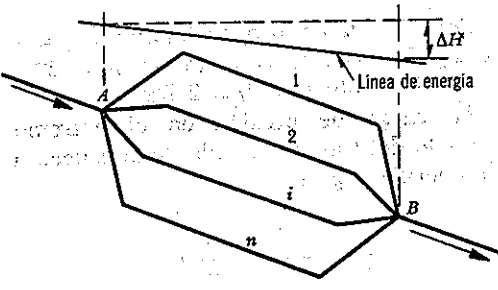


Figura 9.15. Sistema en derivación.

Para el segundo caso, se supone la existencia de una tubería (ficticia) que transporta el gasto total, equivalente a todos los ramales, con una pérdida en la misma de $\Delta H_e = \Delta H_1 = \Delta H_2 = \ldots = \Delta H_n$.

Al substituir las Ecs. (9.11b) y (9.12) en la de continuidad, obtenemos:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$$

y al simplificar, resulta:

$$\frac{D_e^2}{\sqrt{K_e}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{D_i^2}{\sqrt{K_i}}$$

o bien:

$$\frac{K_e}{D_e^4} = \left[\frac{1}{\Sigma\,(D_i^2/\sqrt{K_i})}\right]^2 \qquad (9.13)$$

o sea, la condición de equivalencia entre los conductos, en los que se elige un valor arbitrario para D_e o K_e y el otro se calcula con la Ec. (9.13); luego entonces,

$$\Delta H = K_e \frac{V_e^2}{2\,g} = \frac{8\,K_e}{\pi^2\,D_e^4}\,\frac{Q^2}{g}$$

Substituyendo la Ec. (9.13), resulta:

$$\Delta H = \frac{8}{\left[\pi \sum_{i=1}^{n} (D_i^2/\sqrt{K_i})\right]^2}\,\frac{Q^2}{g} \quad (9.14)$$

Una vez que la pérdida ΔH se conoce, el problema se torna en uno del primer caso.

Problema 9.9. En la Fig. 9.16 se muestra un sistema con un tanque (en el cual hay la presión p sobre la superficie libre) que conecta con otro recipiente a través de una tubería maestra con tres derivaciones; siendo la geometría del sistema: $L_1 = 400$ m, $L_2 = 180$ m, $L_3 = 50$ m, $L_4 = 400$ m; $D_1 = D_4 = 200$ mm, $D_2 = D_3 = 100$ mm, $f_1 = f_4 = 0.02$, $f_2 = f_3 = 0.025$. Calcular la presión p necesaria en el recipiente A, para que el gasto $Q_4 = 40$ lt/seg. Despreciar las pérdidas locales.

Solución. La pérdida de energía entre los puntos C y B se determina con el gasto en el tubo cuatro. Eligiendo como plano de referencia la elevación de la superficie libre en los dos recipientes, de la ecuación de la energía entre A y B, se tiene:

$$\frac{p}{\gamma} = (\Delta H)_1 + (\Delta H)_4 + \frac{V_4^2}{2\,g}$$

el área, la velocidad y la carga de velocidad en el tubo cuatro son:

$$A_1 = A_4 = 0.7854\ (0.2)^2 = 0.0314\ \text{m}^2$$

$$\frac{V_4^2}{2\,g} = \frac{1.62}{19.6} = 0.083\ \text{m}$$

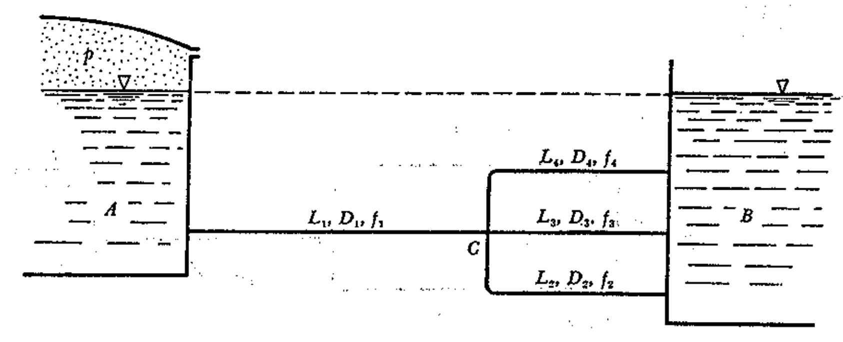


Figura 9.16. Sistema de tubos del problema 9.9.

Como únicamente se considera la pérdida por fricción, de la fórmula de Darcy-Weisbach, tenemos:

$$(\Delta H)_4 = 0.02 \frac{400}{0.20} \times 0.083 = 3.306 \text{ m}$$

y, de las Ecs. (9.11b) y (9.12), resulta:

$$Q_3 = 0.7854\,(0.1)^2 \times$$
$$\times \sqrt{\frac{19.6 \times 3.306 \times 0.1}{0.025 \times 50}} = 0.01791 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_2 = 0.7854\,(0.1)^2 \times$$
$$\times \sqrt{\frac{19.6 \times 3.306 \times 0.1}{0.025 \times 180}} = 0.0094 \text{ m}^3/\text{seg}$$

conduce a un gasto total, igual a

$$Q_1 = 0.040 + 0.01791 + 0.0094 =$$
$$= 0.06731 \text{ m}^3/\text{seg}$$

La velocidad, carga de velocidad y pérdida en el tubo 1 son:

$$V_1 = \frac{0.06731}{0.0314} = 2.14 \text{ m/seg};$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{4.59}{19.6} = 0.234 \text{ m}$$

$$(\Delta H)_1 = 0.02 \frac{400}{0.2} \times 0.234 = 9.36 \text{ m}$$

finalmente, la carga de presión en el recipiente A, vale:

$$\frac{p}{\gamma} = 9.36 + 3.304 + 0.083 = 12.75 \text{ m}$$

o bien,

$$1.275 \text{ kg/cm}^2$$

Problema 9.10. El sistema mostrado en la Fig. 9.17 tiene la siguiente geometría: $H = 24$ m; $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 100$ m; $D_1 = D_2 = D_4 = 100$ mm; $D_3 = 200$ mm; además, $f_1 = f_2 = f_4 = 0.025$ y $f_3 = 0.02$; el coeficiente de pérdida en la válvula $K_v = 30$. Calcular los gastos en cada tubo, despreciando las pérdidas locales.

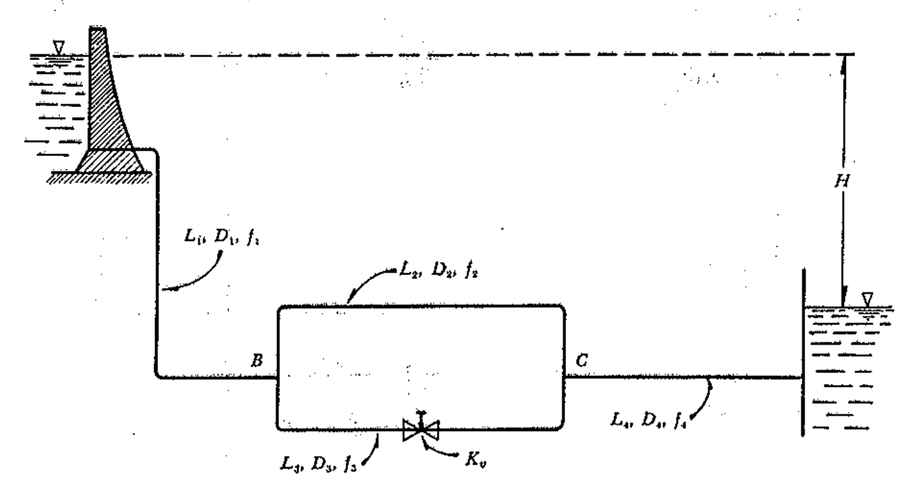


Figura 9.17. Tubería del problema 9.10.

Solución. La pérdida de energía entre B y C está dada por la Ec. (9.14). Como en los tubos uno, dos y cuatro, únicamente hay pérdidas por fricción, resulta entonces:

$$K_2 = f_2 \frac{L_2}{D_2} = 0.025 \frac{100}{0.1} = 25$$

$$K_1 = K_4 = 25$$

En el tubo tres, tenemos:

$$K_3 = f_3 \frac{L_3}{D_3} + K_v = \frac{0.02 \times 100}{0.2} + 30 = 40$$

Para la Ec. (9.14), nos resulta así:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{D_i^2}{\sqrt{K_i}} = \frac{0.01}{\sqrt{25}} + \frac{0.04}{\sqrt{40}} = 0.00833$$

$$\left[\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{D_i^2}{\sqrt{K_i}}\right]^2 = (3.14 \times 0.00833)^2 =$$
$$= 0.000685$$

De la Ec. (9.14), por otra parte:

$$\Delta H = \frac{8}{0.000685 \times 9.8} Q_4^2 = 1\,192\,Q_4^2$$

Además, con $D_1 = D_4$, en la ecuación de continuidad, obtenemos:

$$\frac{V_1^2}{2g} = \left(\frac{D_4}{D_1}\right)^4 \frac{V_4^2}{2g} = \frac{V_4^2}{2g}$$

$$\frac{V_4^2}{2g} = \frac{Q_4^2}{2g\,(\pi D_4^2/4)^2} =$$
$$= \frac{Q_4^2}{19.6\,(0.7854 \times 0.01)^2} = 828\,Q_4^2$$

De la ecuación de la energía entre A y D, nos da:

$$24 = K_1 \frac{V_4^2}{2g} + 1\,192\,Q_4^2 + K_4 \frac{V_4^2}{2g} + \frac{V_4^2}{2g}$$

Substituyendo términos:

$$24 = (2 \times 25 \times 828 + 1\,192 + 828)\,Q_4^2$$

$$Q_4 = \sqrt{\frac{24}{43\,420}} = 0.0235 \text{ m}^3/\text{seg}$$

La pérdida de energía entre B y C, será

$$\Delta H = 1\,191\,(0.0235)^2 = 0.658 \text{ m}$$

Para el tubo 2, lo siguiente:

$$0.658 = 25 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{19.6 \times 0.658}{25}} = 0.718 \text{ m/seg}$$

$$Q_2 = 0.7854 \times 0.01 \times 0.718 =$$
$$= 0.00564 \text{ m}^3/\text{seg}$$

En la misma forma:

$$Q_3 = 0.7854 \times 0.04 \sqrt{\frac{19.6 \times 0.658}{40}} =$$
$$= 0.01784 \text{ m}^3/\text{seg}$$

y como comprobación:

$$Q = 0.00564 + 0.01784 = 0.02348 \text{ m}^3/\text{seg}$$

que es prácticamente el gasto total.

9.5 Redes abiertas

Decimos que una red es abierta cuando los tubos que la componen se ramifican, sucesivamente, sin intersectarse después para formar circuitos. Los extremos finales de las ramificaciones pueden terminar

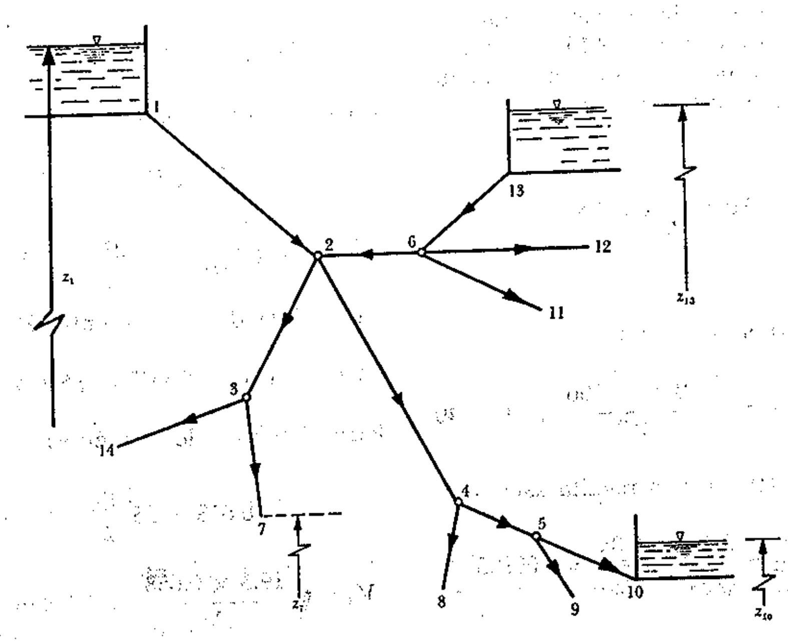


Figura 9.18. Ejemplo de red abierta.

en un recipiente o descargar libremente a la atmósfera.

Un ejemplo de red abierta se esquematiza en la Fig. 9.18. De acuerdo con los niveles de los distintos recipientes y la longitud de los tubos, se deberá conocer o suponer la dirección del gasto en los diversos tramos.

De la ecuación de la energía, entre el recipiente superior y los extremos de los tubos, resulta entonces:

$$z_1 - \left(z_j + \frac{V_j^2}{2\,g} \right) = \sum_{i=1}^{j} h \qquad (9.15)$$

donde z_j es el nivel de la superficie libre del agua si el tubo descarga a un recipiente o bien, el nivel del centro de gravedad de la sección final, si el tubo descarga a la atmósfera; el subíndice j corresponde a las características hidráulicas en el punto j. El término $\sum_{i=1}^{j} h$ es la suma de las pérdidas de energía de los tubos que se encuentran en el recorrido, desde el punto 1 hasta el extremo j; toma signo positivo para h en aquellos elementos en que la dirección del gasto coincide con la dirección del recorrido y negativo en caso contrario.

Por ejemplo, para el extremo 7, la Ec. (9.15) es:

$$z_1 - \left(z_7 + \frac{V_7^2}{2\,g} \right) = h_{12} + h_{23} + h_{37}$$

y de acuerdo con la dirección supuesta de los gastos en la Fig. 9.18 para el extremo 13, se obtiene:

$$z_1 - \left(z_{13} + \frac{V_{13}^2}{2\,g} \right) = h_{12} - h_{26} - h_{613}$$

donde h_{ij} representa la suma de las pérdidas locales y de fricción en el tramo que va del nudo i al nudo j.

Además, en cada punto de ramificación (nudo) se satisface la ecuación de continuidad, siguiente:

$$\Sigma\, Q = 0 \qquad (9.16)$$

y se establece como convención que los gastos que lleguen al nudo tengan signo negativo; y positivo los que salgan del nudo.

Si el problema es de revisión, el resultado será un sistema de tantas ecuaciones, del tipo (9.15), como extremos finales tenga la red; y de tantas ecuaciones del tipo (9.16) como nudos existan. Para la red de la Fig. 9.18 se pueden establecer ocho ecuaciones del primer tipo y cinco del segundo.

Si el problema es el diseño de una red en la que se conoce su geometría y los gastos de cada tubo, se deberán elegir —por lo menos— (l-m) diámetros de los l tramos que componen la red (m, número de extremos finales) para evitar la indeterminación del problema, ya que las ecuaciones de nudo se convierten en identidades.

Problema 9.11. Determinar la magnitud y sentido de los gastos en los tubos que forman el sistema mostrado en la Fig. 9.19. Los tubos son de fierro fundido, con 15 años de servicio (N de Kozeny = 30) y tienen la siguiente geometría:

$D_1 = 0.55$ m	$L_1 = 680$ m
$D_2 = 0.60$ m	$L_2 = 520$ m
$D_3 = 0.80$ m	$L_3 = 800$ m

Solución. Primero, es necesario suponer un sentido de los gastos en el nudo D y

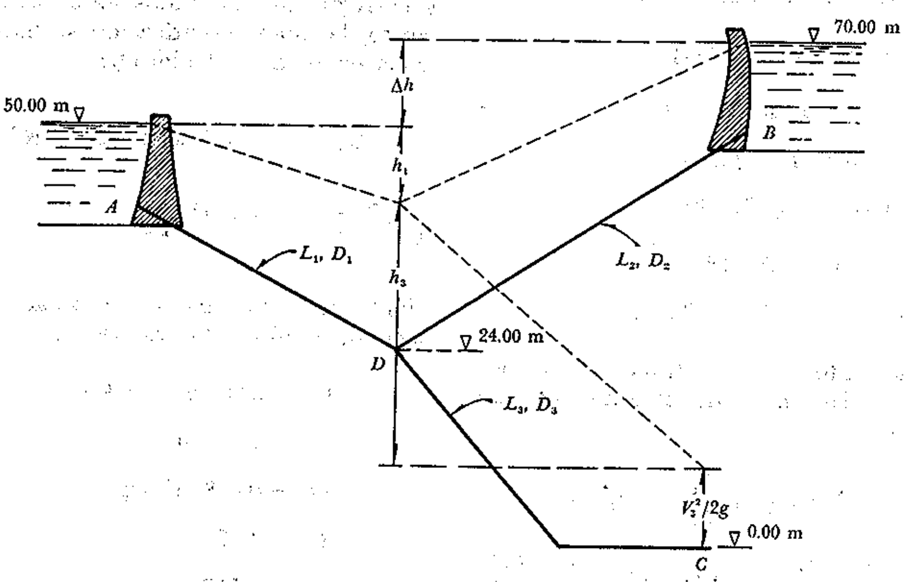


Figura 9.19. Sistema de tubos del problema 9.11.

luego resolver y comprobar esta suposición; por ejemplo, se acepta que A y B alimentan a C, esto es:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3$$

Por otra parte, siendo la pérdida por fricción la única importante, h_1 será la pérdida en el tubo 1; $(h_1 + \Delta h)$ en 2; y h_3 la pérdida en 3. Esta última en el supuesto de despreciar la carga de velocidad en el tubo tres.

De la fórmula de Kozeny se obtiene:

$$Q_1 = \frac{\pi}{4} D_1^2 (8.86 \log D_1 + N) \sqrt{\frac{h_1}{L_1} D_1}$$

$$Q_2 = \frac{\pi}{4} D_2^2 (8.86 \log D_2 + N) \sqrt{\frac{h_1 + \Delta h}{L_2} D_2}$$

$$Q_3 = \frac{\pi}{4} D_3^2 (8.86 \log D_3 + N) \sqrt{\frac{h_3}{L_3} D_3}$$

de la geometría del sistema, $h = 20$ m, $h_3 = 50 - h$. Además, las constantes son:

$D_1 = 0.55$ m; $D_1^2 = 0.303$;

$C_1 = 8.86 \log D_1 + 30 = 27.7$; $D_1^2 C_1 = 8.393$

$D_2 = 0.60$ m; $D_2^2 = 0.360$;

$C_2 = 28.04$; $D_2^2 C_2 = 10.08$

$D_3 = 0.80$ m; $D_3^2 = 0.640$;

$C_3 = 29.14$; $D_3^2 C_3 = 18.65$

Por lo tanto, las tres últimas ecuaciones, substituidas en la de continuidad, conducen a:

$$D_1^2 C_1 \sqrt{D_1 \frac{h_1}{L_1}} + D_2^2 C_2 \sqrt{D_2 \frac{(h_1 + \Delta h)}{L_2}} = D_3^2 C_3 \sqrt{D_3 \frac{(50 - h_1)}{L_3}}$$

que con valores de las constantes resulta:

$$h_1^2 - 66 h_1 + 914.93 = 0$$

de ahí que:

$$h_1 = 19.81 \text{ m}$$

lo cual significa que sí existe raíz real de la ecuación y que, por lo tanto, es correcta la suposición del sentido de gastos en el nudo D.

Con este valor obtenemos los siguientes:

$$Q_1 = 0.834 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_2 = 1.696 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_3 = 2.54 \text{ m}^3/\text{seg}$$

se puede calcular $V_3^2/2g$, a saber:

$$\frac{V_3^2}{2g} = \frac{16 Q^2}{\pi^2 2 g D_3^4} = 1.306 \text{ m}$$

y corregir los resultados anteriores. En efecto, la única modificación se hace en la ecuación para calcular Q_3:

$$Q_3 = \frac{\pi}{4} [D_3^2 (8.86 \log D_3 + N] \sqrt{\frac{(50 - h_1 - 1.306)}{L_3} D_3}$$

Planteando nuevamente la ecuación de segundo grado, ésta resulta ser:

$$h_1^2 - 64.01 h_1 + 859 = 0$$

$$h_1 = 19.16 \text{ m}$$

$$Q_1 = 0.818 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_2 = 1.682 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_3 = 2.517 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Problema 9.12. Una tubería principal A, abastece al sistema mostrado en la figura 9.20; en el punto de unión el manómetro M marca una presión de 4.3 atm. Las características de los tres tubos son iguales: $L = 210$ m, $D = 100$ mm, $f = 0.025$. Calcular la carga h para que el gasto alimentado al recipiente B sea de 5 lt/seg, con las tres válvulas abiertas.

Solución. El área de los tubos es:

$$A = 0.7854 (0.1)^2 = 0.007854 \text{ m}^2$$

la velocidad y carga de velocidad del tubo que conduce el gasto Q_B son:

$$V_B = \frac{0.005}{0.007854} = 0.637 \text{ m/seg}$$

$$\frac{V_B^2}{2g} = 0.0207 \text{ m}$$

Las velocidades en los otros tramos son las siguientes:

$$V_o = \frac{Q_o}{0.007854} = 127.3 Q_o$$

$$V_o^2 = 16\,205 Q_A^2$$

y también

$$V_A^2 = 16\,205 Q_A^2$$

el coeficiente de pérdida por fricción es el mismo en los tres tubos:

$$K_f = f \frac{L}{D} = 0.025 \frac{210}{0.1} = 52.5$$

de la ecuación de la energía, entre A y B ($p_A/\gamma = 43$ m), se tiene que

$$43 = h + 52.5 \frac{V_A^2}{2g} + (52.5 + 1)\, 0.0207$$

$$43 = h + 43\,406 Q_A^2 + 1.11 \qquad (a)$$

ahora, entre A y C, tenemos:

$$43 = 52.5 \frac{V_A^2}{2g} + (52.5 + 1) \frac{V_o^2}{2g}$$

o bien

$$43 = \frac{52.5 \times 16\,205 Q_A^2}{19.6} +$$

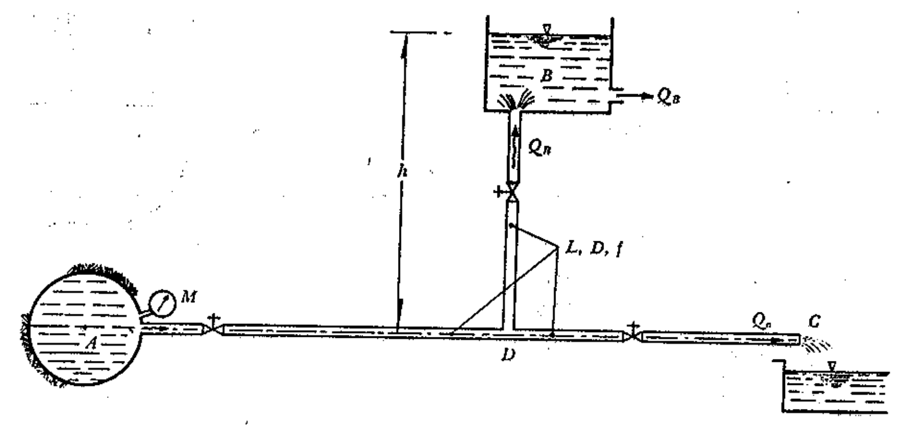


Figura 9.20. Instalación del problema 9.12.

$$+\frac{53.5 \times 16\,205}{19.6} Q_c^2 \qquad (b)$$

Además, de la ecuación de continuidad, resulta:

$$Q_A = 0.005 + Q_c \qquad (c)$$

$$Q_A^2 = 0.000025 + 0.01\, Q_c + Q_c^2 \quad (d)$$

En el sistema de Ecs. (a), (b) y (d), existen tres incógnitas: h, Q_A y Q_c; si substituimos la Ec. (d) en la (b), obtenemos:

$$43 = 43\,406\,(0.000025 + 0.01\, Q_c + Q_c^2) + 44\,233\, Q_c^2$$

$$43 = 1.09 + 434\, Q_c + 43\,406\, Q_c^2 + 44\,233\, Q_c^2$$

$$Q_c^2 + 0.00495\, Q_c - 0.000478 = 0$$

la solución de esta ecuación será:

$$Q_c = -0.002475 \pm 0.022$$

El signo menos no tiene significado físico por las condiciones en las que se planteó el problema, por lo tanto,

$$Q_c = 0.0195 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Substituyendo este resultado en la ecuación (c), nos da

$$Q_A = 0.0245 \text{ m}^3/\text{seg}$$

finalmente, en la (a), resulta que

$$h = 15.84 \text{ m}$$

Problema 9.13. En la Fig. 9.21 se presenta una red abierta y su geometría. Se desea que los gastos sean: $Q_5 = 25$ lt/seg, $Q_4 = 30$ lt/seg, hacia los tanques C y D respectivamente y que $Q_2 = 11$ lt/seg desde la bomba. Determinar los diámetros D_1, D_3 y D_4 necesarios para que se satisfagan las condiciones impuestas. El factor de fricción en todos los tubos es $f = 0.014$ y los tanques A y B abastecen a C y D.

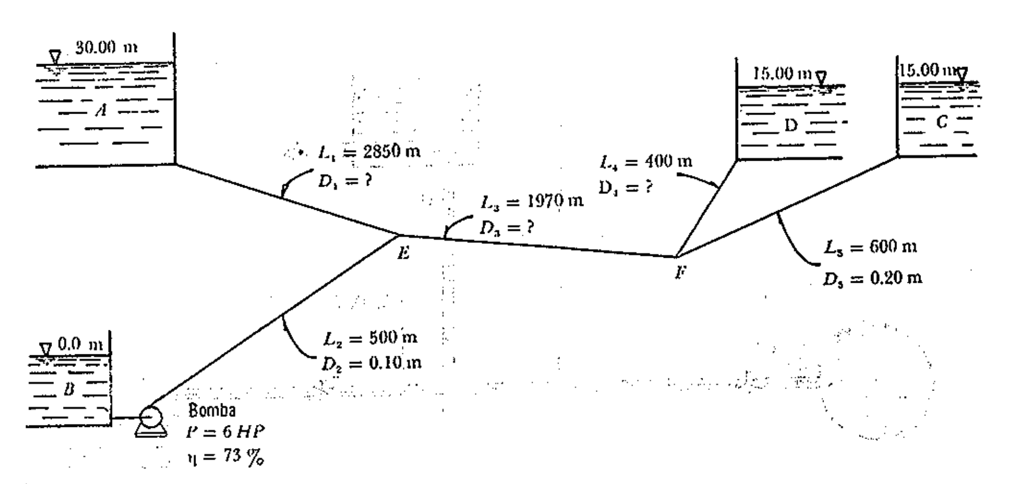


Figura 9.21. Red abierta del problema 9.13.

Solución. La carga producida por la bomba es

$$P = \frac{\gamma\, Q\, H_B}{76\, \eta}$$

$$H_B = \frac{76\, \eta\, P}{\gamma\, Q} = \frac{76 \times 0.73 \times 6}{1\,000 \times 0.011} = 30.3 \text{ m}$$

De la ecuación de continuidad en los nudos, los gastos son:

$$Q_3 = Q_4 + Q_5 = 0.055 \text{ m}^3/\text{seg}$$

$$Q_1 = Q_3 - Q_2 = 0.044 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Las velocidades y cargas de velocidad, en los tubos, son las que siguen:

$$V_1 = \frac{0.044}{0.7854\, D_1^2} = \frac{0.056}{D_1^2};$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{(0.056)^2}{19.6\, D_1^4} = \frac{0.000161}{D_1^4}$$

$$V_2 = \frac{0.011}{0.7854 \times 0.01} = 1.4 \text{ m/seg};$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = 0.1 \text{ m}$$

$$V_3 = \frac{0.055}{0.7854\, D_3^2} = \frac{0.07}{D_3^2} \text{ m/seg};$$

$$\frac{V_3^2}{2g} = \frac{0.00025}{D_3^4}$$

$$V_4 = \frac{0.030}{0.7854\, D_4^2} = \frac{0.0382}{D_4^2};$$

$$\frac{V_4^2}{2g} = \frac{0.000074}{D_4^4}$$

$$V_5 = \frac{0.025}{0.7854 \times 0.04} = 0.796 \text{ m/seg};$$

$$\frac{V_5^2}{2g} = 0.0323 \text{ m}$$

La ecuación de la energía entre F y C, es como sigue:

$$E_F = 15.00 + \left(0.014\,\frac{600}{0.20} + 1\right) \times 0.0323 = 16.389 \text{ m}$$

La ecuación de energía entre F y D, es:

$$E_F = 16.389 = 15.00 + \left(0.014\,\frac{400}{D_4} + 1\right) \times \frac{0.000074}{D_4^4}$$

$$1.389 = \frac{0.000414}{D_4^5} + \frac{0.000074}{D_4^4}$$

Esta ecuación se satisface para $D_4 = 0.20$ m.

La ecuación de energía entre B y E, como se indica:

$$30.3 + 0.1 = E_B + 0.014\,\frac{500}{0.10}\, 0.1$$

$$E_B = 30.4 - 7.0 = 23.4 \text{ m}$$

La ecuación de energía entre A y E, es:

$$30.00 = 23.4 + 0.014\,\frac{2\,850}{D_1}\,\frac{0.000161}{D_1^4}$$

$$D_1 = \sqrt[5]{\frac{0.00642}{6.6}} = \sqrt[5]{0.000973} = 0.25 \text{ m}$$

La ecuación de energía entre E y F, será:

$$23.4 = 16.389 + 0.014\,\frac{1\,970}{D_3}\,\frac{0.00025}{D_3^4}$$

$$D_3 = \sqrt[5]{\frac{0.0069}{7.011}} = \sqrt[5]{0.000983} = 0.25 \text{ m}$$

9.6 Redes cerradas

9.6.1 Planteamiento del problema

Se conoce como red cerrada aquella en la cual los conductos que la componen se cierran formando circuitos (Fig. 9.22). Es el caso de las redes de distribución de agua potable en ciudades o las de agua para industrias.

La solución del problema se basa en dos tipos de ecuaciones: la de nudo y la de pérdida de energía.

a) Ecuación de nudo. Por razones de continuidad (Ec. 9.16) en cada nudo se debe satisfacer que:

$$\sum_{j \varepsilon i} Q_{ij} + Q_i = 0 \qquad \text{para } i = 1, \dots, n \quad (9.17)$$

donde

Q_{ij} gasto que va del nudo j al nudo i (negativo si llega al nudo i y positivo si sale);

Q_i gasto que sale o entra al nudo i (con la misma convención de signos).

El símbolo $j \varepsilon i$ se lee: "para todos los nudos j conectados al i a través de un tubo". Por ejemplo, si el sentido de los gastos fuera el mostrado en la Fig. 9.22, la Ec. (9.17), para el nudo 3, indicaría que

$$Q_{35} + Q_{34} + Q_{39} - Q_{32} + Q_3 = 0$$

donde el gasto Q_3 es conocido.

b) Ecuación de pérdida. La pérdida por fricción en cada tramo está dada por la fórmula de fricción correspondiente, donde al substituir la velocidad expresada por la ecuación:

$$V_{ij} = \frac{4\, Q_{ij}}{\pi\, D_{ij}^2}$$

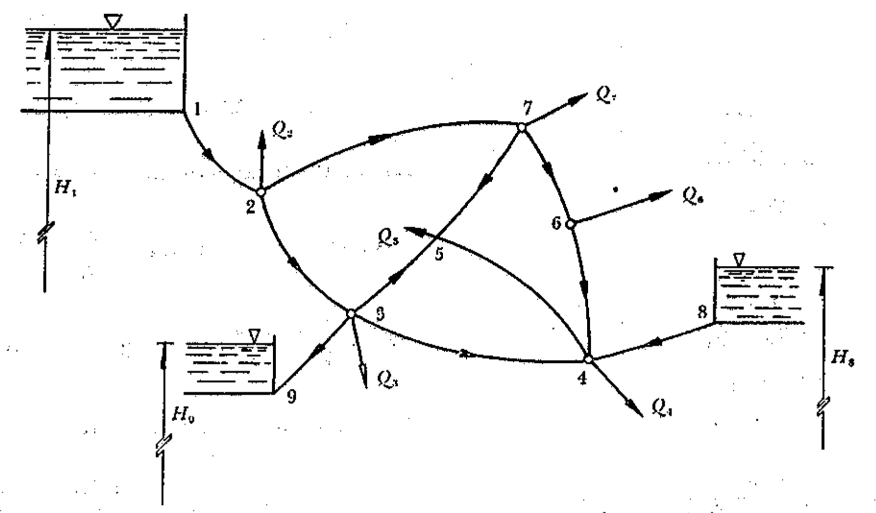


Figura 9.22. Ejemplo de red cerrada.

resulta:

$$h_{ij} = a_{ij}\, Q^N_{ij} \qquad (9.18)$$

donde a_{ij} es una constante del tramo ij. Por ejemplo, si la fórmula de fricción es la de Darcy-Weisbach, se tiene:

$$h_{ij} = \frac{8\, f_{ij}\, L_{ij}}{\pi^2\, g\, D^5_{ij}}\, Q^2_{ij}$$

Esto es, $N = 2$, y entonces:

$$a_{ij} = \frac{8\, f_{ij}\, L_{ij}}{\pi^2\, g\, D^5_{ij}}$$

en cambio, si fuese la de Hazen-Williams, $N = 1.851$ y

$$a_{ij} = \frac{L_{ij}}{(0.279\, C_{Hij}\, D_{ij}^{2.63})^{1.851}}$$

La utilización de las Ecs. (9.17) y (9.18) para la solución de una red, conduce a un sistema de ecuaciones que es posible resolver, por un método de iteraciones o con computadora —con base en la estimación de valores iniciales—, los cuales se aproximan a la solución exacta mediante correcciones cíclicas.

Existen, en los factores iniciales, tres posibilidades a escoger:

1. Estimación de los valores de Q_{ij}.
2. Estimación de los valores h_{ij}.
3. Estimación simultánea de valores de Q_{ij} y h_{ij}.

Se presentarán aquí las dos primeras que son las más comunes. La última es poco frecuente, para la cual se utiliza el método de McIlroy, presentado en la referencia 52.

Con el fin de hacer posible el cálculo, la aplicación de los métodos de iteración se limita a redes de abastecimiento de agua por grupos; a conductos de distribución principal de redes locales en forma de anillos cerrados o a zonas parciales de una red local, reuniendo en grupos las demandas de cada usuario.

9.6.2 Método de Cross para el balance de pérdidas

En una red cerrada cualquiera se eligen circuitos elementales como los formados en la Fig. 9.22 (por ejemplo, el circuito 2-7-5-3-2 mostrado en la Fig. 9.23) en los cuales se conocen los gastos $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ que entran o salen de cada nudo.

En cada nudo se satisface la Ec. (9.17); además, la pérdida de energía entre dos nudos de la red (cualquiera que sea el recorrido que se elige para llegar de uno a otro) es la suma algebraica de las pérdidas en cada tramo (calculadas con la Ec. 9.18). Para ello, es necesario también establecer una convención de signos, por ejemplo: la pérdida en un determinado tramo tiene signo positivo si la dirección del gasto en el tramo coincide con la del recorrido; y negativo en caso contrario.

El recorrido completo en cada circuito elemental (partiendo y llegando al mismo nudo) implica que:

$$\sum_{i=1}^{k} h_{ij} = 0 \qquad (9.19)$$

donde k es el número de tramos que forma el circuito elemental. Para el recorrido de cada circuito es necesario especificar que sea siempre con el mismo sentido, por ejemplo, el sentido de las manecillas del reloj.

La Ec. (9.19) es llamada ecuación de circuito y vale para todos los circuitos elementales de la red.

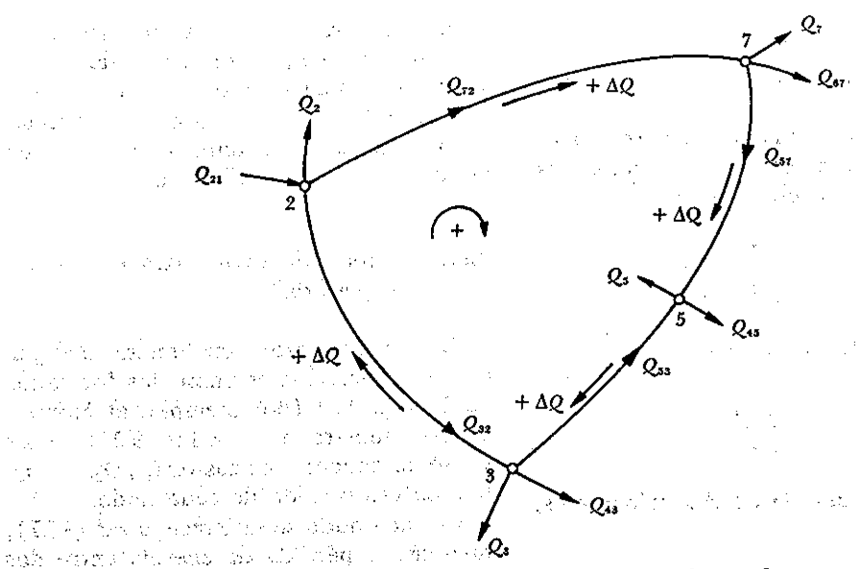


Figura 9.23. Circuito elemental en una red cerrada.

Para proceder a la solución, primero se estiman los gastos en los tramos, haciendo que se satisfaga la ecuación de nudo con los valores estimados y los ya conocidos. Si $+\Delta Q$ es una corrección atribuible a todos los tramos de un mismo circuito elemental (Fig. 9.23), al recorrer éste en el sentido de las manecillas del reloj, la Ec. (9.19) implica que:

$$
\begin{aligned}
& h_{72} + h_{57} - h_{53} - h_{32} = \\
& = a_{72}(Q_{72} + \Delta Q)^N + a_{57}(Q_{57} + \Delta Q)^N - \\
& - a_{53}(Q_{53} - \Delta Q)^N - a_{32}(Q_{32} - \Delta Q)^N = 0
\end{aligned}
$$

Por un desarrollo en forma de binomio, donde se desprecian términos de orden superior, resulta entonces:

$$
\Delta Q = -\frac{a_{72} Q^N_{72} + a_{57} Q^N_{57} - a_{53} Q^N_{53} - a_{32} Q^N_{32}}{N(a_{72} Q^{N-1}_{72} + a_{57} Q^{N-1}_{57} + a_{53} Q^{N-1}_{53} + a_{32} Q^{N-1}_{32})}
$$

o bien, en el caso general, tenemos:

$$
\Delta Q = -\frac{\sum_1^k \left(a_{ij} Q^{N-1}_{ij} |Q_{ij}| \right)}{N \sum_1^k \left| a_{ij} Q^{N-1}_{ij} \right|} \tag{9.20}
$$

donde el gasto Q_{ij} y la corrección ΔQ son positivos cuando su sentido coincide con el de recorrido del circuito en el sentido de las manecillas del reloj, o negativo en caso contrario. La iteración se realiza hasta que se satisfaga la ecuación de circuito.

La rapidez en la convergencia del método es muy diversa y depende, tanto de la estimación de los valores iniciales como del tipo y tamaño de la red, pero especialmente del número de tramos que se unen en cada nudo. Mientras que en redes pequeñas se alcanza una buena aproximación con tres o cuatro iteraciones, en redes grandes se suelen necesitar de treinta a cincuenta. La computadora hace rápidamente el cálculo, y ello nos facilita un ahorro considerable de tiempo.

La convergencia del método se puede acelerar si el valor de la corrección ΔQ en cada paso se multiplica por un factor (que varía entre 0.50 y 1.00) cuya magnitud depende del tipo de red y del grado de exactitud deseada.

El problema se presenta como sigue:

Datos conocidos:

1. Longitud, diámetro y rugosidad de los tubos.
2. Gastos que entran o salen de la red.

Se desean saber:

1. Los gastos de todos los tramos.
2. Las cargas de presión en los nudos de la red.

La secuela de pasos se explica a continuación, aunado con las columnas de una tabla auxiliar, cuando el cálculo es manual (Prob. 9.14, tabla 9.2).

1. División de la red en circuitos elementales (Cols. 1 y 2). Registro de los valores conocidos (Cols. 3 y 4) y cálculo de las constantes a (Col. 5).
2. Primera estimación del gasto en todos los tramos (Col. 6). El signo de Q será positivo si se estima que sigue el *sentido* de las manecillas del reloj en el recorrido del circuito, y negativo en caso contrario.
3. Multiplicación de los valores de a por los gastos correspondientes en el primer circuito (Col. 7) en valor absoluto.
4. Multiplicación de los productos $a|Q|$ de la Col. 7, por los gastos Q correspondientes del primer circuito, obteniendo la pérdida h, cuyo signo corresponde al atribuido al gasto Q (Col. 8).
5. Suma algebraica de $\Sigma h = \Sigma a_i Q_i^2$ en el primer circuito (Col. 8).
6. Suma absoluta de los valores de $a_i Q_i$ en el primer circuito (Col. 7).
7. La corrección resulta de:

$$
\Delta Q = -\frac{\Sigma\ a_i Q_i^2}{\Sigma\ |a_i Q_i|}
$$

y se anota con su signo en todos los tramos de un mismo circuito (Col. 9).

8. En tramos que pertenecen a dos circuitos se deben agregar las correcciones que resulten del siguiente circuito, con signo contrario (Col. 9).
9. El cálculo en los siguientes circuitos se hace en la forma indicada en los pasos 3 a 8, hasta terminar la primera etapa de distribución en toda la red.
10. Se hace la suma de los gastos estimados, más las correcciones, y se realiza una segunda etapa en la misma forma.
11. El cálculo finaliza cuando las correcciones ΔQ alcancen el grado de corrección deseado.

Si se consideran como incógnitas los diámetros y los gastos de cada tramo, una vez calculados éstos se pueden obtener las cargas de presión, en cada nudo, a partir de las fórmulas de pérdida. Para una red compuesta de k tramos y m nudos, el número de incógnitas es entonces:

$$
I = 2k
$$

Para el cálculo de las I incógnitas, existen E ecuaciones disponibles. Las de nudo proporcionan $m - 1$ ecuaciones, ya que la ecuación para el último nudo resulta de las anteriores. Las de circuito proporcionan l ecuaciones para l circuitos elementales.

Se considera que el número de circuitos es:

$$
l = k - m + 1
$$

y el número de ecuaciones:

$$
E = (m - 1) + (k - m + 1) = k
$$

De la comparación entre I y E resulta que

TABLA 9.2. Proceso de cálculo del Prob. 9.14.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Circuito	Tramo	D mm	L m	$a \times 10^{-3}$ seg²/m⁵	$Q \times 10^3$ m³/seg	$a\|Q\|$ seg/m²	$aQ^2 \times 10^3$ m	$\Delta Q \times 10^3$ m³/seg
I	1-2	200	1000	7.27	+25.0	182	+4545	−1.3
	2-4	150	800	28.20	+16.0	451	+7220	−1.3
	4-3	125	500	48.25	−10.0	483	−4825	−1.3+1.2
	3-1	200	800	5.81	−25.0	145	−3630	−1.3
						1261	+3310	

$$\Delta Q = -\frac{+3310}{2 \times 1261} = -1.3$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
II	4-6	125	500	48.25	+11.0	531	+5845	−1.2
	6-5	125	500	48.25	− 9.0	435	−3910	−1.2
	5-3	150	500	17.65	−15.0	265	−3970	−1.2
	3-4	125	500	48.25	+10.0+1.3	545	+6160	−1.2
						1776	+4125	

$$\Delta Q = -\frac{+4125}{2 \times 1776} = -1.2$$

10	11	12	13	14	15	16	17	18
$Q \times 10^3$ m³/seg	$a\|Q\|$ seg/m²	$aQ^2 \times 10^3$ m	$\Delta Q \times 10^3$ m³/seg	$Q \times 10^3$ m³/seg	$a\|Q\|$ seg/m²	$aQ^2 \times 10^3$ m	$\Delta Q \times 10^3$ m³/seg	Q m³/seg
+23.7	172	+4080	−0.5	+23.2	169	+3910	−0.0	+0.0232
+14.7	415	+6085	−0.5	+14.2	400	+5680	−0.0	+0.0142
−10.1	488	−4920	−0.5+0.1	−10.5	507	−5325	−0.0+0.0	−0.0105
−26.3	153	−4010	−0.5	−26.8	156	−4160	−0.0	−0.0268
	1228	+1235			1232	+105		

$$\Delta Q = -\frac{+1235}{2 \times 1228} = -0.5 \qquad \Delta Q = -\frac{+105}{2 \times 1232} = -0.0$$

10	11	12	13	14	15	16	17	18
+ 9.8	474	+4645	−0.1	+ 9.7	469	+4550	−0.0	+0.0097
−10.2	492	−5020	−0.1	−10.3	497	−5120	−0.0	−0.0103
−16.2	286	−4630	−0.1	−16.3	288	−4685	−0.0	−0.0163
+10.1+0.5	512	+5430	−0.1	+10.5+0.0	507	+5325	−0.0	+0.0105
	1764	+ 420			1761	+ 70		

$$\Delta Q = -\frac{+420}{2 \times 1764} = -0.1 \qquad \Delta Q = -\frac{+70}{2 \times 1761} = -0.0$$

se deben escoger m de las incógnitas para resolver el problema; esto es, los diámetros o los gastos.

Problema 9.14 La red mostrada en la Fig. 9.24 tiene la geometría que se indica y a ella llegan o salen los gastos también mostrados. Las constantes a se calculan, a partir de la fórmula de Kutter, con un coeficiente $m = 0.20$ (tubos de acero) y para $N = 2$.

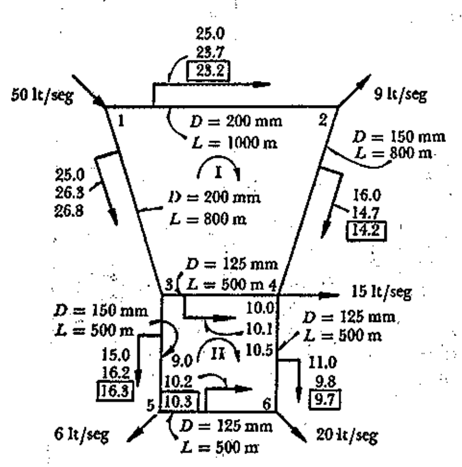


Figura 9.24. Red del problema 9.14.

Solución. Se presenta en la tabla 9.2 y en la Fig. 9.24 se muestran los diferentes ajustes que experimentaron los gastos estimados, así como el sentido de los mismos. La columna 18 muestra el valor final de los gastos.

9.6.3 Método de Cornish para el balance de gastos (Ref. 52)

Son conocidas las cargas de presión en los nudos a los cuales llegan gastos ($-Q_{ij}$), o salen gastos ($+Q_{ij}$). Se desean obtener dichos gastos y las pérdidas en los tramos o las cargas piezométricas en los mismos (Fig. 9.25).

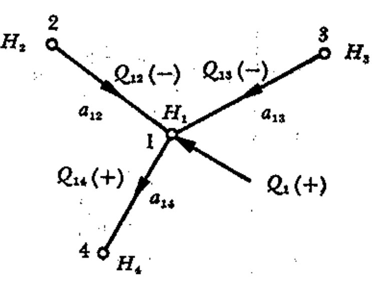


Figura 9.25. Designaciones para las condiciones de nudo en el método de Cornish.

Las pérdidas en los tramos h_{ij} se estiman inicialmente y se corrigen por iteraciones, a partir de los gastos que llegan o salen del nudo.

La condición de nudo implica que se satisfaga la Ec. (9.17).

Por otra parte, si h_{ij} representa la pérdida de energía en el tramo del nudo j al i; y H_i la carga piezométrica en el nudo i, se tiene:

$$Q_{ij} = \left(\frac{h_{ij}}{a_{ij}}\right)^{1/N} = C_{ij}\ (H_j - H_i)^{1/N} \quad (9.21)$$

donde

$$C_{ij} = \frac{1}{(a_{ij})^{1/N}} \quad (9.22)$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones (9.17) es el siguiente:

$$\sum_{j \varepsilon i}\left(\frac{h_{ij}}{a_{ij}}\right)^{1/N} + Q_i = 0, \text{ para } i=1,\ldots,n \quad (9.23)$$

Si ΔH_i es la corrección de la carga piezométrica en el nudo i, en alguna etapa de la iteración, la ecuación correspondiente a ese nudo sería:

$$\sum_{j \varepsilon i}\left(\frac{h_{ij} + \Delta H_i}{a_{ij}}\right)^{1/N} + Q_i =$$

TABLA 9.3. Solución del problema 9.15

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nudo *Nr.*	*Tramo* *Nr.*	*D* mm	*L* m	$a\times10^{-8}$ $\frac{seg^2}{m^5}$	*h* m	$Q\times10^3$ $\frac{m^3}{seg}$	$(Q\times10^3)/h$ $\frac{m^2}{seg}$	Δh m	*h* m	$Q\times10^3$ $\frac{m^3}{seg}$	$(Q\times10^3)/h$ $\frac{m^2}{seg}$
2	1–2	200	1 000	7.27	−5.0	−26.2	+ 5.24	+0.5	−4.5	−24.9	+ 5.53
	3–2	125	300	28.95	+3.0	+10.2	+ 3.40	+0.5	+3.5	+11.0	+ 3.12
	4–2	150	500	17.65	+3.0	+13.0	+ 4.33	+0.5+0.4	+3.9	+14.9	+ 3.82
						− 3.0	+12.97			+ 1.0	+12.47
						$\Delta H_2 = -\frac{2(-3.0)}{12.97} = +0.5$				$\Delta H_2 = -\frac{2(+1.0)}{12.47} = -0.2$	
4	2–4	150	500	17.65	−3−0.5	−14.1	+ 4.03	−0.4	−3.9+0.2	−14.5	+ 3.92
	5–4	150	300	10.59	+1.0	+ 9.7	+ 9.70	−0.4−0.4	+0.2	+ 4.3	+21.50
	6–4	125	500	48.25	+3.0	+ 7.9	+ 2.63	−0.4	+2.6	+ 7.3	+ 2.81
						+ 3.5	+16.36			− 2.9	+28.23
						$\Delta H_4 = -\frac{2(+3.5)}{16.36} = -0.4$				$\Delta H_4 = -\frac{2(-2.9)}{28.23} = +0.2$	
5	3–5	125	500	48.25	−1.0	− 4.6	+ 4.60	+0.4	−0.6	− 3.5	+ 5.83
	4–5	150	300	10.59	−1.0+0.4	− 7.5	+12.50	+0.4	−0.2−0.2	− 6.1	+15.25
	6–5	125	300	28.95	+2.0	+ 8.3	+ 4.15	+0.4	+2.4	+ 9.1	+ 3.79
						− 3.8	+21.25			− 0.5	+24.87
						$\Delta H_5 = -\frac{2(-3.8)}{21.25} = +0.4$				$\Delta H_5 = -\frac{2(-0.5)}{24.87} = 0.0$	

		13	14	15	16	17	18	19	20
Nudo *Nr.*	*Tramo* *Nr.*	Δh m	h_t m	$Q\times10^3$ $\frac{m^3}{seg}$	$(Q\times10^3)/h_t$ $\frac{m^2}{seg}$	Δh m	h_t m	$Q\times10^3$ $\frac{m^3}{seg}$	$(Q\times10^3)/h_t$ $\frac{m^2}{seg}$
2	1–2	+0.2	−4.7	−25.4	+ 5.40	+0.1	−4.6	−25.2	+ 5.48
	3–2	+0.2	+3.3	+10.7	+ 3.24	+0.1	+3.4	+10.8	+ 3.18
	4–2	+0.2+0.2	+3.5	+13.8	+ 3.94	+0.1−0.1	+3.7	+14.5	+ 3.92
				− 0.9	+12.58			+ 0.1	+12.58
				$\Delta H_2 = -\frac{2(-0.9)}{12.58} = +0.1$				$\Delta H_2 = -\frac{2(+0.1)}{12.58} = 0.0$	
4	2–4	−0.2	−3.5+0.1	−14.3	+ 3.97	+0.1	−3.5	−14.1	+ 4.03
	5–4	−0.2+0.0	+0.4	+ 6.1	+15.25	+0.1−0.1	+0.4	+ 6.1	+15.25
	6–4	−0.2	+2.8	+ 7.6	+ 2.71	+0.1	+2.9	+ 7.8	+ 2.69
				− 0.6	+21.93			− 0.2	+21.97
				$\Delta H_4 = -\frac{2(-0.6)}{21.93} = +0.1$				$\Delta H_4 = -\frac{2(-0.2)}{21.97} = 0.0$	
5	3–5	0.0	−0.6	− 3.5	+ 5.83	+0.1	−0.5	− 3.2	+ 6.40
	4–5	0.0	−0.4−0.1	− 6.9	+13.80	+0.1	−0.4	− 6.1	+15.25
	6–5	0.0	+2.4	+ 9.1	+ 3.79	+0.1	+2.5	+ 9.3	+ 3.72
				− 1.3	+23.42			0.0	+25.37
				$\Delta H_5 = -\frac{2(-1.3)}{23.42} = +0.1$				$\Delta H_5 = -\frac{2(0.0)}{25.37} = 0.0$	

$$= \sum_{j \varepsilon i} \left(\frac{h_{ij} + \Delta H_i}{h_{ij}/Q_{ij}^N} \right)^{1/N} + Q_i =$$

$$= \sum_{j \varepsilon i} Q_{ij} \left(1 + \frac{\Delta H_i}{h_{ij}} \right)^{1/N} + Q_i = 0$$

donde el signo de cada término de la suma se elige de modo que sea, negativo cuando el gasto es hacia el nudo y positivo en caso contrario.

Desarrollando el radical como un binomio, sin considerar términos de orden superior, se obtiene:

$$\sum_{j \varepsilon i} Q_{ij} \left(1 + \frac{1}{N} \frac{\Delta H_i}{h_{ij}} \right) + Q_i = 0$$

Por lo tanto, la corrección de la carga de presión en el nudo i es:

$$\Delta H_i = -N \left[\frac{Q_i + \sum_{j \varepsilon i} Q_{ij}}{\sum_{j \varepsilon i} (Q_{ij}/h_{ij})} \right] \quad (9.24)$$

La iteración termina hasta que se satisface en cada nudo la ecuación de continuidad (9.17).

El problema se presenta como sigue:

Datos conocidos

1. Longitud, diámetro y rugosidad de los tubos.
2. Cargas de presión en cada nudo.

Datos que se desean

1. Los gastos que llegan o salen del nudo.
2. Las pérdidas de carga en los tramos.

La secuela de pasos se explica a continuación, juntamente con las columnas de una tabla auxiliar, cuando el cálculo se realiza en forma manual (Prob. 9.15, tabla 9.3), para $N = 2$.

1. Designación de los nudos y asignación de las direcciones de los gastos (Cols. 1 a 5).
2. Determinación de los valores de a_{ij} (Col. 5).
3. Primera estimación de las pérdidas en los tramos (Col. 6); se pone el signo negativo a la pérdida correspondiente a los gastos que llegan al nudo, y positivo en caso contrario.
4. Divisiones de las diferencias en las cargas de presión h_{ij}, a través del adecuado valor de a_{ij}. De la raíz de los cocientes resulta el gasto $Q_{ij} = \sqrt{h_{ij}/a_{ij}}$; el signo pertenece al de h_{ij} (Col. 7).
5. Suma algebraica de los gastos Q en cada nudo (Col. 7).
6. Cálculo del cociente Q_{ij}/h_{ij} (Col. 8).
7. Suma de los cocientes Q_{ij}/h_{ij} en un nudo (Col. 8).
8. Cálculo de la corrección ΔH_i (con $N = 2$) mediante la ecuación:

$$\Delta H_i = -2 \left[\frac{Q_i + \sum_{j \varepsilon i} Q_{ij}}{\sum_{j \varepsilon i} (Q_{ij}/h_{ij})} \right]$$

Este valor se suma algebraicamente a todas las diferencias de cargas de presión en un nudo (Col. 9).

9. A los tramos que pertenecen a varios nudos, además del ΔH_i calculado en el nudo, se suman los correspondientes a los de los otros nudos con su signo original (Col. 10).
10. El cálculo del segundo nudo —y de los siguientes— se realiza en la misma forma como en los pasos del 5 al 10; se continúa el cálculo con el primer nudo para la segunda corrección, hasta lograr que los gastos no cambien y su suma algebraica valga cero.

Problema 9.15. La red mostrada en la

Fig. 9.26 especifica las cargas de presión en los nudos 1, 3 y 6. La carga de presión H_1 queda determinada por el recipiente alimentador, mientras que las cargas H_3 y H_6 en los sitios de derivación, quedan determinadas por las presiones de aprovisionamiento necesarias. Puesto que se conocen las dimensiones de los tramos y de las cargas de presión, en los sitios de entrada y salida, el sistema se debe calcular por el método de compensación de gastos. Las constantes de fricción se calculan por la fórmula de Kutter, para $m = 0.20$ y $N = 2$.

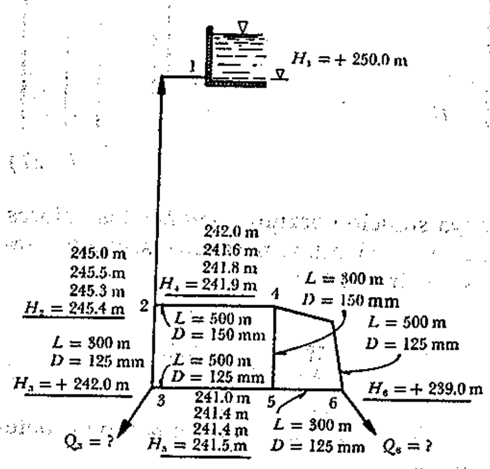


Figura 9.26. Red del problema 9.15.

Solución. Se presenta en la tabla 9.3. En la Fig. 9.26 se muestran los diferentes ajustes que experimentaron las cargas estimadas, así como el resultado final de los mismos.

9.6.4 Solución de redes mediante computadora digital

Diferentes procedimientos de solución con computadora se han planteado en el análisis de redes de agua potable (Ref. 53). Las dificultades en la solución consisten principalmente en que los sistemas de ecuaciones resultantes no son lineales. También se trata de encontrar un procedimiento de convergencia acelerada en el cálculo de los valores finales de la red.

Se parte de una red cerrada, tan general como la esquematizada en la Fig. 9.22, de la que se conoce su geometría (longitudes, diámetros, factores de fricción de todos los elementos), así como los gastos extraídos de la red y concentrados en los nudos. Deben satisfacerse las condiciones de frontera —que pueden ser los niveles piezométricos especificados en ciertos nudos— y que corresponden a tanques de nivel constante.

El problema consiste en determinar las cargas piezométricas en cada nudo; éste queda solucionado si se resuelve el sistema de ecuaciones (9.17). La Ec. (9.21) se escribe en la manera siguiente:

$$Q_{ij} = C_{ij} \left| H_j - H_i \right|^{1/N} \frac{(H_j - H_i)}{|H_j - H_i|}$$

o bien

$$Q_{ij} = C_{ij} \frac{(H_j - H_i)}{|H_j - H_i|^{1-1/N}} \quad (9.25)$$

que directamente proporciona el signo del gasto, de acuerdo con la convención establecida: negativo si llega al nudo y positivo si sale de él.

El sistema 9.17 queda entonces así:

$$\sum_{j \varepsilon i} C_{ij} \frac{(H_j - H_i)}{|H_j - H_i|^{1-1/N}} + Q_i = 0;$$

$$\text{para } i = 1, \ldots, n \quad (9.26)$$

formado por n ecuaciones con las n incógnitas $H_1, \ldots, H_n$; j puede tomar valores de 1 a m, siendo m el número total

de nudos (variable) unidos al i por medio de un tubo, incluyendo los de cargas piezométricas constantes. El símbolo $j \varepsilon i$ se lee: para todos los tubos j que llegan al nudo i.

El sistema no es lineal y para su solución es común utilizar el método de iteración de Newton-Raphson, el cual se explica a través de los siguientes pasos:

1. El sistema de ecuaciones por resolver es del tipo:

$$\begin{aligned} f_1(H_1, \ldots, H_n) &= 0 \\ f_2(H_1, \ldots, H_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(H_1, \ldots, H_n) &= 0 \end{aligned}$$

Se suponen valores iniciales H_i de las incógnitas, que forman así el vector siguiente:

$$\underset{1}{\mathbf{H}} = \left(\underset{1}{H_1}, \underset{1}{H_2}, \ldots, \underset{1}{H_n}\right)$$

el cual es necesario corregir mediante el vector de correcciones $\underset{1}{\Delta H}$.

2. Se calculan, con los valores de $\underset{1}{\mathbf{H}}$, los de las funciones f_j; a saber:

$$\underset{1}{f_j}(\underset{1}{\mathbf{H}})$$

y el jacobiano de las funciones f_j, definido como sigue:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \underset{1}{H_1}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \underset{1}{H_2}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial \underset{1}{H_n}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \underset{1}{H_1}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \underset{1}{H_2}} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial \underset{1}{H_n}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial \underset{1}{H_1}} & \dfrac{\partial f_n}{\partial \underset{1}{H_2}} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial \underset{1}{H_n}} \end{vmatrix}$$

3. Con el vector de correcciones de los valores H_i, inicialmente supuestos, tenemos que

$$\underset{1}{\Delta \mathbf{H}} = \left(\underset{1}{\Delta H_1}, \underset{1}{\Delta H_2}, \ldots, \underset{1}{\Delta H_n}\right)$$

y con el jacobiano, se forma el sistema lineal siguiente:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \underset{1}{H_1}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \underset{1}{H_2}} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial \underset{1}{H_n}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial \underset{1}{H_1}} & \cdots & & \dfrac{\partial f_n}{\partial \underset{1}{H_n}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underset{1}{\Delta H_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{1}{\Delta H_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underset{1}{f_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \underset{1}{f_n} \end{vmatrix} \qquad (9.27)$$

cuya solución permite obtener los valores de las incógnitas, para una segunda etapa de iteración:

$$\underset{2}{\mathbf{H}_i} = \underset{1}{\mathbf{H}_i} + \underset{1}{\Delta \mathbf{H}_i}$$

4. Se repite el procedimiento y obtenemos:

$$\underset{k}{\mathbf{H}_i} = \underset{k-1}{\mathbf{H}_i} + \underset{k-1}{\Delta \mathbf{H}_i} \qquad (9.28)$$

hasta que los valores de f_j sean cero o menores que la aproximación deseada.

Sin embargo, el método clásico de Newton-Raphson conduce —en muchos casos— a una lenta convergencia; en ocasiones a una divergencia, lo que consume tiempo de máquina.

F. González y A. Capella (Ref. 54), después de probar diferentes métodos en el análisis de la red interna de la ciudad de

México, han propuesto una modificación al método clásico de Newton-Raphson, que reúne las ventajas deseadas. Para dicho trabajo se dispone de un programa de computadora digital en el Instituto de Ingeniería de la UNAM. El método consiste en hacer una modificación a la forma de la Ec. (9.28), la cual se explica a continuación.

En cualquier etapa de la iteración el vector $\underset{k}{\mathbf{H}_i}$ define un punto en un espacio n dimensional. Además, los valores de la serie de funciones $\underset{k}{f_j}(\underset{k}{\mathbf{H}_i})$, obtenidas a partir de $\underset{k}{\mathbf{H}_i}$, corresponden a errores en la solución que implica la aceptación de $\underset{k}{\mathbf{H}_i}$ como valores finales de las incógnitas. La suma de los errores cuadráticos determina la función que sigue:

$$F = \sum_{j=1}^{n} f_j^2(\underset{k}{\mathbf{H}_i}) \qquad (9.29)$$

la cual sería cero si $\underset{k}{\mathbf{H}_i}$ fuese la solución correcta del sistema (9.25), pues esto implica que todas las funciones f_j valgan cero. Puede demostrarse que, en una determinada etapa de la iteración, el vector $\underset{k-1}{\Delta \mathbf{H}_i}$ señala una dirección sobre la cual la función F decrece. Sin embargo, la mejor convergencia se logra si, en lugar de aceptar la magnitud total de la corrección $\underset{k-1}{\Delta \mathbf{H}_i}$ como en la Ec. (9.28), se acepta una magnitud proporcional a ésta. Es decir, que

$$\underset{k}{\mathbf{H}_i} = \underset{k-1}{\mathbf{H}_i} + a_0 \underset{k-1}{\Delta \mathbf{H}_i} \qquad (9.30)$$

donde a_0 se escoge de tal manera que la función F sea mínima en la dirección dada, que puede adoptar valores comprendidos en el intervalo $0 \leqslant a_0 \leqslant L$, donde L puede ser incluso, mayor que 1.

Para encontrar a_0, que hace mínima a F sobre dicha dirección, se utilizó el método de búsqueda directa en una dirección de Fibonacci, que reduce al mínimo el tiempo de cálculo (Ref. 54).

El hecho de que la función F decrezca hasta un mínimo, en la dirección del vector $\underset{k-1}{\Delta H_i}$, implica que dicha función sea unimodal dentro del intervalo $0 \leqslant a_0 \leqslant L$; esto es, hay un número $0 \leqslant a_0 \leqslant L$ tal, que F decrece estrictamente para $a \leqslant a_0$ y crece estrictamente para $a \geqslant a_0$.

Por inducción se puede demostrar que la cantidad NF (comprendida en el intervalo L) para la cual se produce el mínimo de F, es:

$$NF_n = NF_{n-1} + NF_{n-2}; \quad n \geqslant 2 \qquad (9.31)$$

donde $NF_0 = NF_1 = 1$.

Los NF_n son los números de Fibonacci cuya secuencia se puede generar de la Ec. (9.31) en la forma:

n	=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 .....
NF_n	=	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55 .....

de tal manera que $NF_{20} > 10\,000$. La Ec. (9.31) también se escribe así:

$$\frac{NF_n}{NF_{n-1}} = 1 + \frac{NF_{n-2}}{NF_{n-1}}$$

Es posible demostrar que NF_n/NF_{n-1} se aproxima al valor $(\sqrt{5}+1)/2 \approx 1.62$ cuando n es grande y, por lo tanto, NF_{n-2}/NF_{n-1} se aproxima al valor 0.62. Esto se puede ver a partir de la secuencia de números antes generada, para $n = 10$; por lo tanto, los dos primeros valores a_1 y a_2 se deben elegir a una distancia 0.62 L de ambos extremos del intervalo.

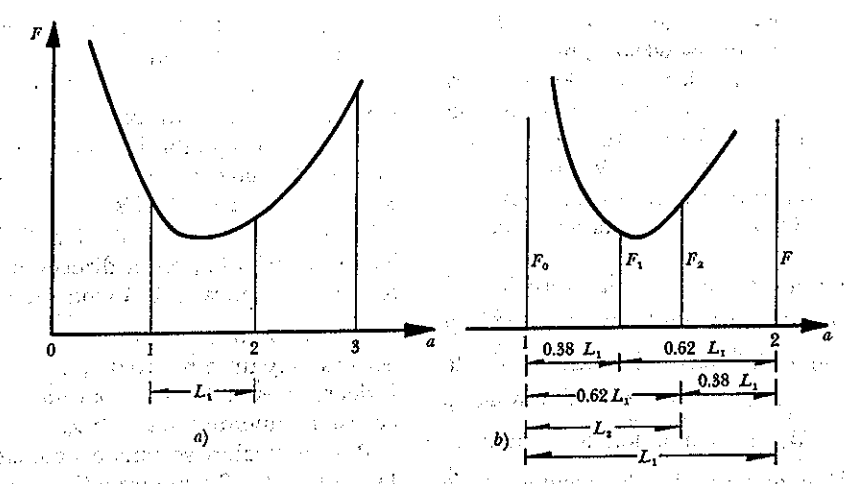


Figura 9.27. Mínimo de la función F.

La técnica de búsqueda de a_0 se puede sintetizar en los siguientes pasos.

1. Debido a que no se conoce el intervalo L en que varía a_0, entonces se hace una búsqueda gruesa con los valores $a=0$, 1, 3, 4, 5, . . . , etc., calculando simultáneamente el valor de la función F (Ec. 9.29) para determinar el intervalo L_1 en que se encuentra el mínimo. Por ejemplo, en la Fig. 9.27a se observa que dicho mínimo se encuentra para $1 < a < 2$ y la magnitud del intervalo $L_1 = 2 - 1 = 1$.

2. Se repite el mismo procedimiento del paso anterior; ahora para $a_1 = 1 + 0.38\,L_1$, $a_2 = 1 + 0.62\,L_1$ (en este caso $a = 1$) y se calculan los valores de F_1 y F_2 correspondientes. Si $F_1 < F_2$ (como en la Fig. 9.27b) el nuevo intervalo L_2 es:

$$L_2 = 0.62\,L_1 = 0.62 \times 1 = 0.62$$

medido desde $a = 1$, hasta $a = 1 + 0.62 \times L_1 = 1 + 0.62 \times 1 = 1.62$.

Si, por el contrario, $F_1 > F_2$, el nuevo intervalo es también: $L_2 = 0.62\,L_1 = 0.62$, pero medido ahora desde $a=1+0.38\,L_1= 1 + 0.38 \times 1 = 1.38$, hasta $a=1+L_1=1+1=2$.

3. Suponiendo que hubiese resultado el primer caso ($F_1 < F_2$), se repite el mismo procedimiento para los siguientes:

$$a_1 = 1 + 0.38\,L_2 =$$

$$= 1 + 0.38 \times 0.62 = 1.2356$$

$$a_2 = 1 + 0.62\,L_2 =$$

$$= 1 + 0.62 \times 0.62 = 1.3844$$

y se calculan los correspondientes F_1 y F_2. Suponiendo ahora que $F_1 > F_2$, el nuevo intervalo es $L_3 = 0.62\,L_2 = 0.62 \times 0.62 = 0.3844$, pero medido a partir de $a = a_1 = 1.2356$ hasta $a = 1.62$.

4. El procedimiento se repite tantas veces como sea necesario, hasta encontrar a_0 que da el mínimo de F con la aproximación deseada.

En la Fig. 9.28 se presenta el diagrama de bloques del programa en computadora digital.

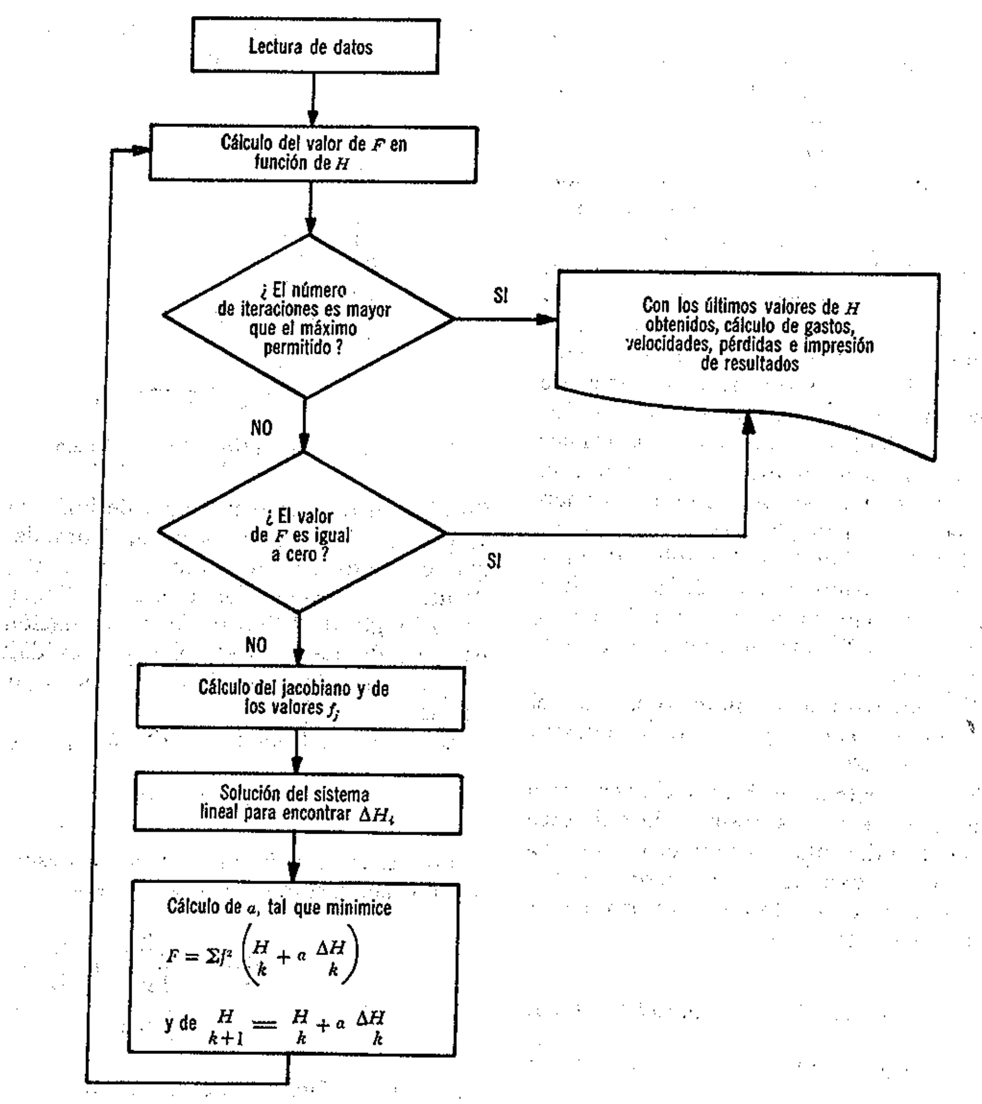


Figura 9.28. Diagrama de bloques del programa en computadora digital, para la solución de una red cerrada.

9.7 Diámetro económico

En la mayoría de los sistemas de tubos es necesario conocer de antemano toda su geometría para proceder a su análisis. La selección del diámetro es la que admite más variantes en la solución, debido a que puede hacerse con base en un

mayor número de criterios. Sin embargo, el más importante es quizá el de la economía, tanto en el monto de la inversión inicial en el sistema, como en el de conservación y operación.

El *diámetro más económico,* de cada uno de los tramos componentes del sistema, será aquel para el cual es mínima la suma de los costos de la instalación, conservación y servicios. Los costos de la instalación incluyen los propios en el diseño, conservación e instalación, para la obtención del sistema. Los costos de conservación y servicio incluyen los correspondientes al personal y materiales necesarios para mantener en servicio el sistema, además de los costos de la energía para el mismo, como en el caso de una planta de bombeo. Los tubos de gran diámetro ocasionan una pérdida de fricción más pequeña pero son más costosos; con los de menor diámetro sucede lo contrario.

El diámetro más económico será aquel de mínimo costo total, como se muestra en la Fig. 9.29.

En una instalación hidroeléctrica, cuya tubería tiene varios tramos de diámetro y longitud distintas, el diámetro más económico en cada tramo se puede calcular de modo aproximado por las fórmulas de Bundschu (Ref. 43):

$$D = \sqrt[7]{0.052\, Q_s^3} \qquad \text{para } HM < 100 \text{ m}$$

$$D = \sqrt[7]{0.052\, Q_s^3\, 100/H_M} \qquad \text{para } HM \geqslant 100 \text{ m}$$

donde

D diámetro más económico, en m;

H_M carga que depende de la bruta o total H y que vale ($H_M = H + 15$ a 20), cuando $H \leqslant 100$ m; y ($H_M = 1.1\, H + 20$) cuando $H > 100$ m (todas las cargas en m).

Q_s gasto máximo alimentado a las turbinas, en m³/seg.

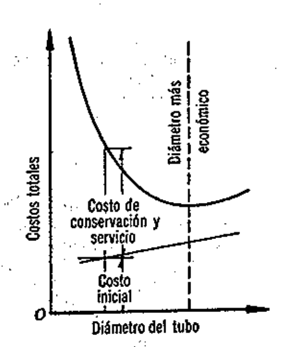


Figura 9.29. Diámetro más económico.

En el caso de una instalación de bombeo se puede admitir, en forma aproximada, que el costo de un conducto es $c_1 DL$, donde c_1 es el costo por unidad de diámetro y longitud. El costo de la instalación es $c_2 P$; donde c_2 es el costo por unidad de potencia (*CV*) instalada y P dicha potencia.

El costo total del sistema será:

$$C = c_1 DL + c_2 P$$

Substituyendo a P por su valor y despreciando las pérdidas locales, se tiene:

$$C = c_1 DL + c_2 \frac{\gamma Q \left[H + \dfrac{16 f}{2 g \pi^2} L \dfrac{Q^2}{D^5} \right]}{75 \eta}$$

Al derivar e igualar a cero, resulta:

$$\frac{dC}{dD} = c_1 L + c_2 \frac{\gamma Q}{75 \eta} \frac{16 f}{2 g \pi^2} L Q^2 \left(- \frac{5}{D^6} \right) = 0$$

y la segunda derivada es positiva $d^2C/dD^2 = 0$, lo que resulta una condición de mínimo, a saber:

$$D^6 = \frac{c_2}{c_1} \frac{\gamma}{\eta} f \left[\frac{16 \times 5}{75 \pi g^2} \right] Q^3 = K_1 \frac{c_2}{c_1} \frac{\gamma}{\eta} f Q^3$$

$$D = \sqrt[6]{K_1 \frac{c_2}{c_1} \frac{\gamma}{\eta} f} \; \sqrt{Q}$$

$$D = K \sqrt{Q}$$

Fórmula llamada de Bresse válida cuando la operación de bombeo es continua; K es una constante que vale, aproximadamente, 1.20. En realidad, el hecho de adoptar la fórmula de Bresse equivale a fijar una velocidad media económica:

$$V = \frac{4 Q}{\pi D^2} = \frac{4 Q}{\pi K^2 Q} = \frac{4}{\pi K^2}$$

que para valores de K, entre 1 y 1.5, resultan velocidades de 1.28 m/seg a 0.57 m/seg.

Si la operación es intermitente, se puede usar la fórmula empírica de Marquardt (Ref. 55):

$$D = \sqrt[4]{\beta}\; K \sqrt{Q}$$

donde

K coeficiente de Bresse;

D diámetro económico, en m;

Q gasto, en m³/seg;

$$\beta = \frac{\text{número de horas diarias de servicio real}}{24}.$$

Un criterio más sencillo consiste en especificar la velocidad más económica en el tubo, de acuerdo con los datos de Richter (Ref. 43) y que se indican en la tabla 9.4.

TABLA 9.4. Velocidad media más económica en tuberías, en m/seg según Richter

Tuberías de succión en bombas centrífugas, de acuerdo con la carga de succión, longitud, temperatura del agua (< 70°C)	0.5 a 1
Tuberías de descarga en bombas	1.5 a 2
Redes de distribución para agua potable e industrial	
Tuberías principales	1 a 2
Tuberías laterales	0.5 a 0.7
Tuberías muy largas	1.5 a 3
Tuberías en instalaciones hidroeléctricas con turbinas	
Con inclinación y diámetro pequeño	2 a 4
Con inclinación y diámetro grande	3,6 a 8
Horizontales y gran longitud	1 a 3

Problema 9.16. Sea una tubería formada por n tramos rectos de igual longitud L y diferentes diámetros D. Se supone que el costo de un tramo es $kD^2 HL$, esto es, dependiente del espesor que debe crecer en función de la resistencia, con la carga de presión H que debe soportar (k constante). Deseamos encontrar la ley que cambia el diámetro D del tubo, con la carga de presión H, si el costo de la tubería debe ser el más pequeño posible. La pérdida de energía en la conducción debe permanecer constante.

Solución. El costo de n tramos de igual longitud es:

$$K = k L \sum_{i=1}^{n} D_i^2 H_i$$

La pérdida de energía en un tramo es de la forma siguiente:

$$h_{fi} = f \frac{L}{D_i} \frac{V_i^2}{2 g} = \frac{8 f}{\pi^2 g} \frac{L Q^2}{D_i^5} = \frac{C}{D_i^5}$$

donde Q es el gasto y C una constante. La pérdida total de energía por fricción para los n tramos es:

$$h_t = \sum_{i=1}^{n} h_f = C \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D_i^5}$$

Puesto que h_t debe permanecer constante, para el caso extremo $K =$ mín, con

$$\frac{h_t}{C} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D_i^5} = 0,$$

siendo h_t/C constante.

Utilizando una constante α de proporcionalidad, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial D_i}\left[K + \alpha\left(\frac{h_t}{C} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{D_i^5}\right)\right] = 0$$

$$2\,k\,L\,H_i\,D_i + 5\,\alpha\,D_i^{-6} = 0$$

$$H\,D^7 = \text{constante}$$

Problema 9.17. La regla de Adams, obtenida de la experiencia, indica que el diámetro económico de una tubería —en una instalación hidroeléctrica o de bombeo— debe ser tal que los 2/5 del costo inicial del tubo, por unidad de longitud y por año, sea igual al costo de la pérdida de potencia resultante debida a la fricción en el tubo. Fundamentar teóricamente dicha regla.

Solución. Dado el grado de seguridad del tubo, contra ruptura, se debe proporcionar el espesor del mismo de acuerdo con su diámetro.

Para conductos largos el costo K_1 del tubo, por unidad de longitud, es proporcional principalmente al peso del mismo; esto es, $K_1 \sim C_1 D^2$, donde el coeficiente C_1 incluye también otros costos de menor importancia, los cuales dependen de D^2.

La pérdida de potencia ($P = \gamma Q h_f$), debida a la fricción en el tubo, es proporcional al gasto y a la pérdida de fricción. En primer lugar es proporcional a $V D^2$ y, en segundo, a V^2/D, por lo cual la potencia perdida por fricción es proporcional a $V^3 D$. Puesto que V es proporcional a $1/D^2$, el costo de dicha pérdida K_2 por unidad de longitud del tubo es igual a C_2/D^5.

El costo total:

$$K = C_1 D^2 + \frac{C_2}{D^5}$$

debe ser mínimo, para lo cual se procede con el criterio de la primera derivada, es decir:

$$2\,C_1 D - 5\frac{C_2}{D^6} = 0 = \frac{2\,K_1 - 5\,K_2}{D}$$

o sea

$$K_2 = \frac{2}{5} K_1$$

PROBLEMAS

1. Calcular el gasto en la tubería, mostrada en la figura, sin considerar las pérdidas de energía.

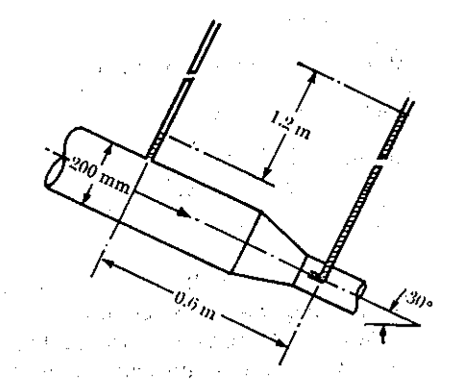


Figura del problema 1.

2. El sistema de bombeo, mostrado en la figura, debe tener una presión de 0.4 kg/cm² en el manómetro, cuando la cavitación es incipiente en la entrada de la bomba B ($p = -0.7$ kg/cm²).

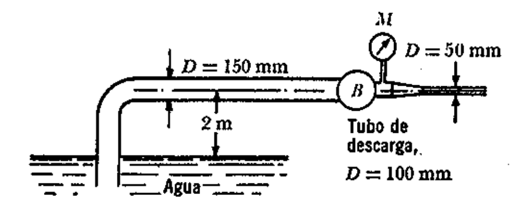


Figura del problema 2.

Calcular la longitud que debe tener la tubería para satisfacer esta condición de operación, si el factor de fricción $f = 0.03$. ¿Qué potencia suministra la bomba al fluido? ¿Qué tanto por ciento de esa potencia se utiliza para compensar las pérdidas? Para el chiflón considere $C_v = 0.98$.

3. Para medir el gasto de agua en un conducto de 0.20 m de diámetro, se instala un diafragma normal de 0.10 m de abertura, para el cual —con un manómetro diferencial de mercurio— se mide la diferencia de presiones, antes y después del diafragma. Hacer un esquema acotado de la instalación y establecer la curva que relacione el gasto, en lt/seg, con la lectura en mm del manómetro diferencial.

4. *a)* Calcular el diámetro de la tubería de acero, soldado y nuevo, indicada en la figura, para que el gasto sea de 45 m³/seg con las válvulas totalmente abiertas. *b)* Determinar la abertura de la válvula de mariposa en el caso de que se desee un gasto de 25 m³/seg. La rejilla consiste de placas de 3.8 cm de espesor y 15 cm de peralte; la velocidad frente a ellas es de 0.60 m/seg. Los coeficientes de pérdida en las válvulas abiertas son: $K_v = 0.01$ (compuerta); $K_v = 0.008$ (mariposa).

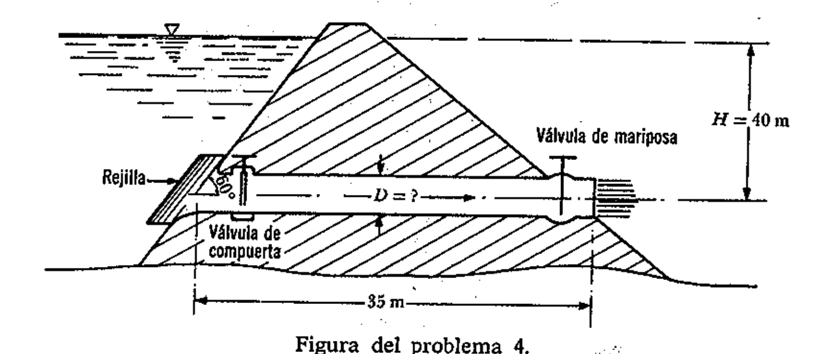


Figura del problema 4.

5. La velocidad del agua, en una tubería de 152 mm de diámetro, se espera que varíe entre 0.6 y 1.5 m/seg. El intervalo correspondiente a f se estima que está entre 0.022 y 0.018. A partir de estos datos, encontrar una expresión exponencial para la pérdida de fricción, por cada 1000 m de longitud de tubería, del tipo $h_f = C\,Q^m$, donde C es una constante.

6. La obra de toma, cuya geometría se muestra en la figura, descarga libremente al ambiente. La rejilla consiste en placas de 3.8 cm de espesor y 15 cm de peralte. En la estación 0 + 612.94 la tubería se bifurca para descargar mediante dos válvulas de chorro hueco, de 2.60 m de diámetro, contra una estructura amortiguadora. Determinar el gasto que descarga la obra de toma con las válvulas totalmente abiertas y tubería de acero soldado.

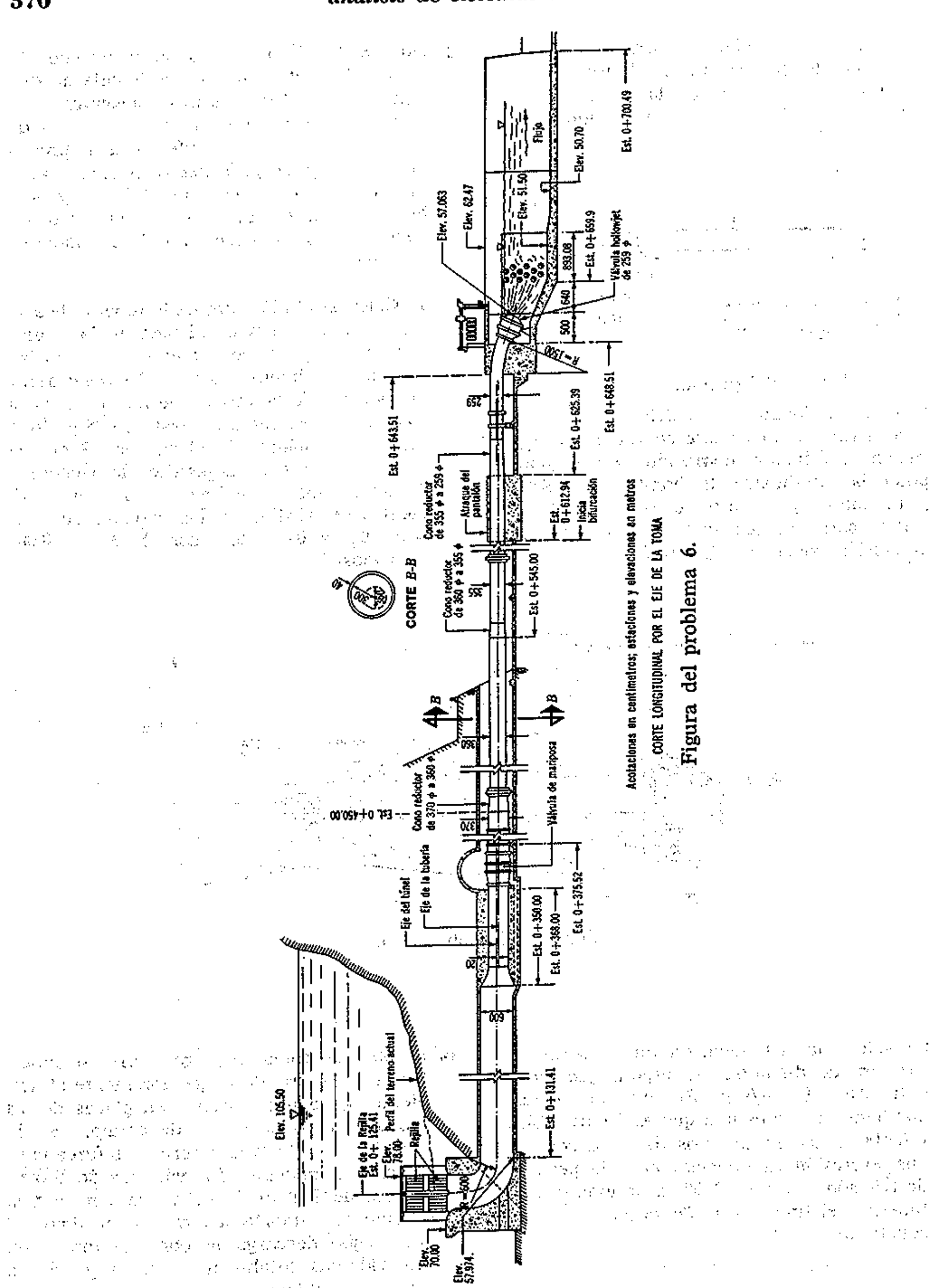


Figura del problema 6.

7. En la obra de toma mostrada, determinar el gasto en la tubería así como la presión en el punto *B*. La tubería es nueva de acero soldado; las longitudes de los diferentes tramos son: $L_1 = 50$ m, $L_3 = 1000$ m, $L_4 = 2\,400$ m, $L_5 = 600$ m. El diámetro de la tubería es $D = 0.40$ m y el radio de las curvas igual a $4D$.

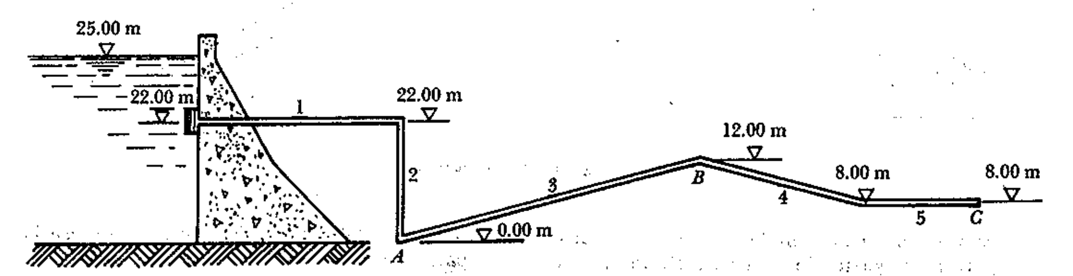


Figura del problema 7.

8. Un sifón invertido —para cruzar un barranco— consiste en una tubería de acero soldado, de 1.50 m de diámetro, como se esquematiza en la figura. El gasto máximo es de 4 m³/seg y la velocidad en la tubería es el doble de la velocidad en los canales de llegada y salida (V_0). Determinar el desnivel Δz que es necesario proporcionar entre las plantillas de los dos canales.

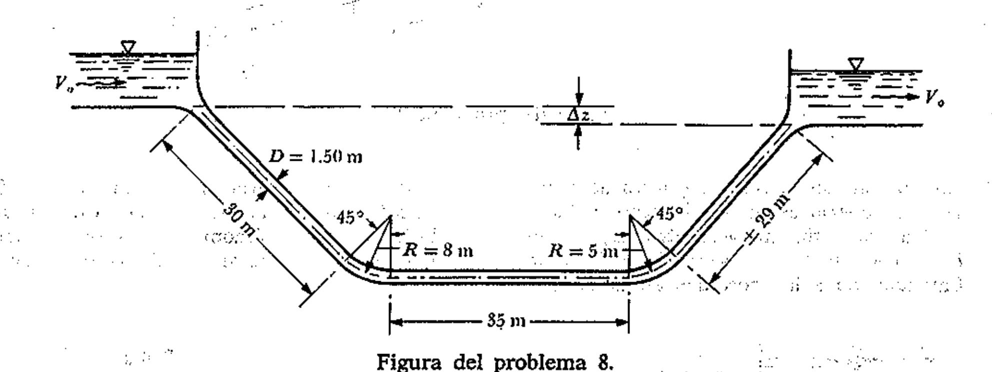


Figura del problema 8.

9. *a)* Determinar el gasto en el sifón mostrado en la figura, el cual es de acero soldado, nuevo y tiene los diámetros $D_1 = 100$ mm, $D_2 = 500$ mm. Utilizar la fórmula de Darcy para evaluar la pérdida por fricción. *b)* Determinar las líneas de energía total y cargas piezométricas.

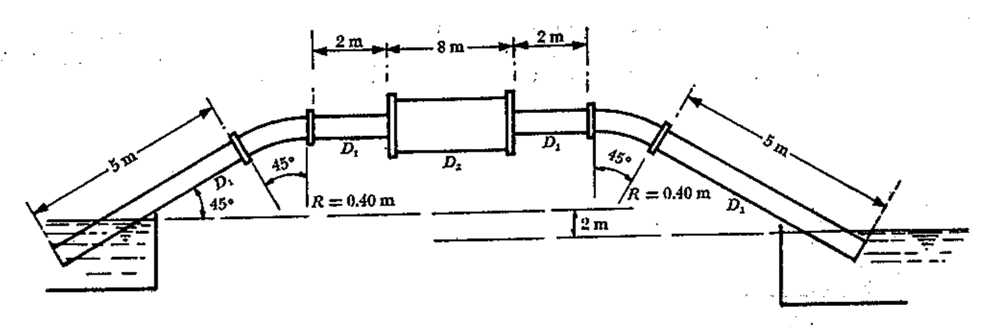


Figura del problema 9.

10. El tubo mostrado en la figura debe transportar un gasto de 3 lt/seg. El factor de fricción de cada tramo es $f_1 = 0.048$, $f_2 = 0.058$. Determinar la carga H necesaria para ese gasto.

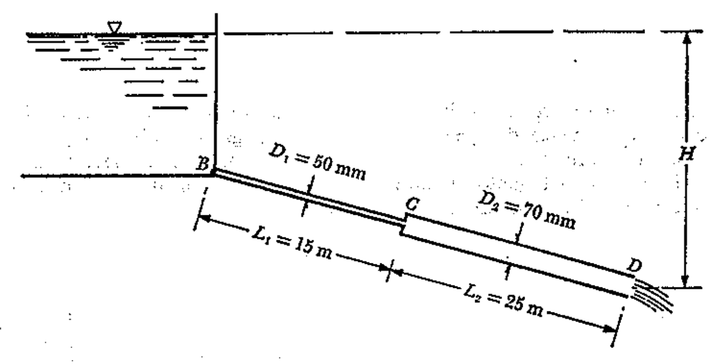


Figura del problema 10.

11. Por un conducto circula un gasto de 1 m³/seg. La tubería es nueva de acero soldado y tiene la siguiente geometría $D_1 = 1$ m, $L_1 = 150$ m, $D_2 = 0.40$ m, $L_2 = 69$ m. *a)* Calcular todas las pérdidas en la conducción. *b)* Si la elevación del chiflón es 0.00, ¿Cuál sería la del nivel en el vaso? *c)* Dibuje las líneas piezométricas y de la energía total. Considerar la válvula totalmente abierta.

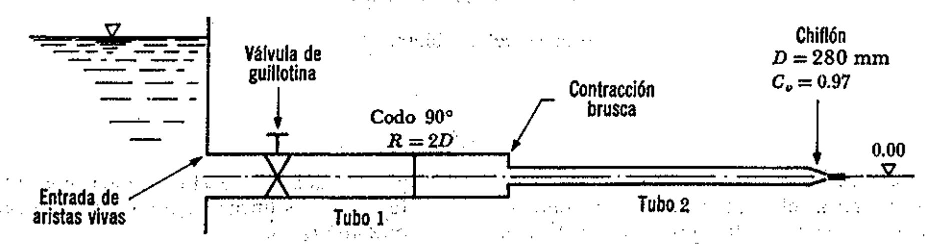


Figura del problema 11.

12. La tubería —mostrada en la figura— es horizontal y de fierro fundido, nuevo. Determinar una posible solución de las longitudes y diámetros de los tramos intermedio y final, para que el gasto sea de 20 lt/seg. Admita que los diámetros (comerciales disponibles) son de: 125, 100, 90, 80, 70, (mm) etcétera. Trazar también las líneas de energía total y de cargas piezométricas, considerando todas las pérdidas de energía.

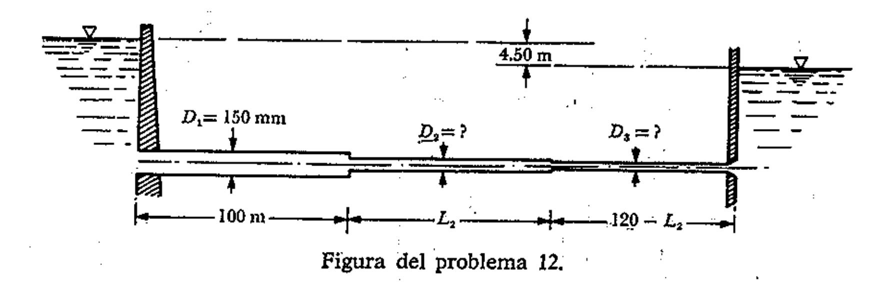


Figura del problema 12.

13. Un depósito B —de nivel variable— es alimentado, mediante un conducto de 400 m de longitud y 200 mm de diámetro, por otro recipiente A de nivel constante. Por otra parte, el depósito B alimenta otro conducto de 200 m de longitud, y diámetro desconocido, que descarga al ambiente a la elevación de 0.0 m. Los conductos son de fierro fundido. Determinar el diámetro desconocido para que el nivel en B permanezca constante a la elevación de 4.0 m.

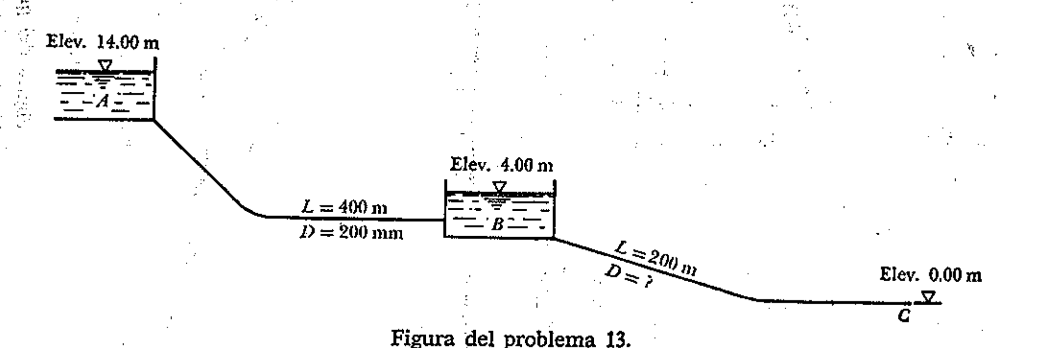


Figura del problema 13.

14. Dos depósitos, cuya diferencia de niveles permanece constante e igual a 10 m, están comunicados por un conducto recto y horizontal, constituido por dos tramos: el primero de 40 m de longitud y 100 mm de diámetro; y el segundo de 50 m de longitud y 50 mm de diámetro. A la mitad del segundo tramo se intercala un diafragma de 30 mm de abertura. Los conductos son de acero soldado, nuevo. Determinar el gasto que pasa de un recipiente a otro, así como la línea piezométrica, teniendo en cuenta todas las pérdidas.

15. En la figura se presenta el perfil longitudinal y planta general de un conducto, que parte de una presa cuyo nivel se encuentra a la altura de 76.15 m y su extremo final descarga al nivel de 12.15 m. A lo largo del trayecto se han previsto tres derivaciones: la primera de 0.6 lt/seg en el punto 11; la segunda de 0.9 lt/seg en el punto 22; la

Figura del problema 15.

tercera de 0.3 lt/seg en el nudo 24 y, como descarga final, 0.7 lt/seg para una utilización posterior. De esta manera, el gasto total extraído de la presa es de 2.5 lt/seg. Es necesario que la cota piezométrica en el punto final (25) de la tubería, sea de 30 metros sobre el nivel de la sección final y que ésta se mantenga en todos los puntos del conducto, comprendidos entre el 11 y el 25. El desnivel total entre la superficie libre en la presa y la sección final, es de 34 m. Determinar los diámetros del conducto D_1, D_2, D_3 y D_4, necesarios para satisfacer las condiciones anteriores, considerando que el material será de acero rolado, nuevo, sin soldadura; elija diámetros (comerciales) comprendidos entre los siguientes valores: 32, 38, 51, 64, 76, 83 y 89 mm. Considere que existe envejecimiento del tubo durante 20 años, con agua del grupo II en la tabla 8.2; asimismo, desprecie las pérdidas locales.

16. Un depósito, cuyo nivel permanece constante, alimenta al conducto de fierro fundido, mostrado en la figura. En C hay un chiflón cónico ($C_d = 0.947$) con una salida de 50 mm de diámetro. *a)* Calcular el gasto en la tubería. *b)* Trazar la línea de energía total y de cargas piezométricas, incluyendo todas las pérdidas.

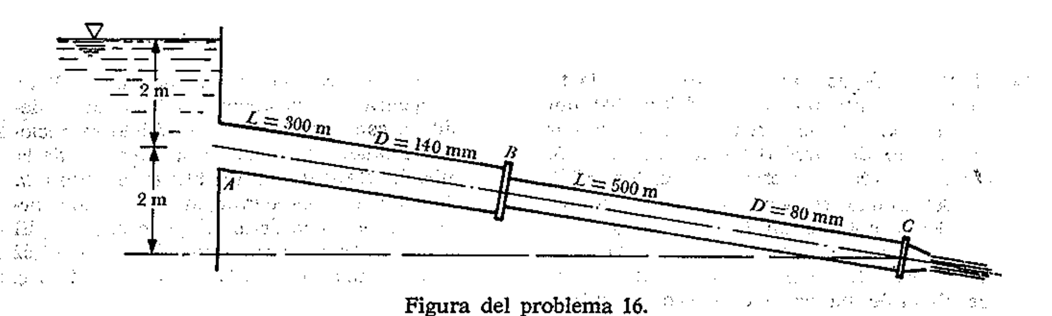


Figura del problema 16.

17. En la figura se muestra una instalación hidroeléctrica que alimenta a una rueda Pelton. En el vaso de almacenamiento el nivel se mantiene a la elevación de 200.00 m y aquel se une a un pozo de oscilación mediante una galería horizontal de 2 km de longitud y 1.50 m de diámetro, la cual está revestida de concreto, bien acabado. El eje de tal galería se encuentra a la elevación de 180.00 m. Del pozo de oscilación parte un conducto de acero, soldado y nuevo, de 600 m de longitud que descarga al ambiente —mediante una válvula de aguja— a la elevación de 0.00 m. Dicho conducto está compuesto de dos tramos: el primero de 200 m de longitud y 500 mm de diámetro; el segundo, de 400 m de longitud y 300 mm de diámetro. La válvula de aguja descarga un chorro cuyo diámetro efectivo es de 100 mm y en ella se produce una pérdida local que se evalúa con la fórmula $0.1\, V_s^2/2g$, donde V_s es la velocidad del chorro descargado. Determinar: *a)* el gasto descargado; *b)* la potencia neta de todo el sistema en CV; *c)* el nivel del agua en el pozo de oscilación; *d)* el trazo de la línea de energía total y de las cargas piezométricas, teniendo en cuenta todas las pérdidas.

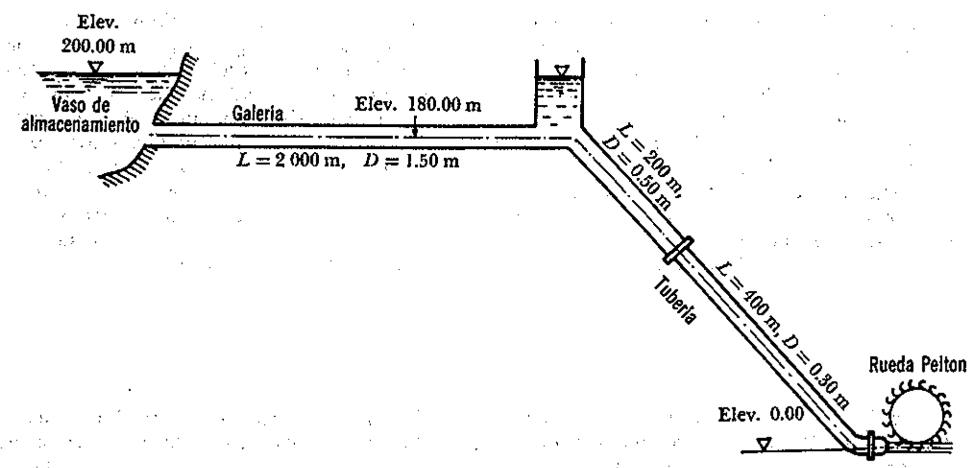


Figura del problema 17.

18. *a)* El tanque de agua —mostrado en la figura— alimenta al conducto *A-B* de 100 mm de diámetro y descarga al ambiente por un orificio, de pared delgada, de 50 mm de diámetro (véanse coeficientes en Fig. 6.25). *a)* Determinar el gasto en el conducto. *b)* Se desea colocar en *C* una tobera para la medición del gasto cuyo diámetro en la salida sea de 50 mm. Dicha tobera está perfilada de manera que la sección contracta coincida con la sección de salida. Para compensar la resistencia suplementaria, debida a esta tobera, se ha decidido sobreelevar el tanque de agua en la dirección de la tubería vertical, sin modificar la altura *h*. Calcular la sobreelevación del tanque, necesaria para conservar el gasto original. El factor de fricción en el conducto es $f = 0.02$ y la pérdida local en la curva es $0.2\ V^2/2g$.

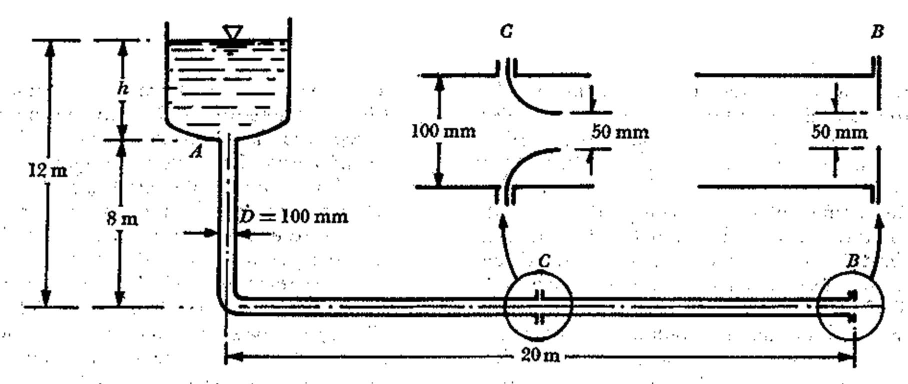


Figura del problema 18.

19. Determinar el diámetro constante de un conducto rectilíneo *A B*, del cual se derivan gastos de 25 y 30 lt/seg en *C* y *D*, respectivamente; asimismo se tienen, del punto *D* al *B*, derivaciones uniformes de 2 lt/seg, a cada metro de longitud. En el punto *B* la presión debe ser por lo menos de 15 m de columna de agua y está obturado por una tapa ciega. El factor de fricción de la tubería es $f = 0.02$.

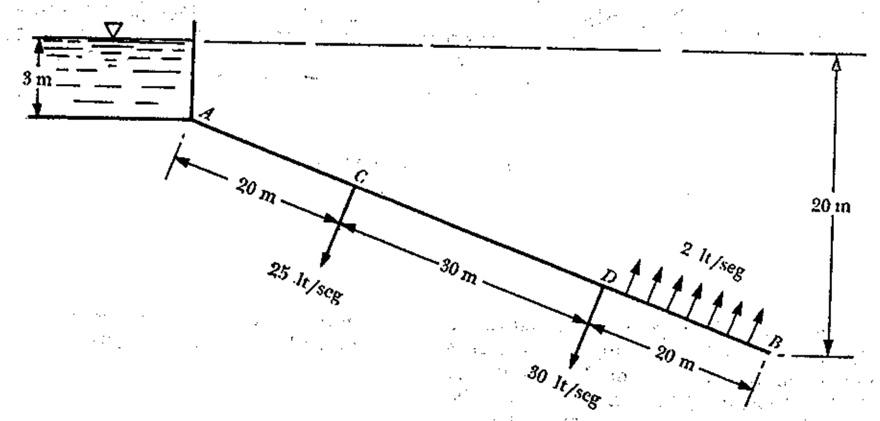


Figura del problema 19.

20. La tubería maestra —que aparece en la figura— tiene una longitud de 1 000 m, un diámetro de 200 mm, y un factor de fricción $f = 0.025$. Con separaciones a 50 m hay salidas laterales que derivan un gasto $q = 2$ lt/seg. *a)* Determinar el desnivel *h* que debe tenerse para que el gasto Q_t, a la salida de la tubería, sea de 40 lt/seg. *b)* Determinar *h* si se desea que Q_t aumente a 80 lt/seg. *c)* Determinar *h* si se mantiene $Q_t = 40$ lt/seg y se aumenta *q* a 4 lt/seg.

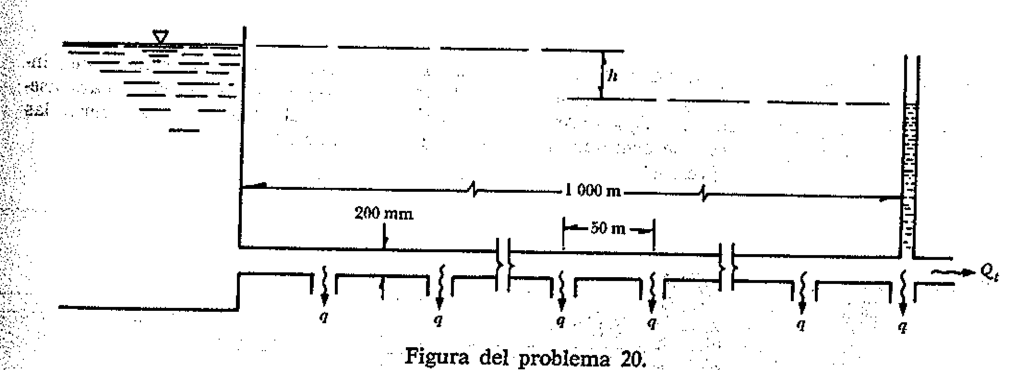


Figura del problema 20.

21. *a)* Dibujar las líneas piezométricas y de energía total para la tubería mostrada en la figura: $h = 7.2$ m. La tubería es nueva, de acero comercial. *b)* Calcular el valor de K_v, en la válvula, para reducir el gasto a la mitad.

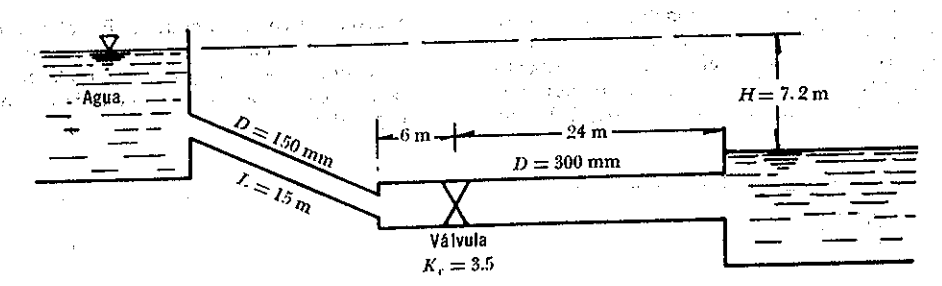


Figura del problema 21.

22. Para la tubería mostrada en la figura, se pide: *a)* Cuando $L = 10$ km, tubo de fierro fundido nuevo ($H = 20$ m, $D = 0.40$ m), calcular el gasto. *b)* Para $L = 10$ km: tubo de acero soldado nuevo ($H = 20$ m, $Q = 100$ lt/seg); calcular D. *c)* Para $L = 5$ km: tubo de asbesto-cemento ($D = 0.50$ m, $Q = 200$ lt/seg); calcular H. *d)* Si para el tubo de fierro fundido, $L = 1\,000$ m, $H = 20$ m, $Q = 20$ lt/seg y el diámetro de la boquilla del chiflón es un cuarto del diámetro del conducto, seleccionar el diámetro del conducto entre los valores comerciales: 60, 80, 100, 125, 150, 175, 200, 250, . . ., (mm).

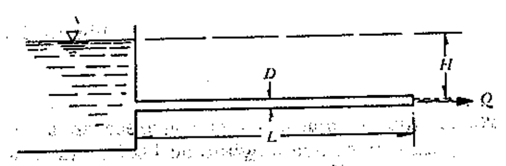


Figura del problema 22.

23. En la obra de toma, mostrada en la figura, el tubo es de acero sin costura nuevo; su diámetro 1.40 m y las longitudes: $L_{AB} = 2\,000$ m; $L_{BC} = 18$ m; $L_{CD} = 9$ m. Determinar el gasto que transporta y la presión en B. Si dicha presión no es tolerable, indicar qué medidas deben tomarse para asegurar el gasto calculado, sin considerar las pérdidas menores.

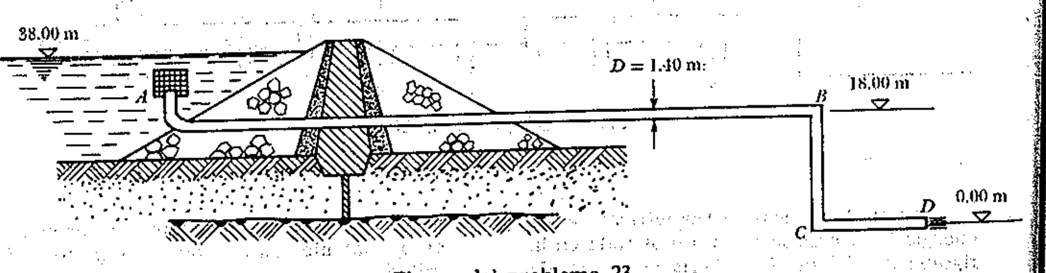


Figura del problema 23.

24. En el sistema de tubos mostrado en la figura, la geometría es como sigue: $L_1 = 150$ m, $L_2 = 200$ m, $L_3 = 300$ m, $D_1 = 150$ mm, $D_2 = 200$ mm, $D_3 = 250$ mm. Además, las rugosidades absolutas de los diferentes tubos son: $\varepsilon_1 = 0.15$ mm, $\varepsilon_2 = 0.6$ mm, $\varepsilon_3 = 0.3$ mm.

a) Para $H = 8$ m, determinar el gasto en cada tubo del sistema.
b) Calcular H si el gasto total se reduce a 200 lt/seg.
c) Determinar la longitud equivalente de una tubería única nueva, de fierro fundido, que reemplace al sistema, para $H = 8$ m.

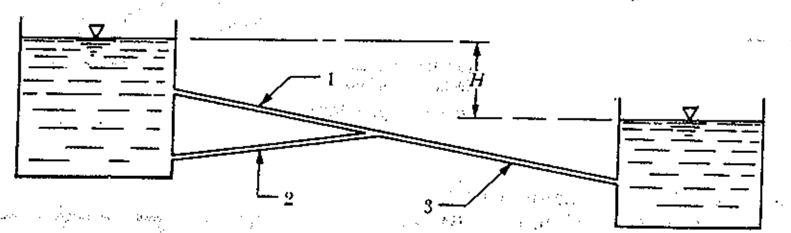


Figura del problema 24.

25. Determinar el gasto que transporta cada una de las tuberías, del sistema mostrado en la figura, así como la pérdida total de A a B. Las longitudes y diámetros son: $L_1 = L_5 = 750$ m; $L_2 = L_4 = 500$ m; $L_3 = 300$ m; $D_1 = D_5 = 0.50$ m; $D_2 = D_4 = 0.40$ m; $D_3 = 0.60$ m.

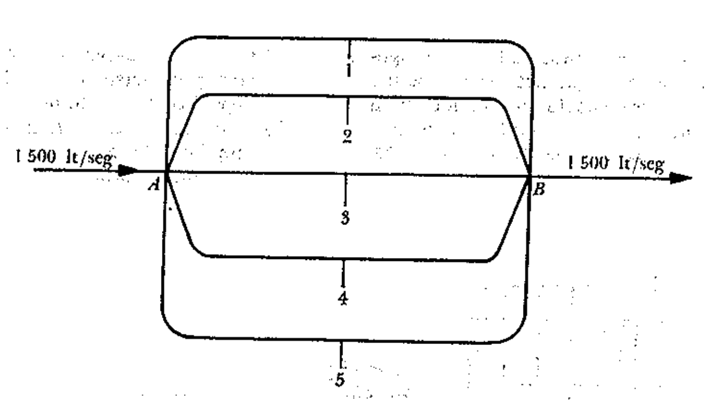


Figura del problema 25.

26. Calcular el gasto en las tuberías, del sistema mostrado en la figura, si por la de 200 mm de diámetro la velocidad debe ser de 1 m/seg. Determinar también la carga H, necesaria.

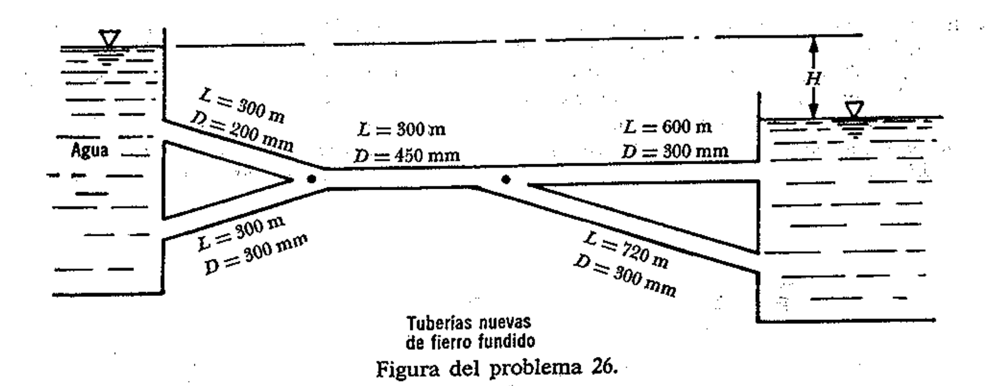


Figura del problema 26.

27. El sifón mostrado en la figura tiene la siguiente geometría: $L_1 = 50$ m, $L_2 = 100$ m, $L_3 = 150$ m, $D_1 = 75$ mm, $D_2 = 50$ mm, $D_3 = 75$ mm. Además, $f_1 = 0.025$, $f_2 = 0.028$ y $f_3 = 0.025$.

a) Determinar la carga H, necesaria para que $Q_2 = 3$ lt/seg.

b) Si $h = 2$ m y la longitud del tramo C-D de 20 m, determinar en qué punto (C o D) se presenta la mínima presión; calcular la magnitud de ésta.

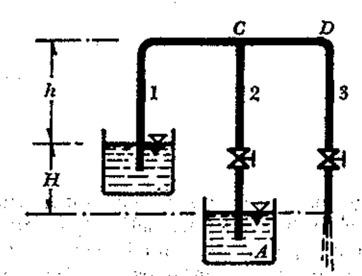


Figura del problema 27.

28. El sistema de tubos —mostrado en la figura— tiene la siguiente geometría: $L = 50$ m; $D = 25$ mm y transporta un líquido cuya viscosidad cinemática está dada por la figura adjunta y su peso específico es $\gamma = 900$ kg/m³.

a) Calcular la carga H necesaria para transportar un gasto $Q = 0.2$ lt/seg, hasta el depósito B, a la temperatura de 10°C.

b) Con dicha carga H, determinar el gasto que llegaría hasta B, si la temperatura del líquido aumenta hasta 40°C.

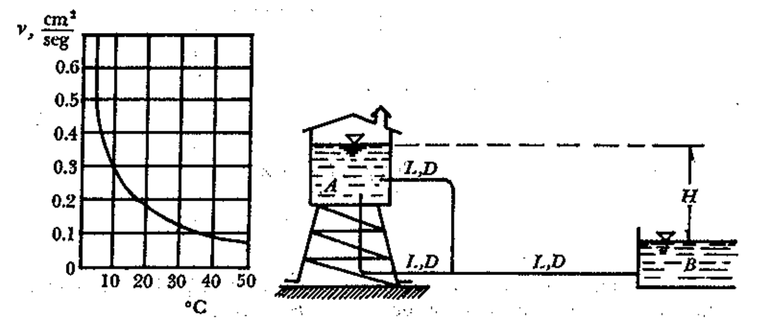


Figura del problema 28.

29. Los recipientes A y B alimentan al C a través del sistema de tubos mostrado, cuya geometría es: $L_1 = 200$ m, $D_1 = 200$ mm, $L_2 = 100$ m; $D_2 = 100$ mm, $L_3 = 600$ m, $D_3 = 200$ mm. Además, $f_1 = f_3 = 0.02$ y $f_2 = 0.025$.

a) Calcular el gasto descargado a C —para $H = 16$ m— y con un coeficiente de pérdida en la válvula: $K_v = 12$.

b) Calcular cuál debe ser el mínimo valor de K_v, cuando $h = 4$ m y la longitud de la porción vertical del tubo 3 sea de 440 m, para evitar presiones negativas, peligrosas en el sistema.

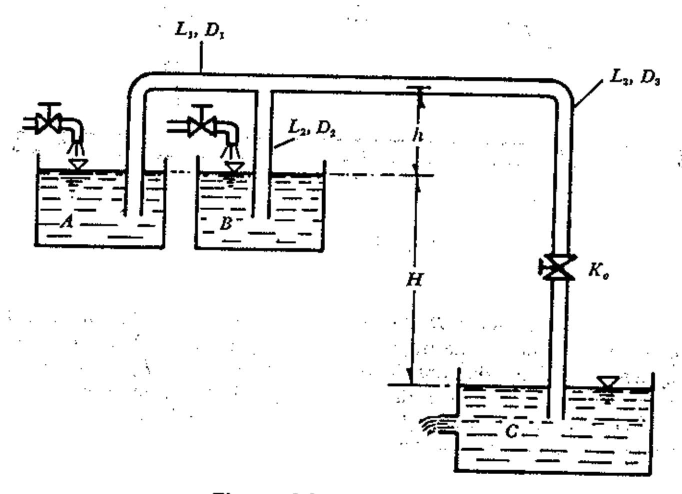


Figura del problema 29.

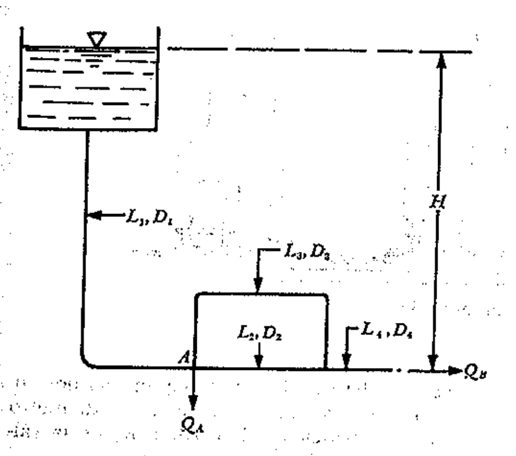


Figura del problema 30.

30. En el sistema mostrado en la figura, de A se deriva un gasto $Q_A = 35$ lt/seg y en B descarga $Q_B = 50$ lt/seg, con los siguientes datos: $L_1 = 300$ m; $D_1 = 225$ mm, $f_1 = 0.03$, $L_2 = 150$ m; $D_2 = 125$ mm, $f_2 = 0.038$; $L_3 = 250$ m, $D_3 = 150$ mm, $f_3 = 0.032$; $L_4 = 100$ m, $D_4 = 175$ mm, $f_4 = 0.042$.

a) Calcular H para satisfacer las condiciones anteriores.

b) Calcular la elevación piezométrica en el punto A.

31. Un tubo principal, que transporta un gasto $Q = 25$ lt/seg, tiene una bifurcación de una tubería paralela de 50 m de longitud y diámetro de 100 mm, con una válvula intermedia cuyo coeficiente de pérdida es $K_v = 3$. El tubo principal tiene un diámetro de 50 mm y una longitud de 30 m en el tramo de la bifurcación. Si el factor de fricción del tubo es $f_1 = 0.04$ y el de la bifurcación, $f_2 = 0.03$, calcular el gasto que circula por cada uno, así como la diferencia de cargas piezométricas entre los dos nudos.

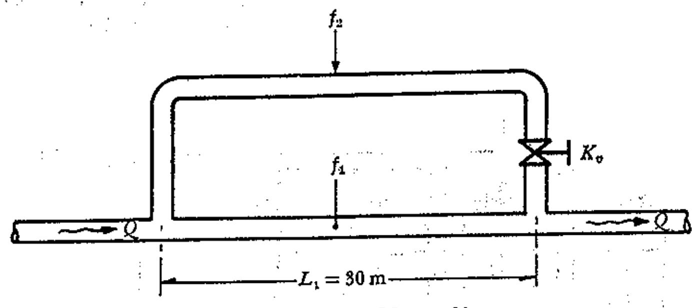


Figura del problema 31.

32. *a)* Se desea conocer el diámetro D de la tubería de fierro fundido, nuevo, de manera que el primer vagón de 20 m³ de capacidad se llene en 10 minutos, si está cerrada la válvula de la tubería 3. *b)* Calcular el tiempo que se requiere para llenar cada vagón, si se abre dicha válvula. La viscosidad del agua es $\nu = 0.01$ cm²/seg. Considerar que $H = 20$ m, $L_1 = 800$ m, $L_2 = 20$ m, $L_3 = 80$ m; y la rugosidad absoluta del tubo es $\varepsilon = 0.2$ mm.

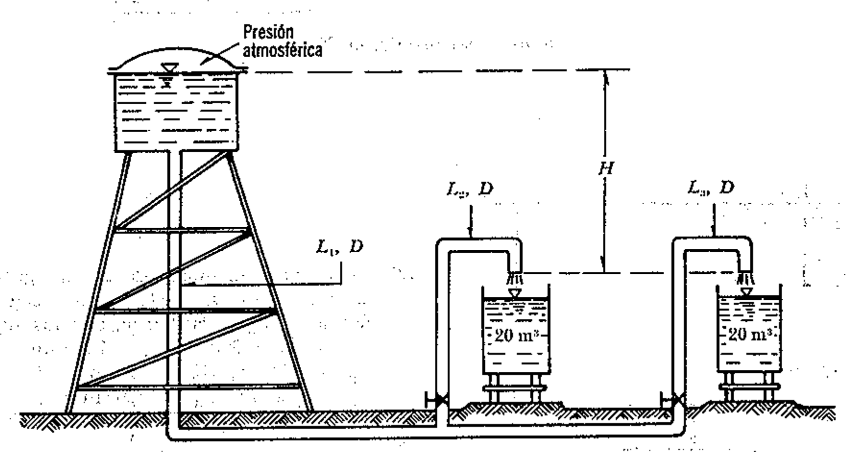


Figura del problema 32.

33. El sistema de tubos (mostrado en la figura), tiene la siguiente geometría: $L_2 = L_3 = 25$ m, $L_1 = 50$ m; $D_2 = D_3 = 50$ mm; $\varepsilon = 0.2$ mm; $H = 10$ m, $h = 7$ m; $\nu = 0.01$ cm²/seg. El gasto debe ser $Q = 5$ lt/seg, en las dos tuberías que descargan. Calcular el diámetro D_1 y el coeficiente de pérdida K_v de la válvula, en la tubería 3.

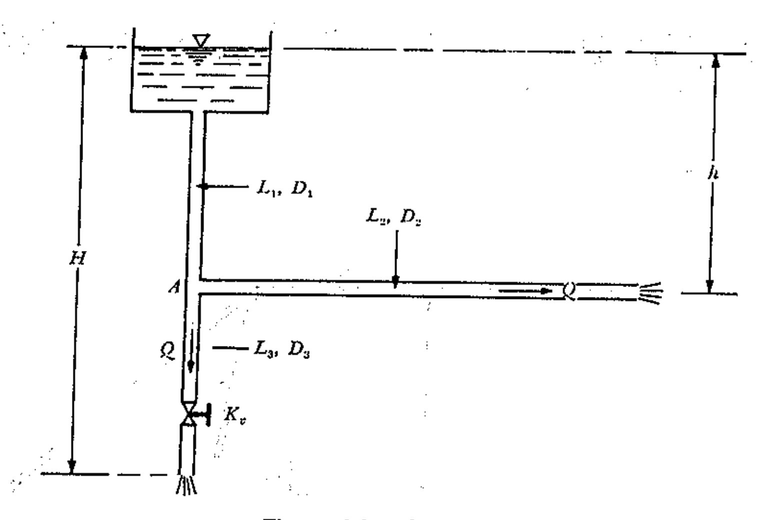


Figura del problema 33.

34. Determinar la distribución del gasto, en las tuberías de la obra de toma del problema 9.3, considerando abierta la derivación lateral.

35. Una planta bombea agua, de un depósito A a otro B, mediante un tubo de 610 mm de diámetro y 450 m de longitud; éste se bifurca después en dos tubos de 305 mm y 457 mm de diámetro cada uno y 600 m de longitud. La estación de bombeo está situada en la proximidad del depósito A y la superficie libre en el B se encuentra 60 m por arriba de la de A. Determinar la carga total de bombeo, si el gasto debe ser 0.40 m³/seg, así como el gasto en cada ramal, considerando que $f = 0.02$ para todos los tubos.

36. En el sifón (mostrado en la figura) se desea conocer: *a)* el gasto total que fluye de A a B, si $L = 100$ m; $D = 100$ mm; $\nu = 0.01$ cm²/seg; $\varepsilon = 0.2$ mm; $H = 5$ m. *b)* Cuánto debe ser h, de manera que la presión en C no sea inferior a -0.6 kg/cm².

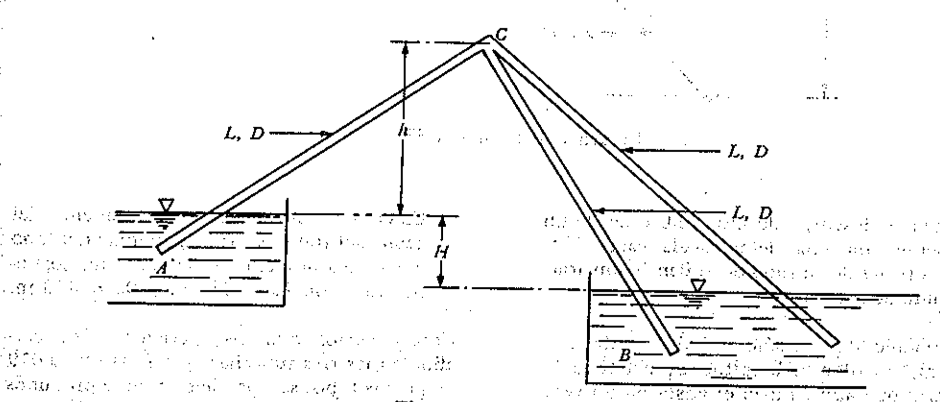


Figura del problema 36.

37. En la conducción mostrada se pide calcular los gastos Q_2 y Q_3, si $h_1 = 2$ m, $h_2 = 1$ m; $L_2 = 300$ m, $L_3 = 1\,000$ m; $D_2 = 0.30$ m, $D_3 = 0.25$ m; $f_2 = f_3 = 0.0175$; el tubo 1 es horizontal y el gasto $Q_1 = 130$ lt/seg.

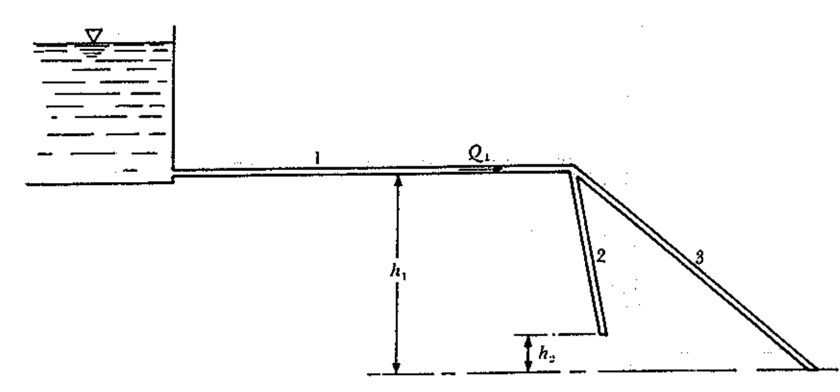


Figura del problema 37.

38. En el sistema de tubos, mostrado en la figura, calcular H, de manera que $Q = 12$ lt/seg, para los siguientes datos: $L_1 = L_3 = 50$ m; $L_2 = 200$ m; $D = 100$ mm; $\varepsilon = 0.2$ mm; $\nu = 0.01$ cm²/seg.

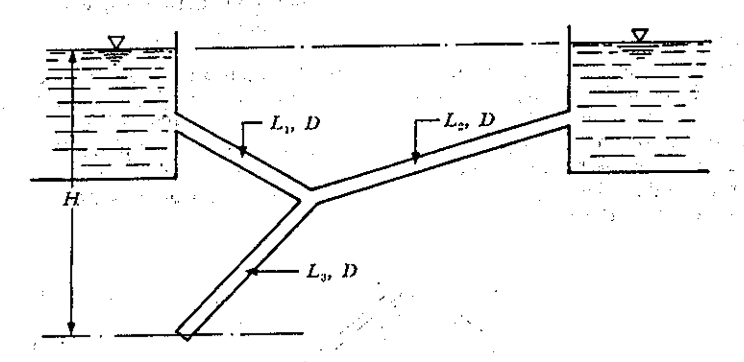


Figura del problema 38.

39. El agua se descarga de modo libre desde un recipiente con una determinada carga $H = 10$ m a través de un tubo de 150 m de longitud y 50 mm de diámetro.

a) Suponiendo que sólo trabaja el tubo central, calcular la longitud L_1 del tubo lateral que aumentaría el gasto en un veinte por ciento.

b) Calcular el porcentaje de incremento del gasto del tubo central si, además del tubo del inciso anterior, se conecta un segundo tubo con $L_2 = 46.7$ m y $D_2 = 0.10$ m.

Considere los mismos coeficientes de pérdida en las tres tuberías: $f_1 = f_2 = f = 0.019$ y que los tubos son paralelos y muy proximos entre si.

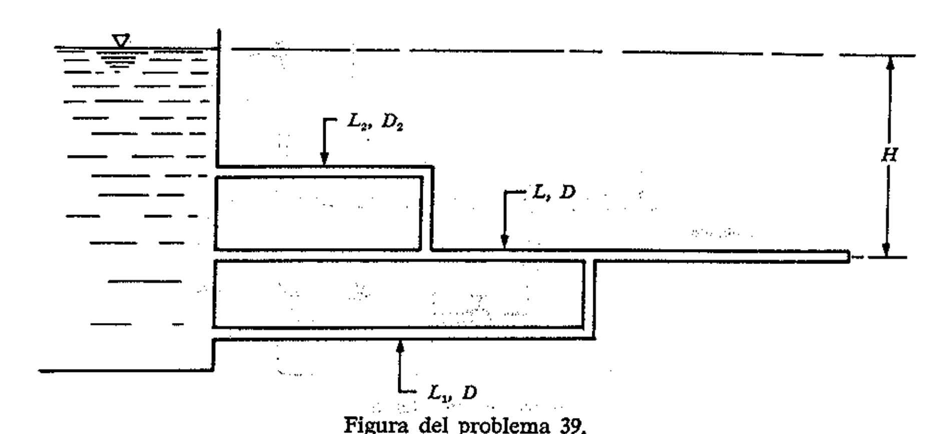


Figura del problema 39.

40. La red de tubos, representada en la figura, sirve a una instalación de riego. Los rociadores están conectados en los puntos D, E, F y deben proporcionar un gasto de 5.6 lt/seg, con una presión equivalente a 20 m de columna de agua. La geometría del sistema es como sigue: $L_1 = 160$ m, $L_2 = 40$ m, $L_3 = 80$ m, $L_4 = 50$ m, $L_5 = 120$ m; son tubos de fierro fundido $N = 30$ (Kozeny). Calcular la potencia necesaria de la bomba en el punto 0 para abastecer la red ($\eta = 84$ %) así como el diámetro de los tubos elegido entre los comerciales: 51, 64, 76, 89, 102, 127 y 152 mm

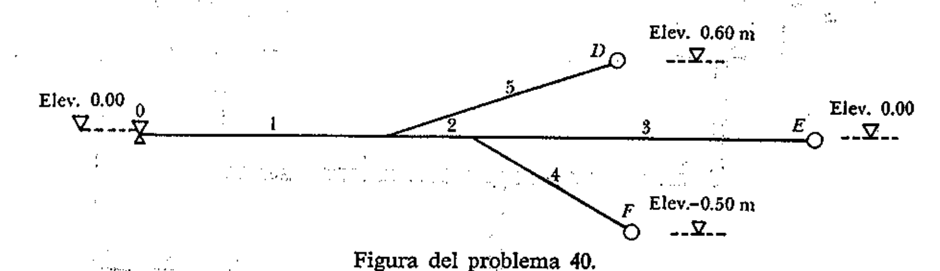


Figura del problema 40.

41. En el problema 9.10 determinar la distribución del gasto en los tubos, cuando el coeficiente de pérdida en la válvula sea $K_v = 0$.

42. Calcular la potencia de la bomba que tiene una eficiencia η = ochenta y cinco por ciento, para que el tubo 2 lleve un gasto de 5 lt/seg. La geometría es: $L_1 = 75$ m; $D_1 = 75$ mm; $f_1 = f_2 = f_3 = 0.03$; $L_2 = L_3 = 100$ m; $D_2 = D_3 = 50$ mm; $H = 10$ m y $K_v = 15$.

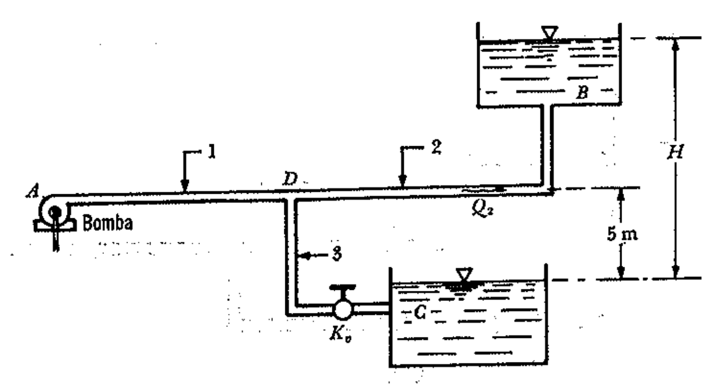


Figura del problema 42.

43. Calcular la presión que debe leerse en el manómetro *M*, de modo que el nivel de la superficie libre del recipiente *A* sea el mismo que el del recipiente *B*; asimismo, $Q_2 = 5$ lt/seg. Utilizar los siguientes datos: $L_1 = 75$ m; $D_1 = 75$ mm; $L_2 = L_3 = 100$ m; $D_2 = D_3 = 50$ mm; $H = 10$ m, $f_1 = f_2 = f_3 = 0.03$ y $K_v = 0.15$.

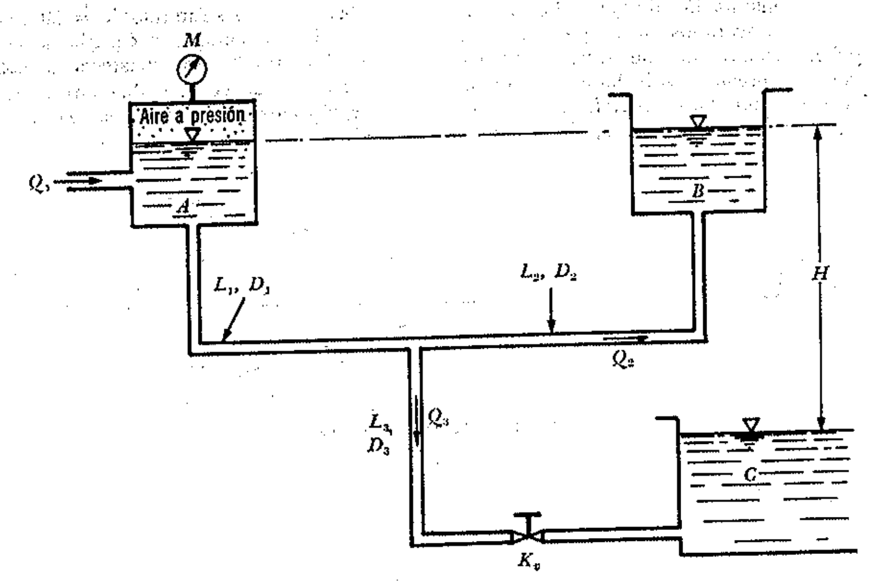


Figura del problema 43.

44. En el sistema de tubos —mostrado en la figura— se tiene la siguiente geometría: $L_1 = 200$ m, $L_2 = 100$ m, $L_3 = 150$ m; $D_1 = D_3 = 100$ mm, $D_2 = 80$ mm; $H_1 = 7$ m, $H_2 = 3$ m; rugosidad absoluta en todos los tubos, $\varepsilon = 0.2$ mm; $\nu = 0.01$ cm²/seg.

a) Calcular el gasto en cada tubo.

b) Calcular la longitud que debería tener la tubería 3 de manera que $Q_2 = 0$.

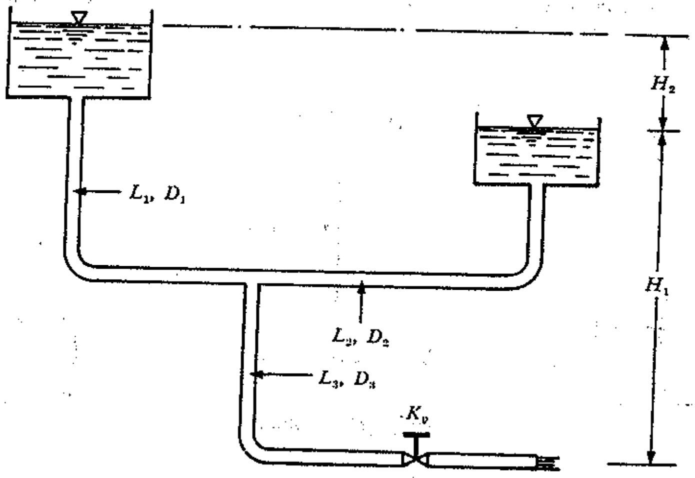


Figura del problema 44.

45. Para el sistema de tuberías, mostrado en la figura, calcular la potencia necesaria de la bomba, (en *CV*) con eficiencia del ochenta por ciento, para que $Q_B = 5$ lt/seg. Considere $L = 210$ m, $D = 0.10$ m y $f = 0.025$.

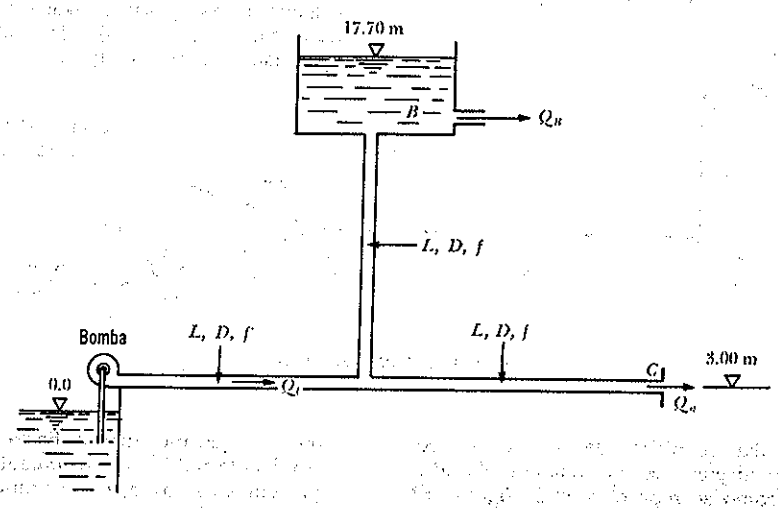


Figura del problema 45.

46. Desde un depósito, cuyo nivel constante se mantiene a la elevación de 20.00 m, parte un conducto recto de 100 m de longitud. Este desemboca a la mitad de un conducto horizontal —perpendicular al primero— con el cual se une en forma de *T*. El segundo conducto desemboca, en cada extremo, a un tanque cuyo nivel se mantiene a la eleva-

ción de 5.00 m. La distancia desde la T a cada tanque es de 50 m. Determinar los diámetros de los conductos si se desea obtener —en cada extremo del segundo conducto— un gasto de, por lo menos, 25 lt/seg. Los conductos son de fierro fundido y los diámetros (comerciales) varían de 10 en 10 mm.

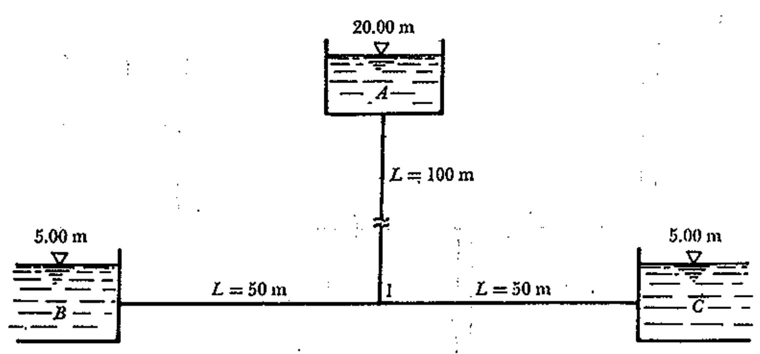


Figura del problema 46.

47. Un depósito, cuyo nivel permanece constante a la elevación de 10.00 m, alimenta dos conductos: 2-4 y 2-6. En 3 y 4 se desean derivar gastos de 2 500 y 2 000 lt/min. De 5 a 6 el conducto debe derivar un gasto de 300 lt/min a cada metro de longitud. El agua debe ser descargada con una presión equivalente a, por lo menos, 6 m de columna de agua. Calcular los diámetros de los conductos si éstos son de fierro fundido y se dispone de las siguientes diámetros comerciales en mm: 102, 152, 203, 254, 305, 406. La velocidad no deberá ser mayor que 3 m/seg.

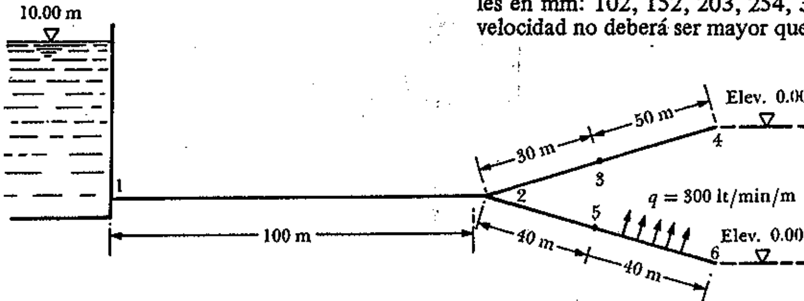


Figura del problema 47.

48. Para el abastecimiento de agua de un poblado se dispone de dos tanques elevados A y B, como se muestran en la figura. El tanque A se alimenta desde el sitio de captación; el B es alimentado (especialmente por la noche) por el A durante periodos cortos y en las horas de gran consumo entrega el agua a la red de abastecimiento. Las tuberías de A y B se unen en el punto 3 y de ahí continúa una tubería hasta el 4, donde se inicia la red de abastecimiento del poblado. Por esta razón, en el punto 4 se debe proporcionar la carga de presión H_4, necesaria, sobre la red de abastecimiento. Las pérdidas locales pueden considerarse despreciables.

Un gasto $Q_4 = 300$ lt/seg se desea abastecer con una carga de presión $H_4 = 40.5$ m.

Al recipiente A corresponde alimentar un gasto de 200 lt/seg y, al B de 100 lt/seg. Las longitudes de las tuberías son: $L_{13} = 2\,000$ m, $L_{23} = 800$ m, $L_{34} = 1\,000$ m; éstas son nuevas, de acero soldado. Las velocidades medias deben quedar comprendidas entre 0.90 y 1.30 m/seg. *a)* Calcular el diámetro de las tuberías, elegido entre los siguientes valores (comerciales): 300, 325, 350, 375, 400 y 450 mm. *b)* Determinar los niveles H_1 y H_2 y la carga de presión en 3, para que ocurran las condiciones anteriores. *c)* Si H_1 y H_2 se mantienen con el valor calculado y se desea que únicamente el tanque A alimente a la red, determinar el gasto abastecido; las velocidades en los tubos 1-3 y 3-4; la carga de presión que se dispondría en el punto 4. *d)* Determinar la distribución y sentido de los gastos, así como las cargas de presión en 3 y 4, si se mantienen las cargas H_1 y H_2 calculadas y se desea un gasto $Q_4 = 50$ lt/seg.

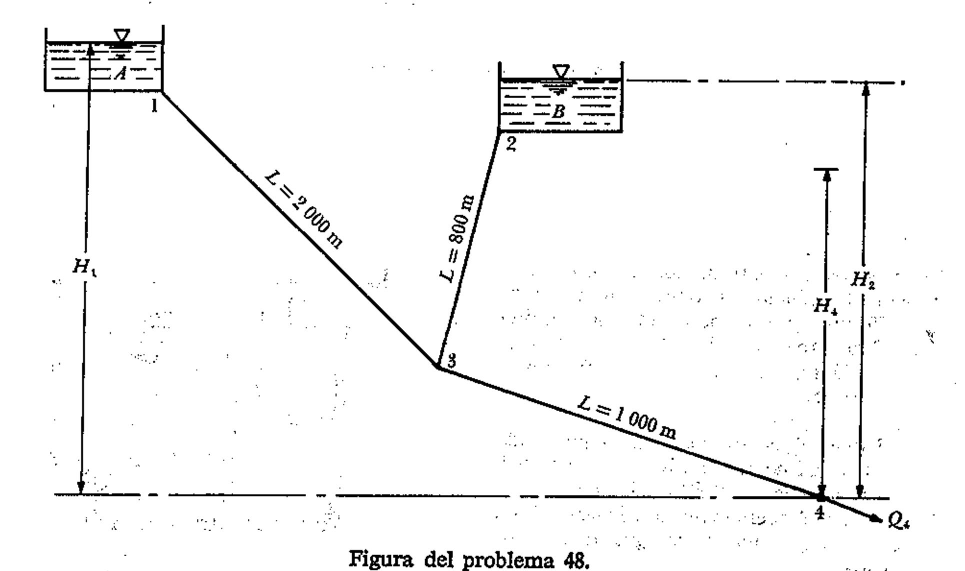


Figura del problema 48.

49. Tres conductos se desean diseñar, dos de los cuales alimentan al nudo C (como se muestra en la figura). Desde los recipientes A y B el tercero conduce el agua hasta el punto D. Las longitudes de los tubos y las elevaciones de los puntos se muestran también en la figura. El recipiente A debe abastecer un gasto de 20 lt/seg; el B, de 10 lt/seg. En el punto D la carga piezométrica no debe descender de la elevación de 230 m (20 m sobre el nivel del terreno). Se desean conocer los diámetros más adecuados para los tres conductos, elegidos entre los siguientes diámetros comerciales: 76, 102, 152 y 203 mm; además, se trata de que sea la solución más económica. Los conductos serán de fierro fundido que, con el uso, su rugosidad absoluta puede aumentar hasta en un veinticinco por ciento.

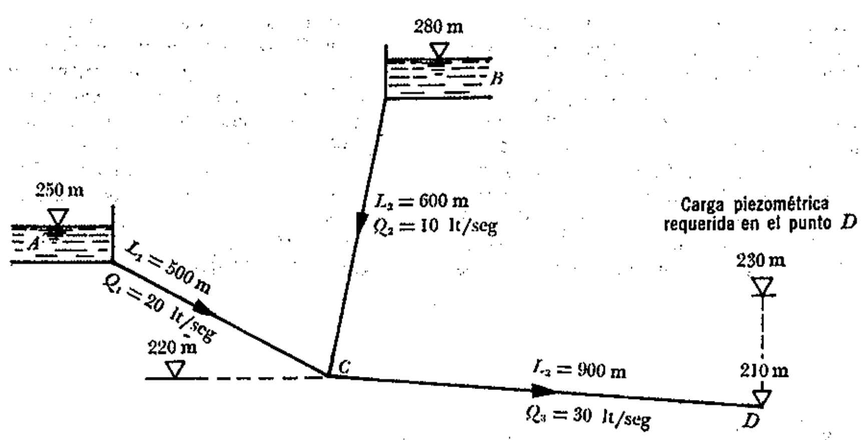


Figura del problema 49.

50. En el sistema mostrado los chiflones descargan al ambiente, y tienen un diámetro $d_H = 20$ mm y un coeficiente de pérdida $K_H = 0.06$. Además, $H_1 = 12$ m y $H_2 = 18$ m; $L = 50$ m, $L_1 = 25$ m; $D = 50$ mm y $f = f_1 = 0.025$.

a) Calcular el gasto descargado por cada chiflón, así como las alturas z_1 y z_2 teóricas, alcanzadas por los chorros.
b) Calcular el coeficiente de pérdida K_v, en la válvula, a modo de igualar los dos gastos.

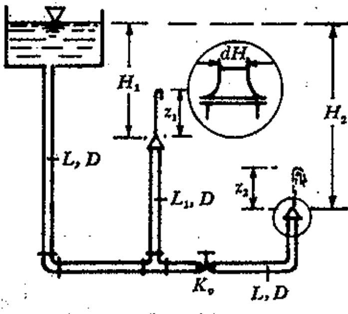


Figura del problema 50.

51. La bomba del sistema de tubos —mostrado en la figura— tiene una potencia de 175 CV y en las secciones *A* y *B* (de succión y de descarga de la bomba) se registran presiones de 0.68 kg/cm² y 3.6 kg/cm² respectivamente.
El coeficiente de pérdida en la válvula es $K_v = 26$ y el factor de fricción de Hazen-Williams es $C_H = 120$ para todos los tubos. *a)* Calcular la distribución de gastos en los tubos de la red y la elevación del agua en el depósito *C*. *b)* Dibujar la línea de cargas piezométricas con las elevaciones en cada punto *C)* Calcular la eficiencia de la bomba.

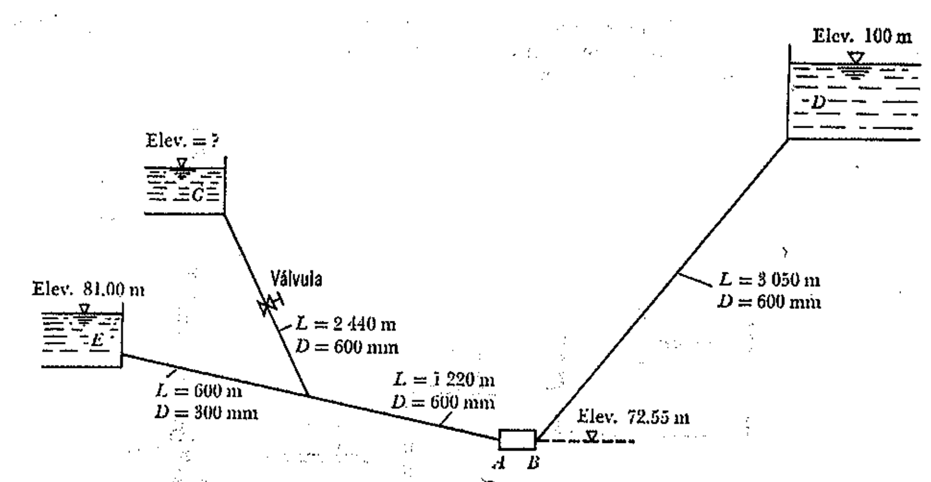


Figura del problema 51.

52. En la red (mostrada en la figura) se pide calcular los diámetros teóricos de la tubería, de manera que: $Q_5 = 25$ lt/s, $Q_6 = 30$ lt/s, $N = 38$ (Kozeny) y la carga de presión mínima, en las descargas, sea de —por lo menos— 15 m de columna de agua. Los tubos son de fierro galvanizado.

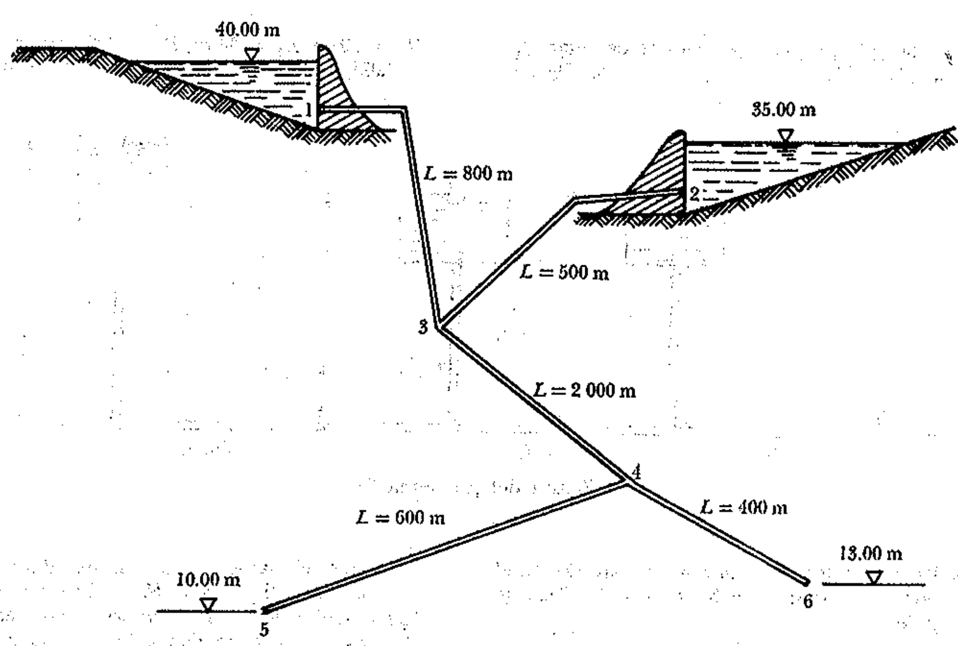


Figura del problema 52.

53. Calcular la potencia de la bomba, con una eficiencia de η = ochenta por ciento, para que el gasto Q_H sea de 10 lt/seg. Tenemos que $L = 5$ m; $D_1 = 50$ mm, $D_2 = 75$ mm; $f = 0.03$.

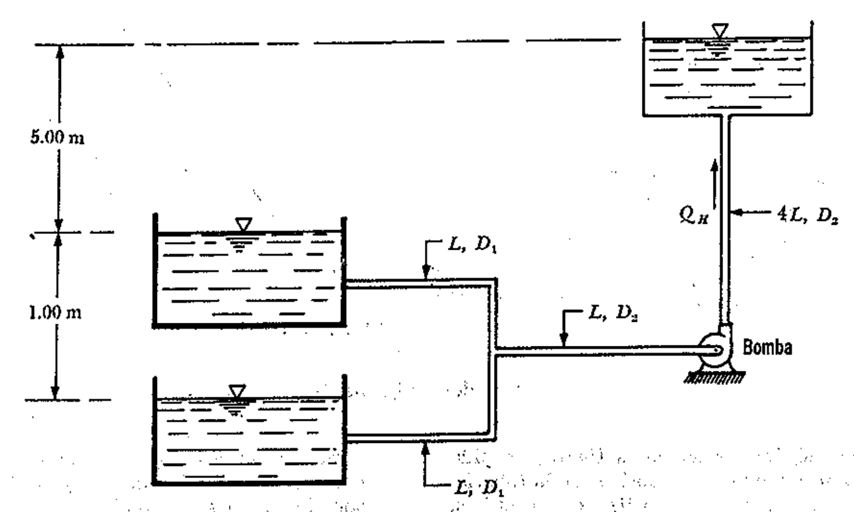


Figura del problema 53.

54. En la red mostrada se requiere calcular Q_4, Q_2, Q_6 y H_6. En este caso $Q = 76.5$ lt/seg, $H_6 = 10$ m, $L_1 = 80$ m, $D_1 = 200$ mm, $f_1 = 0.021$, $L = 50$ m, $D = 100$ mm y $f = 0.025$.

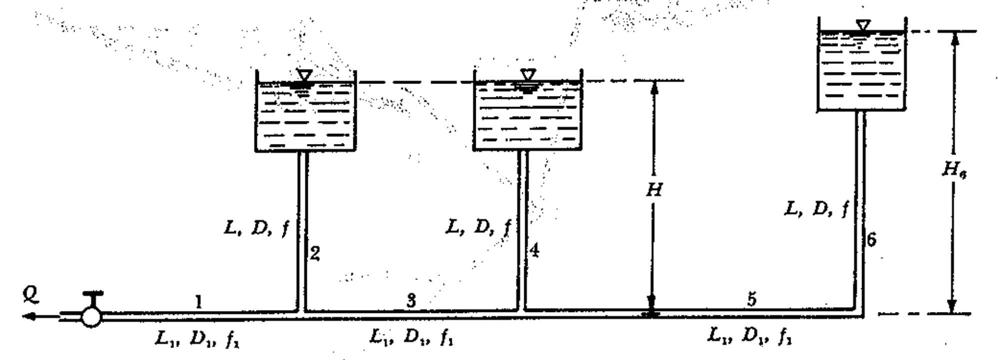


Figura del problema 54.

55. Para el sistema de tuberías, mostrado, en el que $L = 100$ m, $D = 50$ mm y $f = 0.03$, se pide:

a) Calcular los gastos en las tuberías, así como el valor de z, con los datos siguientes: $H_1 = 15$ m, $H_2 = 10$ m y $K_v = 0$. *b)* Calcular los gastos en los tubos, en el caso de que se cierre la válvula en el tubo que va a C.

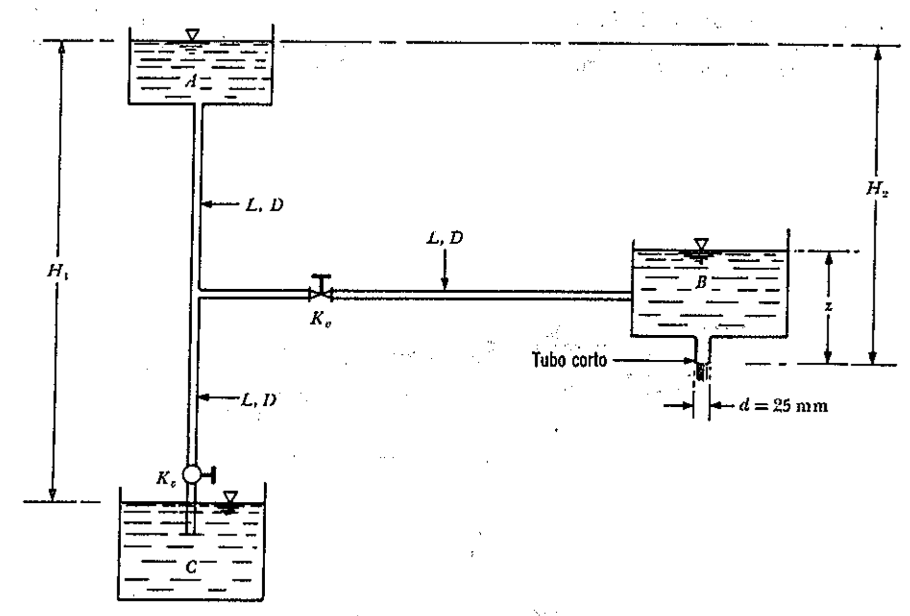


Figura del problema 55.

56. *a)* Determinar los gastos Q_2 y Q_3, descargados por los tubos del sistema (mostrado en la figura) el cual está alimentado por una bomba que eleva la presión, en M, hasta 5 kg/cm². *b)* Calcular el gasto descargado en uno solo de los recipientes, cuando se cierre la válvula en el otro. *c)* ¿Cuál será la elevación C máxima, tolerable, de manera que se eviten presiones negativas para cada uno de los casos anteriores? *d)* Determinar la potencia de la bomba con una eficiencia $\eta = 0.80$ y con $L_1 = 40$ m; $D_1 = 80$ mm, $L_2 = L_3 = 80$ m y $D_2 = D_3 = 50$ mm; $f_1 = 0.025$, $f_2 = f_3 = 0.03$, $K_v = 3$.

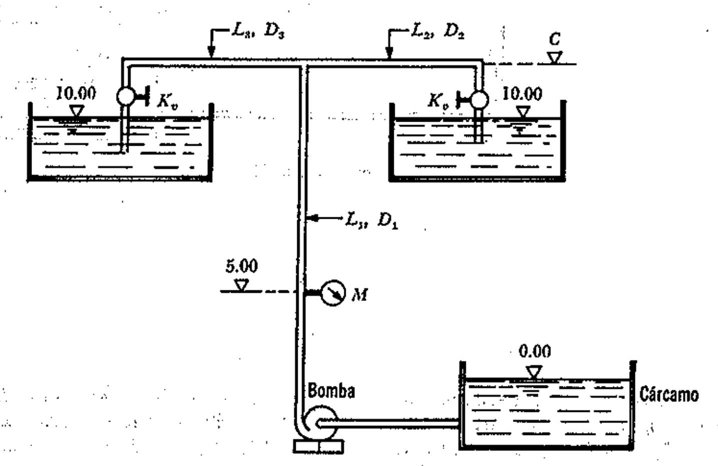


Figura del problema 56.

57. En el sistema, mostrado en la figura, calcular el gasto total Q y el gasto en cada tubo para los siguientes datos: $L_1 = 150$ m; $D_1 = 100$ mm; $L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = L_6 = 60$ m; $D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = 60$ mm; $f_1 = 0.02$; $f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 0.03$.

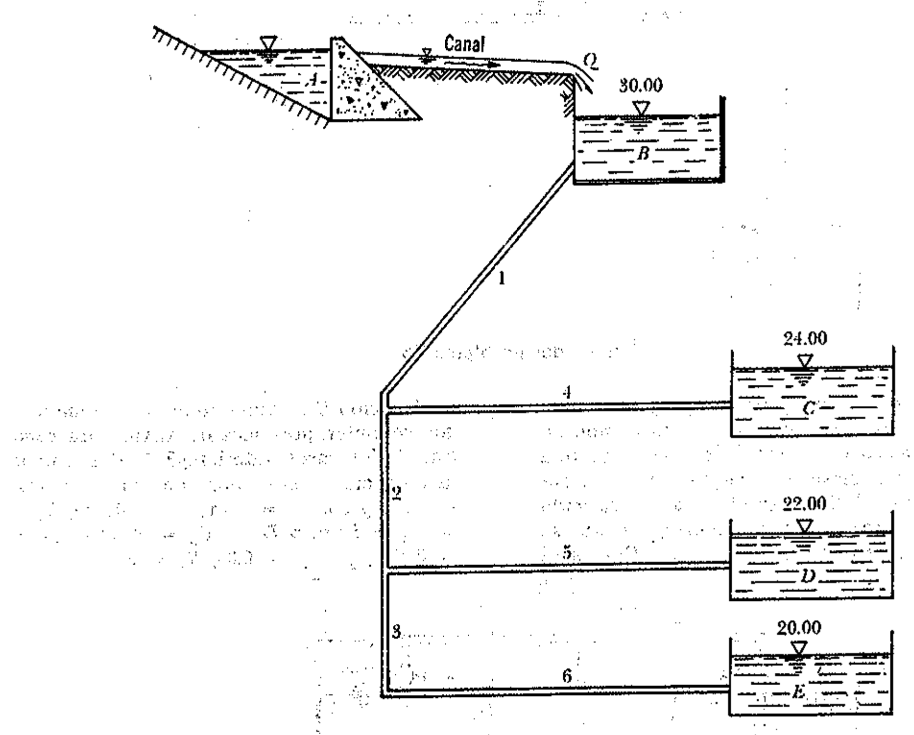


Figura del problema 57.

58. Determinar el gasto a través de cada tubería (de la figura), con los siguientes datos: $L_1 = 500$ m; $L_2 = 750$ m; $L_3 = 1000$ m; $L_4 = 500$ m; $L_5 = 250$ m; $D_1 = 400$ mm; $D_2 = 300$ mm; $D_3 = 450$ mm; $D_4 = 300$ mm; $D_5 = 150$ mm; $f_1 = 0.020$; $f_2 = 0.030$; $f_3 = 0.030$; $f_4 = 0.040$; $f_5 = 0.025$.

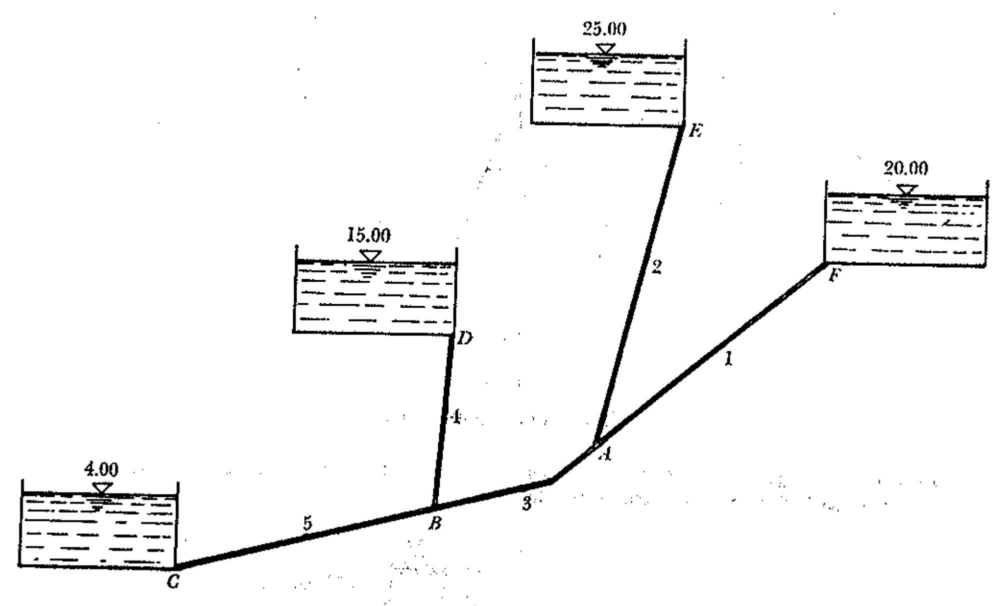


Figura del problema 58.

59. En el sistema indicado, $H = 10$ m, $L = 50$ m, $D = 100$ mm, $f = 0.025$, $L_1 = 80$ m, $D_1 = 200$ mm, $f = 0.021$. Calcular el gasto total Q descargado al ambiente, así como los gastos Q_1, Q_2 y Q_3 que es necesario suministrar a los recipientes para mantener constante, en todos ellos, el nivel H, así como el gasto total Q.

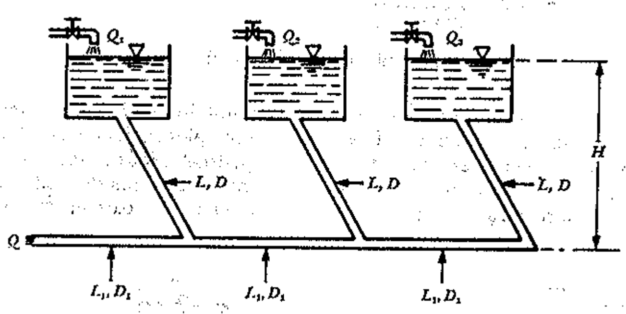


Figura del problema 59.

60. *a)* Determinar el gasto en los tubos del sistema mostrado, si se elimina la bomba.
b) Si el gasto Q hacia el nudo J vale 85 lt/seg, calcular los gastos hacia B y A, además de la altura piezométrica en J.
c) Si la bomba transfiere al líquido una potencia de 10 CV (hacia J), encontrar Q_A y Q_B.
d) Para un gasto de 30 lt/seg hacia B, ¿qué energía comunica la bomba cuando se trata de una eficiencia del setenta por ciento y qué potencia se requiere?

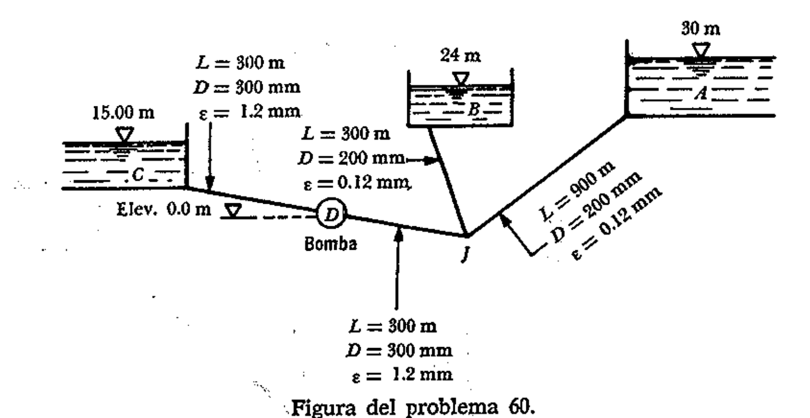


Figura del problema 60.

61. *a)* Determinar el gasto en los tubos del sistema cuya geometría se muestra muy claramente en la figura siguiente.

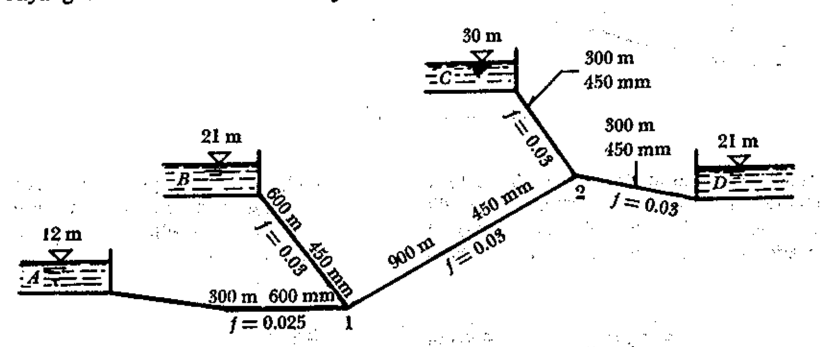


Figura del problema 61.

62. La carga sobre el vertedor (G) rectangular, de pared delgada y sin contracciones laterales, es de 0.33 m. El vertedor tiene una longitud de cresta de 3.6 m y la velocidad de llegada puede despreciarse. Para el sistema indicado en la figura, ¿cuál es la altura piezométrica en B y la distribución de gastos? Dibujar las líneas de alturas piezométricas, considerando que el factor de fricción es $f = 0.02$ en todos los tubos.

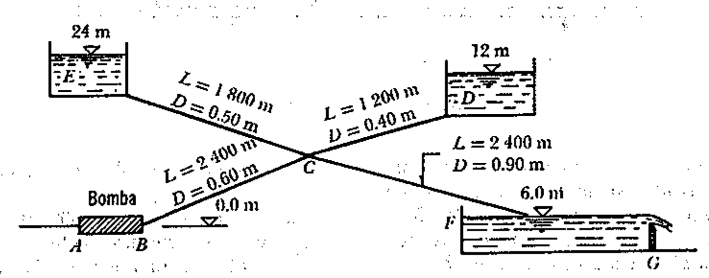


Figura del problema 62.

63. En la figura de abajo la elevación de la línea de cargas piezométricas en B es de 15 m y las tuberías BC y BD están dispuestas de modo que el gasto se divida por igual a partir de B. ¿Cuál es la elevación de la extremidad de la tubería en D; y cuál es la carga h que habrá sobre el orificio E de 10 cm de diámetro ($f = 0.020$ para todas las tuberías).

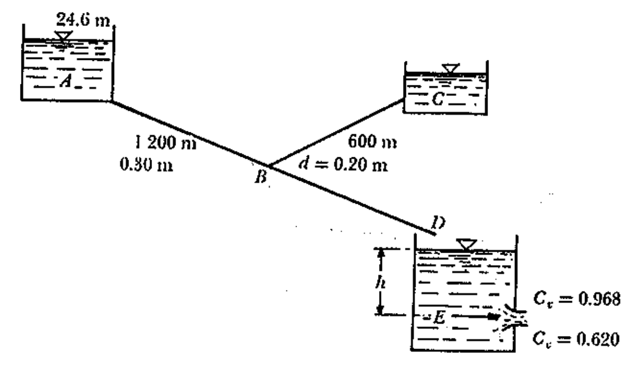


Figura del problema 63.

64. En la red mostrada en la figura, calcular la distribución de gastos en cada tubería, para los siguientes datos:

Tubo	*L* (m)	*D* (mm)	*a*
1-2	300	500	21
2-3	300	300	313
3-1	550	500	38.4
4-1	400	600	10.6
3-4	400	300	469

En la tabla, a representa el coeficiente de la fórmula $h = a\,Q^2$ para la pérdida, donde Q en m³/seg y h en m.

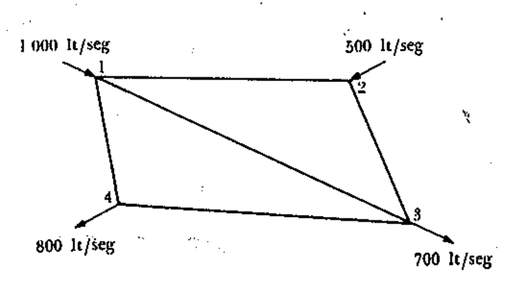


Figura del problema 64.

65. Determinar el gasto en los tubos de la red (de la figura) considerando que $C_H = 100$ en la fórmula de Hazen-Williams.

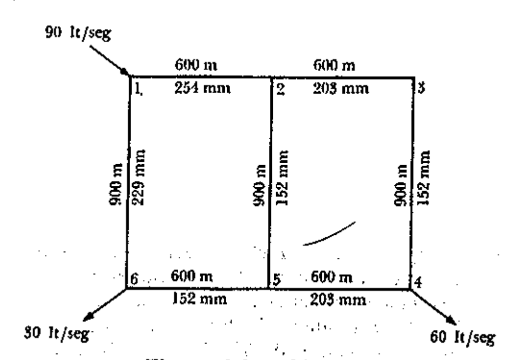


Figura del problema 65.

66. Determinar la distribución de gastos en la red, mostrada en la figura, donde a representa el coeficiente de la fórmula $h = aQ^2$, para Q en m³/seg y h en m.

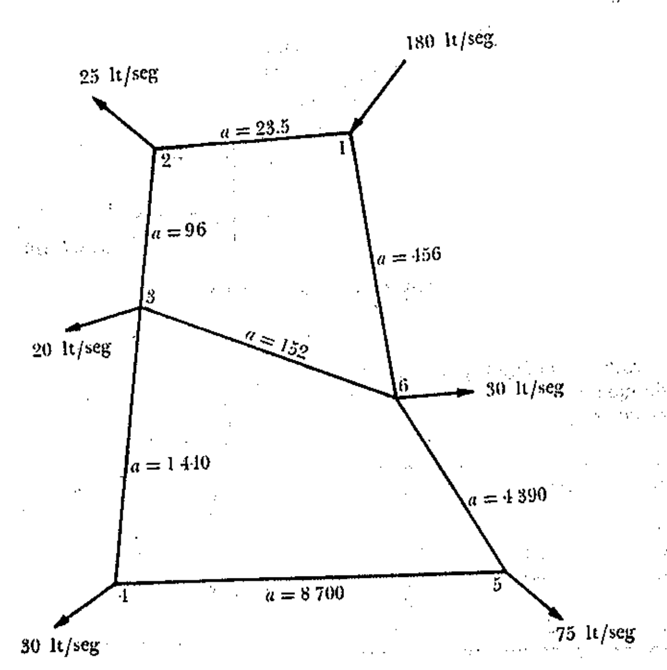


Figura del problema 66.

67. La figura muestra el proyecto del sistema de tubos para combatir incendios en una instalación industrial. En los puntos 1, 2, 3 y 4 se requiere instalar hidrantes para abastecer gastos de 15, 30, 60 y 15 lt/seg, respectivamente. Determinar el gasto en los tubos del sistema. (Utilice la fórmula de Hazen-Williams, $C_H = 95$.) Considerando que la elevación de todos los nudos de la red es 70.00 m; calcular la altura de las cargas de presión, en cada nudo.

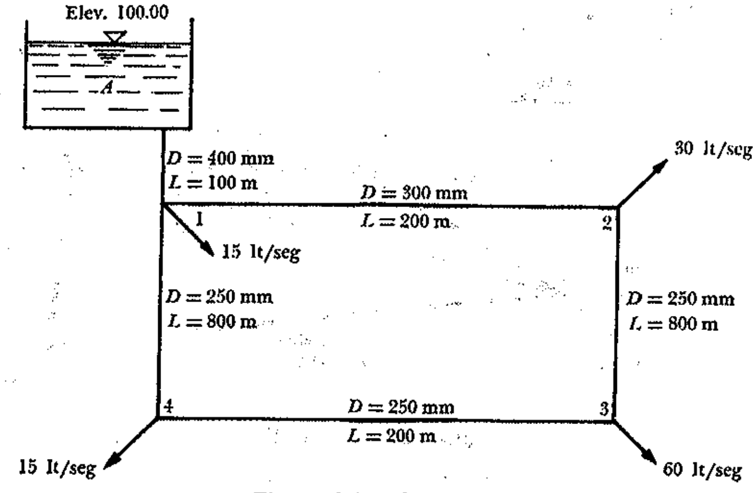


Figura del problema 67.

68. Una red de tubos tiene la geometría mostrada en la figura. Todos los tubos son de acero soldado, nuevo. Determinar el gasto en los conductos del sistema, utilizando la fórmula de Darcy-Weisbach para calcular las pérdidas de fricción.

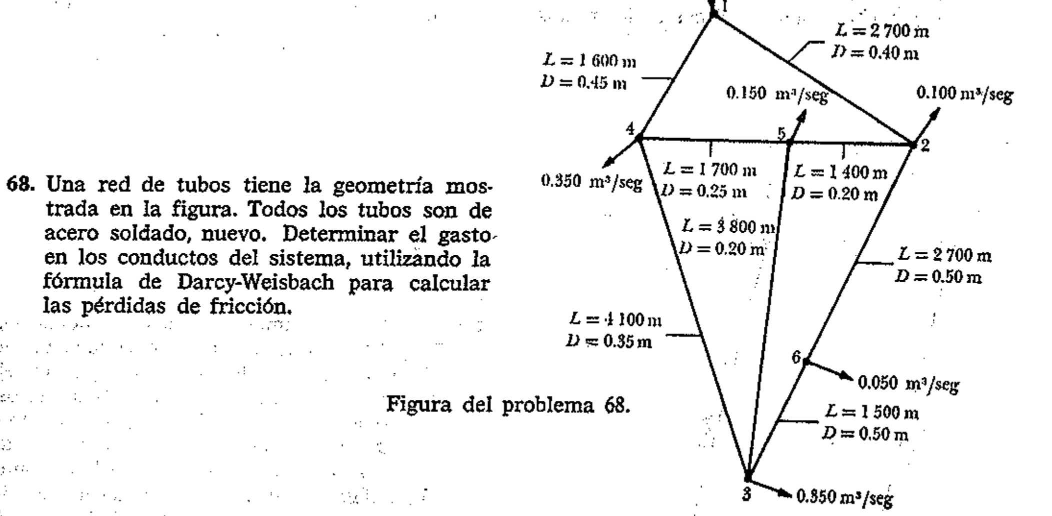


Figura del problema 68.

69. En la red cerrada —mostrada en la figura— se pide calcular el gasto que se tiene en cada una de las tuberías, si el que sale de la presa es $Q_{12} = 90$ lt/seg. En cada toma (3, 4, 5) el gasto debe ser de 30 lt/seg, a una presión mínima de 10 m de columna de agua; las tuberías son de acero nuevo, sin costuras. Calcular también las elevaciones de las cargas piezométricas en los distintos nudos.

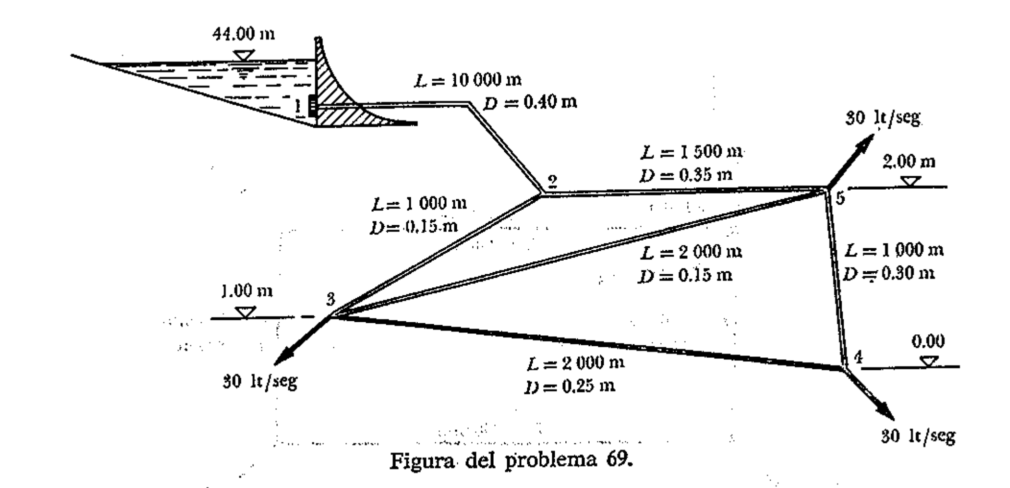


Figura del problema 69.

70. La elevación y la carga de presión en los nudos de la red de tubos, del problema 65, son como sigue: nudo 1, z_1 = 155 m, h_1 = = 34 m; nudo 3, z_3 = 150 m; nudo 4, z_4 = 146 m, h_4 = 28 m; nudo 6, z_6 = 152 m, h_6 = = 32 m. Las entradas y salidas en los nudos 1, 4 y 6 son las mismas que se indica en el problema 65. Suponiendo C_H = 100, en la fórmula de Hazen-Williams, determinar el gasto en los diferentes tubos del sistema y la elevación de la carga piezométrica en los nudos 2 y 5.

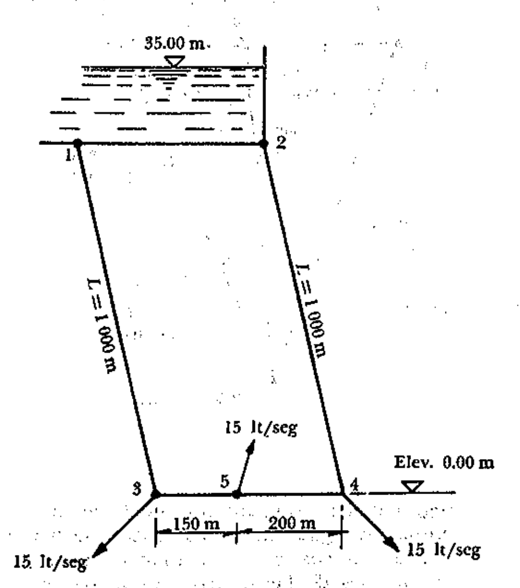
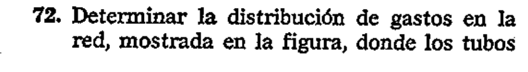


Figura del problema 71

71. Calcular los diámetros de los conductos 1-3, 2-4 y 3-4. Los puntos 3, 5 y 4 se encuentran 35 m por debajo del nivel del agua en el depósito. En cada uno de estos tres puntos se deriva un gasto de 15 lt/seg, con una presión de, por lo menos, 15 m por arriba de su nivel. Los conductos son de fierro fundido, afaltado. Elija los diámetros según los siguientes comerciales: 76, 89, 102, 152 y 203 mm; la velocidad no debe ser menor que 1 m/seg.



72. Determinar la distribución de gastos en la red, mostrada en la figura, donde los tubos son de fierro fundido, viejo (C_H = 100, Hazen-Williams).

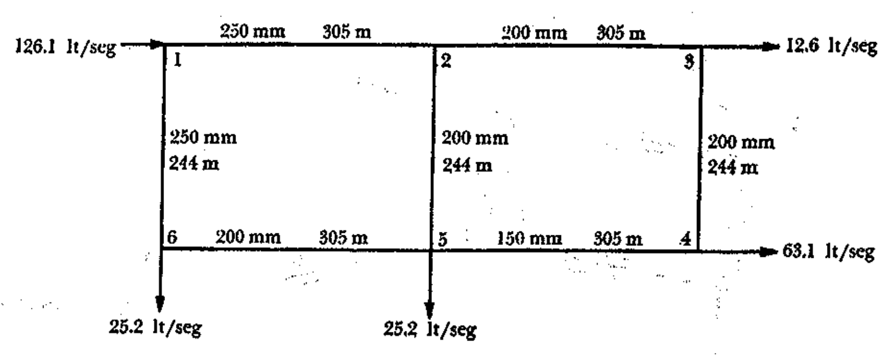


Figura del problema 72.

73. Determinar (en la red mostrada en la figura) el gasto en cada tubo y la pérdida de energía desde 1 hasta 6. Suponer C_H = 100 (Hazen-Williams); el gasto de las derivaciones se expresa en lt/seg.

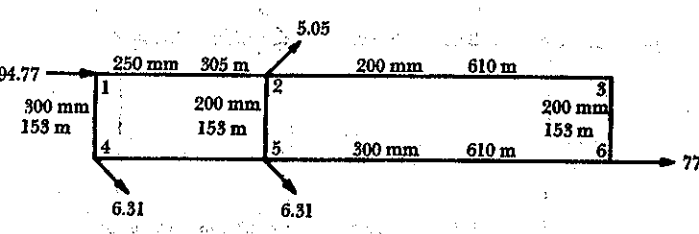


Figura del problema 73.

74. En nuestra figura se presenta la red de tuberías (de una industria) para la cual se desean determinar los diámetros de la misma, de tal manera que la velocidad del agua sea del orden de 0.80 m/seg (velocidad económica). Los tubos deben elegirse entre los valores (comerciales) siguientes: 100, 150 200, 250, 300, 350 y 400 mm. Calcular además la distribución de gastos en la red. Las pérdidas de energía se calculan con la fórmula de Kutter, con m = 0.25. Para la solución, haga una estimación preliminar de los gastos según las direcciones anotadas en la figura; verifique los diámetros indicados y las direcciones de los gastos antes y después de la distribución final.

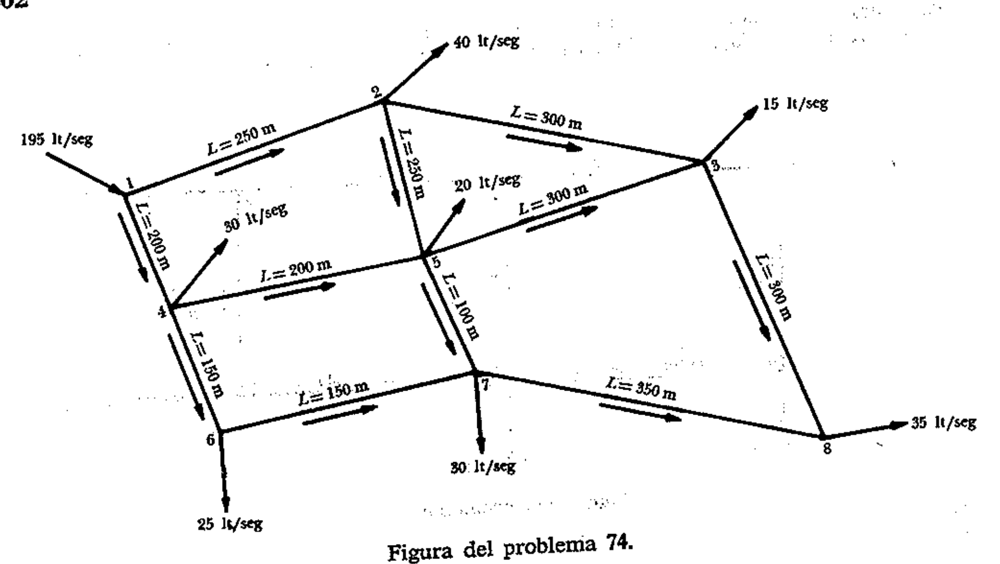


Figura del problema 74.

75. Determinar el gasto en cada tubo del sistema mostrado. Las tuberías son de fierro fundido; el gasto en las derivaciones se expresa en lt/seg.

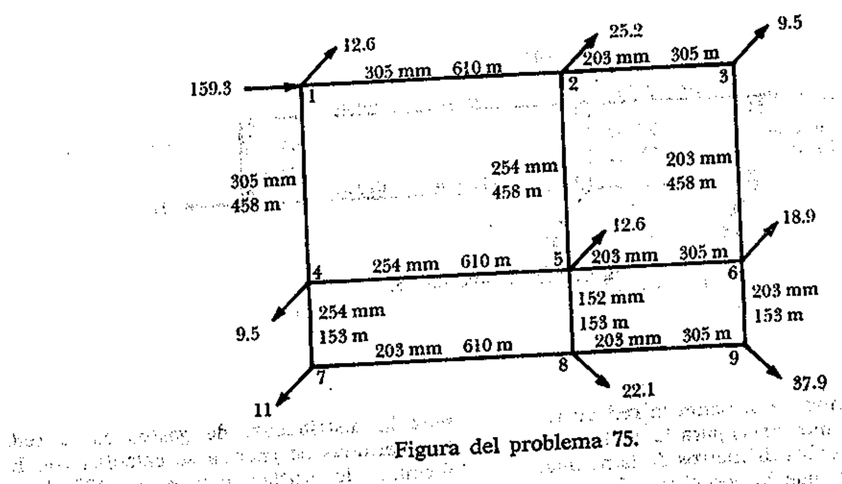


Figura del problema 75.

76. Determinar el gasto en cada tubo (de la red mostrada) donde las tuberías son nuevas de fierro fundido. El gasto en las derivaciones se expresa en lt/seg.

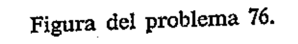


Figura del problema 76.

10

FLUJOS CON POTENCIAL

10.1 Introducción

10.1.1 Planteamiento general

En los capítulos precedentes la mayoría de los problemas se han propuesto para flujo unidimensional, considerando la existencia de una velocidad media representativa en toda la sección de un conducto. Sin embargo, muchos problemas de flujo requieren un conocimiento más preciso de la distribución de velocidades y presiones, a lo largo de las superficies de frontera de un flujo o de una determinada sección transversal del mismo. El análisis de un flujo bi y tridimensional, basado en la existencia de un potencial de velocidades, proporciona una aproximación más real de la mayor parte de las soluciones, las cuales pueden ser también aplicadas al flujo a través de medios porosos, como es el caso en un suelo.

Este tipo de análisis está basado en la existencia de un modelo matemático llamado flujo con potencial; esto es, existe una función escalar $\phi(x, y, z)$ tal que la velocidad en cada punto es $\mathbf{v} = \text{grad}\,\phi$, o sea:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Al calcular las componentes de rot $\mathbf{v}$ (Ec. 3.7*b*), usando las expresiones anteriores, se comprueba que

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = \text{rot grad}\,\phi = 0$$

lo cual significa que la existencia de un potencial de velocidades está limitada a los casos de flujo irrotacional, por lo que en el modelo matemático ambos términos tienen el mismo significado.

Por otra parte, la existencia del flujo con potencial no impone restricciones por lo que respecta a las propiedades del fluido. Puede existir un flujo potencial aun cuando éste sea compresible o viscoso (no permanente o permanente). En este capítulo, el planteamiento se restringe al flujo incompresible por resultar de mayor interés y sencillez.

Por lo que respecta a los flujos viscosos, los gradientes de velocidad son explicables gracias a la acción de esfuerzos cortantes producidos por la viscosidad; únicamente en ciertos casos es compatible un flujo irrotacional con uno viscoso (por ejemplo, el vórtice irrotacional). Puede decirse que en un flujo, el cual inicialmente es irrotacional (como el que se produce partiendo del reposo), la viscosidad genera y propaga vórtices que lo convierten en rotacional. Por otra parte, un flujo generado principalmente por la acción de esfuerzos tangenciales tenderá a ser rotacional, debido a que éstos pueden transmitirse solamente en un fluido viscoso. Es el caso del fluido confinado entre fronteras sólidas en reposo.

Un flujo irrotacional no puede convertirse en rotacional si sobre las partículas actúan únicamente fuerzas de gravedad y de presión. Es más, como regla general, se puede producir un flujo —aproximadamente irrotacional— en fluidos reales, si el movimiento es resultado de fuerzas de presión y de gravedad, o bien en aquellas zonas de un flujo a presión en las que los efectos viscosos carezcan de importancia. Para el primer caso puede tomarse como ejemplo la generación de ondas sobre la superficie libre de un líquido o, en general, flujos a superficie libre (canales, vertedores, compuertas, ampliaciones, reducciones, etcétera). En el segundo caso, el flujo rotacional se confina sólo a la zona próxima a la pared llamada *capa límite*. La hipótesis de Prandtl (Sec. B.3.4) establece que para fluidos de poca viscosidad los efectos de ésta son apreciables sólo en una zona de reducido espesor, en la proximidad de la pared. Asimismo, los resultados que se obtienen, suponiendo que se trata del flujo de un líquido no viscoso, pueden aplicarse al flujo de un líquido real con suficiente aproximación. Esto es principalmente cierto cuando el flujo es convergente o acelerado, pero en flujos desacelerados pueden existir zonas de separación de la capa límite y producirse, además, una estela de vórtices difícil de estudiar analíticamente.

De las explicaciones anteriores se desprende que el flujo con potencial se restringe prácticamente al fluido ideal o perfecto, definido ya como aquel que se comporta como incompresible y no viscoso, cuyo estudio forma parte de la Mecánica de Fluidos, llamada tradicionalmente Hidrodinámica. Si se exceptúa la presencia de singularidades vorticosas, el movimiento de este tipo de fluidos es irrotacional.

10.1.2 Flujo en medios porosos

Un ejemplo clásico de la existencia de potencial, en un flujo, lo constituye el de infiltración a través de medios permeables en el que dominan la acción viscosa y una clara irrotacionalidad. Los casos más comunes comprenden el flujo de agua, aceite u otros fluidos, que se produce a través de suelos o rocas permeables.

La figura 10.1 presenta un esquema del flujo que ocurre a través de una muestra de medio poroso, entre dos depósitos a superficie libre. Considere un plano de referencia como el indicado. En un punto 1 cualquiera —sobre una línea de corriente— se tiene una elevación z_1 y una carga de presión p_1/γ; esto es, la energía $h_1 = z_1 + p_1/\gamma$. Al pasar al punto 2 se tendrá, ahora $h_2 = z_2 + p_2/\gamma$.

En h no queda incluida la carga de velocidad por ser muy pequeña en comparación con las otras dos. Darcy demostró experimentalmente que la velocidad media, con que se mueve el fluido de 1 a 2, está dada por la ley que lleva su nombre, a saber:

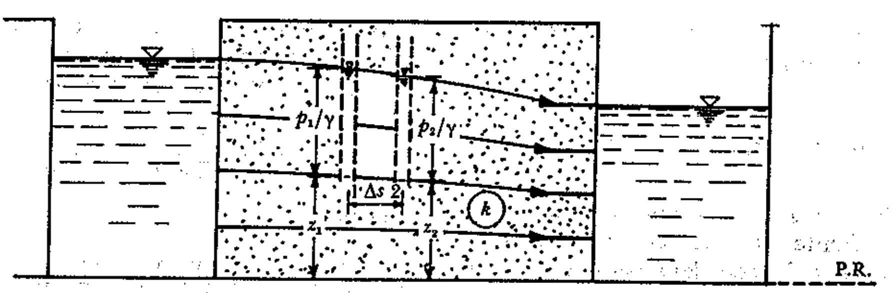


Figura 10.1. Para la derivación de la Ley de Darcy en un medio poroso.

$$v = -k\,\frac{\Delta h}{\Delta s}$$

donde $\Delta h = h_2 - h_1$; Δs la distancia recorrida de 1 a 2; y k es un coeficiente llamado de permeabilidad o de conductividad hidráulica, que tiene las dimensiones de una velocidad (generalmente cm/seg) y que depende de las características del suelo y del fluido. El signo negativo en la ecuación de Darcy se debe a que h decrece al aumentar s. También, v se refiere a la velocidad con que fluye el fluido, considerando las porciones sólidas y vacías del medio. Si se define la porosidad del medio n como la relación del volumen de vacíos al volumen total (de sólidos y vacíos), la velocidad efectiva del fluido v_s a través de los poros vale:

$$v_s = \frac{v}{n}$$

La ley de Darcy se puede generalizar para tres dimensiones, aceptando que existan permeabilidades isotrópicas distintas, según un sistema de coordenadas triortogonal. Esto es:

$$v_x = -k_x\,\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$v_y = -k_y\,\frac{\partial h}{\partial y}$$

$$v_z = -k_z\,\frac{\partial h}{\partial z}$$

Ello implica la existencia de un potencial que satisface las ecuaciones anteriores:

$$\varphi = -(k_x + k_y + k_z)\,h \qquad (10.1)$$

donde k_x, k_y, k_z son los coeficientes de permeabilidad, según las coordenadas x, y, z y funciones únicamente de ellas en el orden respectivo. Además, $h = z + p/\gamma$ es la carga total en cada punto del flujo.

Cuando el medio sea isotrópico, $k_x = k_y = k_z = k$ en las ecuaciones anteriores.

10.2 Ecuaciones fundamentales

Para el flujo incompresible (permanente o no) y para el irrotacional es válida la ecuación (4.3) de continuidad, $\text{div}\,\mathbf{v} = 0$.

Si además se considera que el fluido es no viscoso ($\mu = 0$) el esfuerzo tangencial τ vale cero en todos sus puntos. Por otra parte, con $\mathbf{v} = \text{grad}\,\phi$, entonces:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\text{grad}\,\phi) = \text{grad}\,\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

y la ecuación de movimiento (4.9) se reduce a la forma:

$$\text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = 0$$

Debido a que la definición matemática de gradiente es independiente del sistema de ejes de coordenadas que se elija, la integración de la ecuación se puede efectuar en todo el campo de flujo y no necesariamente sobre una misma línea de corriente.

Por lo tanto, se deduce que

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = C(t) - \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (10.2a)$$

o bien, resulta:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = C(t) - \frac{1}{g}\frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad (10.2b)$$

donde $C(t)$ es una función que depende únicamente del tiempo.

La Ec. (10.2b) es la ecuación del movimiento en un flujo irrotacional y es válida en todo el campo de un flujo ideal —no permanente— sin referirse necesariamente a una misma línea de corriente particular como la Ec. (4.11). Es de gran utilidad en la teoría de las ondas irrotacionales. Para el flujo permanente, la Ec. (10.2b) se simplifica a la forma:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H = \text{const} \qquad (10.3)$$

Esta ecuación se conoce como de Bernoulli e indica que la energía H es constante para todos los puntos de un campo de flujo permanente con potencial y no del todo necesario sobre una misma línea de corriente, como la Ec. (4.14).

Por lo que se refiere a la segunda ecuación del movimiento (4.9*b*), se puede sumar en ambos lados el término

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{v^2}{2g}\right) = \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial n}$$

y se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g}\right) = \frac{v^2}{rg} + \frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial n}$$

De acuerdo con la Ec. (10.3) el primer miembro de la ecuación anterior vale cero y, por lo tanto, del segundo se obtiene:

$$\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \qquad (10.4)$$

Además, toda vez que $dn = dr$, de la integración por separación de variables resulta entonces:

$$\ln r + \ln v = \ln k = \text{const}$$

$$v = k/r \qquad (10.5)$$

que es la ecuación del movimiento para un flujo irrotacional y para cada línea de corriente (k = const), distinta de la ecuación $v = \omega r$ del flujo rotacional. Finalmente la tercera ecuación del movimiento (4.9*c*) es válida también para este campo de flujo.

La aplicación de la ecuación de Bernoulli (10.3) entre un punto 0 y otro cualquiera de un campo de flujo irrotacional y permanente, es:

$$(p_0 + \gamma z_0) + \rho\frac{v_0^2}{2} = (p + \gamma z) + \rho\frac{v^2}{2}$$

o bien:

$$C_p = \frac{(p + \gamma z) - (p_0 + \gamma z_0)}{\frac{1}{2}\rho v_0^2} = 1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \qquad (10.6)$$

C_p se conoce como coeficiente de presión y no posee dimensiones. Si el flujo es horizontal, entonces $z = z_0$ y desaparecen los términos correspondientes en la (ecuación 10.6).

Problema 10.1. El flujo bidimensional de un líquido se produce entre dos paredes cilíndricas coaxiales horizontales, de radio interior r_i y exterior r_e y sección transversal rectangular de ancho b (Fig. 10.2). El flujo, antes del cambio de dirección, tiene velocidad y presión media v_0 y p_0 en toda la sección. Las líneas de corriente en la curva se supone que son circunferencias con centro en 0. Determinar la distribución de velocidades v y presiones p a través de la sección *O-A*, suponiendo que las pérdidas de energía son despreciables y el flujo irrotacional (con potencial).

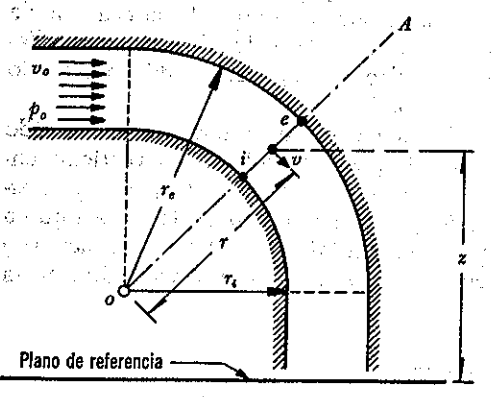


Figura 10.2. Flujo bidimensional e irrotacional entre dos paredes cilíndricas.

Solución. En el campo de flujo se satisface la Ec. (10.5) en la cual, la constante k se obtiene de la ecuación de continuidad (4.7*a*) para la unidad de ancho, como sigue:

$$v_0(r_e - r_i) = \int_{r_i}^{r_e} v\,dr = k\int_{r_i}^{r_e}\frac{dr}{r}$$

$$= k\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)$$

$$k = v_0\frac{r_e - r_i}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)} = \frac{q}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}$$

donde $q = v_0(r_e - r_i)$ es el gasto por unidad de ancho.

Con este valor de k en la Ec. (10.5) la ley de distribución de velocidades resulta ser:

$$v = \frac{v_0}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}\frac{r_e - r_i}{r} = \frac{q}{r\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}$$

La Ec. (10.3) es aplicable a cualquier punto de radio r, donde —al substituir la ley con la que se distribuye v— resulta:

$$p = \gamma(H - z) - \rho\frac{v_0^2}{2}\left[\frac{r_e - r_i}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}\right]^2\frac{1}{r^2}$$

La mínima presión se tiene para la pared interior ($r = r_i$, $z = z_i$) y vale:

$$p_i = \gamma(H - z_i) - \rho\frac{v_0^2}{2}\left[\frac{\frac{r_e}{r_i} - 1}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}\right]^2$$

la máxima presión para la pared exterior ($r = r_e$, $z = z_e$), será:

$$p_e = \gamma(H - z_e) - \rho\frac{v_0^2}{2}\left[\frac{1 - \frac{r_i}{r_e}}{\ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}\right]^2$$

Entonces, la diferencia entre ambas presiones es:

$$p_e - p_i = \gamma\,(z_i - z_e) + \rho \frac{v_0^2}{2}\left[\frac{r_e - r_i}{r_i r_e \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right)}\right]^2 [r_e^2 - r_i^2]$$

o bien, al despejar v_0, el gasto unitario en función de esta diferencia de presión vale:

$$q = r_i r_e \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) \times \sqrt{\frac{2g\left[\left(\frac{p_e}{\gamma} - \frac{p_i}{\gamma}\right) + (z_e - z_i)\right]}{(r_e^2 - r_i^2)}}$$

Si las paredes cilíndricas que limitan al flujo, son verticales, se hace $z_i = z_e$ en todas las ecuaciones anteriores.

Los resultados tienen interés cuando se desea determinar el gasto en una conducción forzada, para lo cual basta medir la diferencia de presión entre el lado interior y el exterior en una curva de la misma. También en el caso de conocer la magnitud de la presión negativa en estructuras a presión que poseen zonas por arriba de la línea de cargas piezométricas, con objeto de compararlas con la presión de vaporización del líquido y predecir el peligro de cavitación. En el caso del sifón (de sección rectangular) de la Fig. 10.3, $H = 0$ y todas las variables dependen de z, al elegir el plano de referencia coincidiendo con la parte más baja de la sección vertical en la garganta.

En efecto, una vez conocido el radio R de la pared inferior, $r = R + z$, $r_i = R$, $r_e = R + d$, y la velocidad media $v_0 = q/d$, de acuerdo con los resultados anteriores la distribución de presiones sería:

$$p(z) = -\gamma z - \rho \frac{v_0^2}{2} \times \left[\frac{d}{\ln\left(1 + \frac{d}{R}\right)}\right]^2 \frac{1}{(R+z)^2}$$

donde la presión mínima ocurre para $z = d$ y es obviamente negativa.

Otra aplicación es en el caso de la distribución de presiones sobre la vertical que pasa por el centro de curvatura de una vena líquida, sobre la estructura llamada salto de esquí al pie de un cimacio (Fig. 10.4).

En este caso, debido a que z se mide desde la plantilla del salto y verticalmente, entonces $z_e = 0$, $z_i = d$, $p_i = 0$ (atmosférica) y con b ancho de la vena líquida y Q gasto total ($v_0 = Q/bd$); de acuerdo con los resultados anteriores la diferencia de presiones entre el fondo y la superficie libre ($p_i = 0$) es:

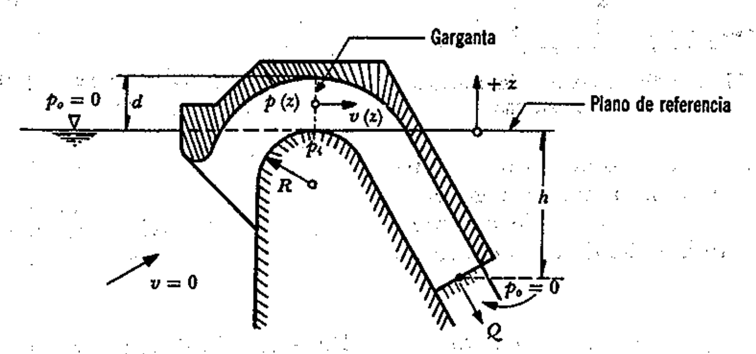


Figura 10.3. Distribución de presiones en la sección de la garganta de un sifón.

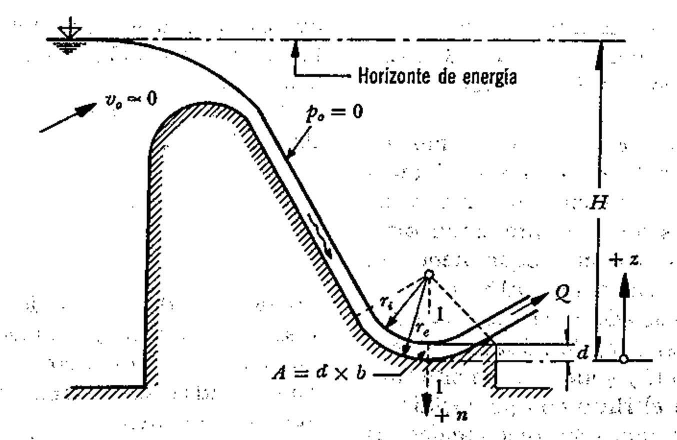


Figura 10.4. Distribución de presiones radiales en un salto de esquí.

$$p_e = \gamma d + \frac{1}{2}\rho \frac{q^2}{d^2}\left[\frac{d}{\ln \frac{r_e}{r_i}}\right]^2 \times \left[\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_e^2}\right]$$

Por ejemplo, si $H = 20$ m, $Q = 167.5$ m³/seg, $d = 2$ m, $b = 5$ m, $r_e = 10$ m, $r_i = 8$ m, $q = 167.5/5 = 33.5$ m³/seg/m, resulta entonces:

$$v_e = \frac{q}{r_e \ln(r_e/r_i)} = 15 \text{ m/seg}$$

$$v_i = \frac{q}{r_i \ln(r_e/r_i)} = 18.8 \text{ m/seg}$$

$$\frac{p_e}{\gamma} = 8.44 \text{ m}$$

Observe que si se considera una distribución hidrostática de presiones, la carga de presión en el fondo sería igual al tirante $d = 2$ m.

10.3 Propiedades de la función potencial y condiciones de frontera

10.3.1 Propiedades

De acuerdo con la definición de función potencial: $\mathbf{v} = \text{grad}\,\phi$, y si $\mathbf{s}$ es el vector unitario tangente en cualquier punto a una línea de corriente, se puede escribir que:

$$v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} = \text{grad}\,\phi \cdot \mathbf{s}$$

Esto es, por definición de derivada direccional, la magnitud de la velocidad es:

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial s} \qquad (10.7)$$

donde s representa la coordenada curvilínea a lo largo de la línea de corriente.

Por otra parte, la ecuación:

$$\phi(x, y, z) = H$$

representa una familia de superficies equipotenciales diferentes, de acuerdo con el

valor que se le asigne a la constante. Todos los puntos contenidos en una de estas superficies tienen el mismo valor del potencial ϕ.

Puesto que grad ϕ es un vector normal en cada punto a la superficie equipotencial y, a su vez, representa al vector velocidad, las líneas de corriente serán ortogonales a las superficies equipotenciales como se indica en la Fig. 10.5.

Si las superficies de corriente ψ = constante, χ = constante, definidas en la sección 3.8 (Fig. 3.15) (que obviamente también existen en el flujo con potencial), se eligen de modo que sean ortogonales, éstas formarán con las superficies equipotenciales un triple sistema de superficies ortogonales:

$$\psi(x, y, z) = F$$
$$\chi(x, y, z) = G$$
$$\phi(x, y, z) = H$$

a partir del cual se pueden determinar las características del flujo en cada punto.

La existencia del potencial ϕ en un flujo incompresible donde div $\mathbf{v} = 0$, implica que div grad $\phi = 0$. Esto es, se cumple:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad (10.8)$$

que es la ecuación de Laplace, por lo que la función potencial ϕ que la satisface es armónica.

Para un flujo bidimensional la ecuación de Laplace se reduce a:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (10.9)$$

donde, por definición de función potencial y de corriente, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, las cuales en coordenadas cartesianas y polares son respectivamente:

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad (10.10a)$$

$$v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (10.10b)$$

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad (10.11a)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \qquad (10.11b)$$

Siendo el flujo irrotacional, la componente según z (normal al plano del flujo) de rot $\mathbf{v}$ es (Ec. 3.7b) la siguiente:

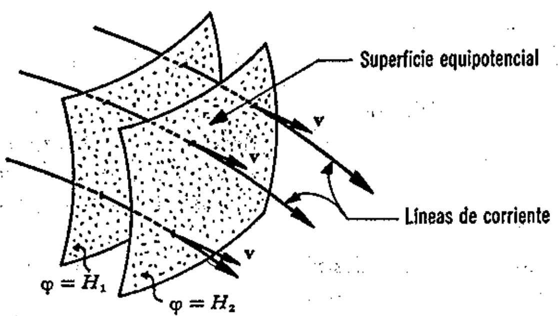


Figura 10.5. Ortogonalidad entre las superficies equipotenciales y las líneas de corriente.

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$$

donde, al substituir las Ecs. (10.10), se obtiene:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \qquad (10.12)$$

Lo cual significa que en un flujo bidimensional con potencial, la función ψ es también armónica.

De los desarrollos anteriores se deduce que las funciones potencial y de corriente no son independientes, sino que están relacionadas entre sí a través de las ecuaciones (10.10) o (10.11), de modo que si se obtiene una de ellas, existe una sola función correspondiente a la otra. Lo anterior se comprueba en el caso del flujo bidimensional en cuanto subsiste la relación entre ellas, a saber:

$$\psi = \int\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy\right) = -\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial x}dy\right) \qquad (10.13)$$

Por otra parte, la semejanza entre las Ecs. (10.9) y (10.12) sugiere que las funciones potencial y corriente —para un flujo bidimensional— representan las funciones de corriente y potencial, respectivamente, para otro del mismo tipo. Es decir, dadas las funciones potencial y de corriente para un flujo, se pueden intercambiar entre sí para obtener otro tipo de flujo. Un ejemplo es la fuente, el sumidero y el vórtice irrotacional.

Pueden enumerarse otras propiedades importantes de la función potencial.

a) Si ϕ_1 y ϕ_2 son dos potenciales de velocidad que satisfacen la ecuación de Laplace, las funciones $\phi_1 + \phi_2$ o $\phi_1 - \phi_2$ también cumplen con la ecuación de Laplace y representan el potencial para el flujo que resulta de la combinación. Esto se debe a que la ecuación de Laplace es lineal y vale el principio de superposición.

b) Una función potencial que satisface la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera, en un flujo determinado, representa la solución única del problema de dicho flujo. En efecto, suponga que existen dos funciones ϕ_1 y ϕ_2 que satisfacen las condiciones antes indicadas. Tomando en consideración la propiedad anterior, la función $\phi_3 = \phi_1 - \phi_2$ es también función potencial. De la Ec. (10.7) se tiene:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial s} = \frac{\partial\phi_2}{\partial s}$$

o bien:

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial s} - \frac{\partial\phi_2}{\partial s} = 0$$

y de este modo:

$$\frac{\partial\phi_3}{\partial s} = \frac{\partial(\phi_1 - \phi_2)}{\partial s} = \frac{\partial\phi_1}{\partial s} - \frac{\partial\phi_2}{\partial s} = 0$$

luego entonces ϕ_3 = constante, es decir, que ϕ_1 y ϕ_2 difieren únicamente en una cantidad constante, de tal suerte que $\phi_1 = \phi_2$ + constante. Luego, el flujo tiene que ser el mismo, ya que esa constante no altera los resultados basados en ϕ_1.

c) Considerando una curva AB cualquiera dentro de un flujo, la integral de línea, a lo largo de esa curva desde A hasta B, es:

$$\int_A^B (\mathbf{v}\cdot d\mathbf{s}) = \int_A^B (v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz)$$

donde $d\mathbf{s}$ es el vector diferencial de arco sobre la curva AB.

Si el flujo es con potencial, dicha integral será:

$$\int_A^B \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) = \int_A^B d\phi$$

$$\int_A^B (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}) = \phi_B - \phi_A \qquad (10.14)$$

Lo cual significa que la integral de línea, a lo largo de la curva AB y dentro del campo de un flujo con potencial, es independiente de la forma de ésta e igual a la diferencia de los valores de la función potencial en los puntos extremos de la misma. Cuando la curva es cerrada, A y B coinciden y ϕ es función unívoca de las coordenadas; la integral de línea calculada se conoce como circulación y se representa por Γ. La circulación en un flujo con potencial vale entonces cero, siempre que no existan puntos singulares en el flujo, como en el centro de un vórtice libre. Si el potencial de velocidades es función múltiple de las coordenadas (como en el vórtice libre) la circulación a lo largo de un contorno cerrado es distinta de cero.

10.3.2 Condiciones de frontera

La integración de la ecuación de Laplace, en un flujo, permite obtener el valor de ϕ para cada punto dentro del campo, de acuerdo con las condiciones impuestas en la frontera.

a) El primer problema de frontera es el de determinar el potencial dentro de una región del flujo a partir de los valores prescritos para el mismo sobre la frontera. El problema de demostrar la existencia de ese potencial y expresarlo para las condiciones impuestas se conoce como problema de Dirichlet.

b) El segundo problema, llamado de Neumann, consiste en determinar el potencial en el interior de la región, de acuerdo con los valores prescritos de la derivada de ϕ en dirección normal a la frontera. Esto ocurre en aquellas fronteras que coinciden con superficies de corriente, o bien equipotenciales. Para este tipo de problema se satisfacen las condiciones llamadas de gradiente normal nulo, a saber:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 \qquad (10.15a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \qquad (10.15b)$$

en las que n y s son respectivamente direcciones normal y tangencial a dichas superficies.

c) El tercer problema, llamado de Cauchy, consiste en que tanto el potencial como el gradiente normal están definidos en toda la frontera.

d) El cuarto problema es una combinación de los criterios de Dirichlet y Neumann y equivale a determinar el potencial en la región, a partir de los valores prescritos del mismo, en una parte de la frontera y del gradiente normal en el mismo.

Problema 10.2. Determinar el potencial de velocidad para el flujo incompresible permanente, del problema 4.1, en el que a es una constante arbitraria mayor que cero; *a)* encontrar la función potencial, *b)* calcular la diferencia de presiones que existe entre los puntos $P_0\,(r=0,\ z=1.5\,\text{m})$ y $P\,(r=z=1.5\,\text{m})$, si el fluido es agua y el gasto total es $Q=10.64\,\text{m}^3/\text{seg}$.

Solución a). Para que el flujo sea con potencial, debe ser irrotacional. En efecto, de la ecuación (3.7b) se comprueba que rot $\mathbf{v} = 0$.

Por definición de potencial se entiende que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = ax$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = ay$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = -2\,az$$

Integrando dichas ecuaciones, obtenemos:

$$\phi = \tfrac{1}{2}\,ax^2 + f(y) + f(z) + C$$

$$\phi = \tfrac{1}{2}\,ay^2 + f(x) + f(z) + C$$

$$\phi = -\,az^2 + f(x) + f(y) + C$$

Al compararlas, puesto que ϕ debe ser la misma, la única solución posible es:

$$\phi = \tfrac{1}{2}\,a(x^2 + y^2) - az^2 + C$$

o bien, en coordenadas cilíndricas:

$$\phi = \tfrac{1}{2}\,ar^2 - az^2 + C$$

donde C es una constante arbitraria cualquiera. Ésta es la función potencial de un chorro cilíndrico contra una placa plana.

Solución b). El punto $P_0\,(r=0,\ z=1.5\,\text{m})$ está sobre el eje de simetría y las componentes de la velocidad, para $a = 0.502\,\text{seg}^{-1}$, valen:

$$v_r = a\,r = 0$$

$$v_z = -2\,a\,z = -2 \times 0.502 \times 1.5 = -1.506\,\text{m/seg}$$

Para el punto $P(r=z=1.5\,\text{m})$, la velocidad se obtuvo en el problema 4.1 y vale $v=1.684\,\text{m/seg}$.

Estando ambos puntos al mismo nivel, de la ecuación de Bernoulli (10.3), se tiene:

$$p_o - p = \tfrac{1}{2}\,\rho\,(v^2 - v_o^2)$$

Como para el agua, $\rho = 101.97\,\text{kg seg}^2/\text{m}^4$, entonces:

$$p_o - p = \frac{101.97}{2}\,(1.684^2 - 1.506^2) =$$

$$= 28.55\ \text{kg/m}^2$$

Problema 10.3. En el problema 3.4 demostrar que el flujo es con potencial y determinar dicha función.

Solución. Como el cálculo de rot $\mathbf{v}$ indica que vale cero, el flujo es con potencial. De las Ecs. (10.10), al integrar, se obtiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3\,x; \qquad \phi = \frac{3}{2}\,x^2 + f(y) + C$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\,3\,y; \quad \phi = -\frac{3}{2}\,y^2 + f(x) + C$$

luego, la función potencial del flujo contra una placa plana es:

$$\phi = \frac{3}{2}\,(x^2 - y^2) + C$$

10.4 Métodos gráficos para una red de flujo bidimensional

En el caso bidimensional, el sistema triortogonal de superficies ψ = const, χ = const, ϕ = const, se convierte en una doble familia de curvas sobre el plano

$x - y$, que corresponde a las intersecciones de las superficies equipotenciales y de corriente con el mismo; además, tiene por ecuación: $\phi = H$, $\psi = F$, en la que H y F son constantes. Las superficies $\chi =$ const corresponden a todos los planos paralelos al coordenado $x - y$.

El sistema de curvas equipotenciales y de corriente son ortogonales entre sí y recibe el nombre de red de flujo (Fig. 10.6a).

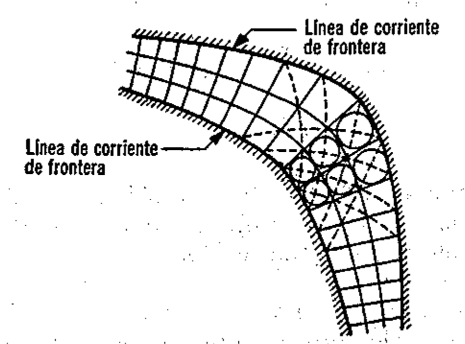


Figura 10.6a. Red de flujo entre dos paredes curvas.

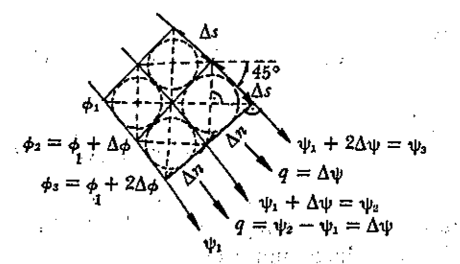


Figura 10.6b. Condiciones para la construcción de una red de flujo.

Además, de las Ecs. (3.18) y (10.7), se tiene que:

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \qquad (10.16a)$$

o bien:

$$\frac{d\phi}{d\psi} = \frac{ds}{dn} \qquad (10.16b)$$

Si se eligen incrementos iguales para ϕ y ψ, $d\phi = d\psi$, resulta $ds = dn$, es decir, que el incremento diferencial de arco —en la dirección de la línea de corriente— es igual al de la dirección de la equipotencial, como se muestra en la Fig. 10.6b en términos de incrementos finitos. Esto significa que las líneas equipotenciales y de corriente, además de ser ortogonales, forman una malla de cuadrados si se eligen incrementos iguales para las funciones ϕ y ψ. Además, de la Ec. (3.19), el gasto unitario entre dos líneas de corriente (Fig. 10.6b) es proporcional a la diferencia de los valores de ψ para estas dos líneas.

Sin ser necesario conocer los valores de ϕ y ψ en las fronteras, se puede trazar, mediante ajustes sucesivos hechos a mano, una red de flujo que se apoye en las líneas de corriente o equipotenciales de frontera de la región estudiada, respetando únicamente la ortogonalidad de las mismas; y también se pueden elegir incrementos pequeños para las funciones con objeto de obtener una malla de cuadrados. En la construcción gráfica se debe también satisfacer que las diagonales de dicha malla formen a su vez otra de idénticas propiedades que la primera, pero inclinada a 45°; y además que cada cuadrilátero elemental contenga un círculo inscrito en el mismo. Algunas veces las imperfecciones se notan mejor en la segunda malla que en la primera.

Respecto a las fronteras, conviene señalar que en ocasiones se presentan puntos singulares en los que la teoría del potencial ignora la posibilidad de separación, desobedeciéndose la condición de ortogonalidad del sistema de líneas equipotenciales y de corriente. Es el caso de las redes de flujo que presentan en sus fronteras quiebres bruscos —muchas veces a 90°— o bien aquellos puntos que simultáneamente pertenecen a una línea de

corriente y a una equipotencial; y además, por razón de la geometría de la frontera, las dos líneas no son ortogonales en dichos puntos. Cuando esto ocurre, son de esperarse imperfecciones en la vecindad de los puntos indicados, como en los casos que se muestran en la Fig. 10.7.

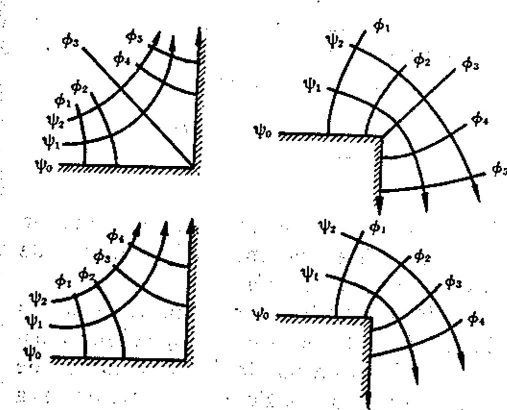


Figura 10.7. Aspecto de la red de flujo en la proximidad de un quiebre brusco de la frontera.

Conviene mencionar el dispositivo llamado *conformógrafo de Urquijo* que permite satisfacer las condiciones anteriores y puede ser un gran auxiliar en la construcción de la red de flujo. Consiste en una malla de alambres flexibles que atraviesan pequeños cilindros metálicos en los puntos de intersección. Los cilindros tienen perforaciones a diferentes elevaciones, con ángulos a 90° y 45° entre sí, que permiten el deslizamiento de los alambres, ubicándolos según los lados y las diagonales de la red.

La Fig. 10.8a muestra una red de flujo en una curva bidimensional trazada gráficamente. La distribución de velocidades se puede obtener sobre una de las líneas equipotenciales (por ejemplo la 0-4) si se recurre a la Ec. (10.16a), la cual se debe satisfacer, de modo aproximado, como sigue:

$$v \approx \frac{\Delta \psi}{\Delta n} \approx \frac{\Delta \phi}{\Delta s}$$

o bien:

$$\frac{v}{v_o} \approx \frac{\Delta s_o}{\Delta s} \approx \frac{\Delta n_o}{\Delta n}$$

Esto es, se puede usar el tamaño $\Delta s_o = \Delta n_o$ de la malla y la velocidad v_o en la zona de flujo uniforme, para determinar la velocidad en los puntos 0, 1, 2, 3, y 4. Con lo anterior se traza la distribución completa de velocidades (Fig. 10.8b). Además, recurriendo a la Ec. (10.4), se satisface en forma aproximada que $(v/r) \approx (\Delta v/\Delta n)$, donde se ha omitido el signo menos que resulta en la transposición. El término $\Delta v/\Delta n$ representa la pendiente de la tangente a la curva $v - n$, de modo que el radio de curvatura r —de las líneas de corriente— será tal, que la relación v/r iguale a la pendiente en cada punto. Los radios obtenidos de esta relación, al comprobarse por una medición directa en la red de flujo, permiten efectuar un control de las imperfecciones locales del trazo gráfico de la red.

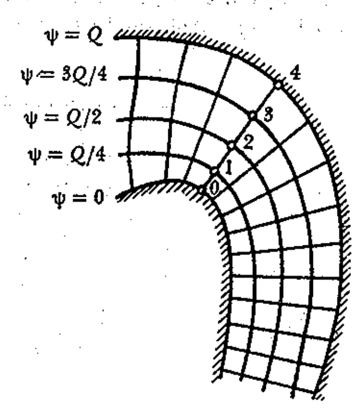


Figura 10.8a. Red de flujo en una curva bidimensional.

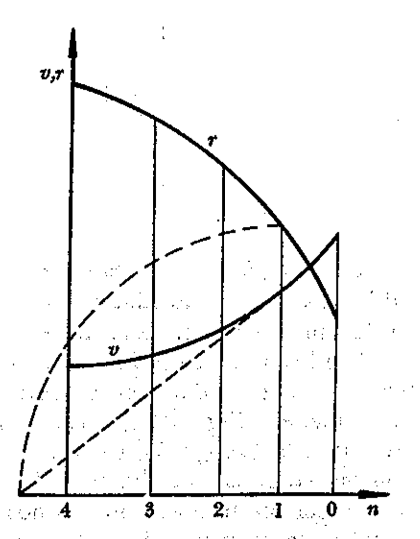


Figura 10.8b. Gráfica *v-n* y *r-n*.

Un segundo ejemplo de red de flujo se muestra en la Fig. 10.9a y corresponde a una contracción gradual bidimensional. En este caso, más que un método de control de su perfección, se presenta un criterio para predecir la posibilidad de separación de la corriente en las paredes.

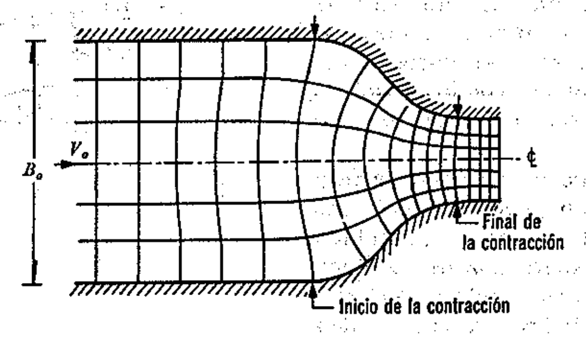
Con la Ec. (10.5) es posible determinar la distribución de velocidades para diferentes puntos sobre la pared, éstas se presentan en la Fig. 10.9b en términos de la relación v/v_o. Observamos que la influencia de la contracción se deja sentir antes de la misma, reduciendo la velocidad sobre la pared, para después mostrar un aumento brusco hasta llegar a un máximo de 3.35 V_o —un poco antes de terminar la contracción— y caer hasta 3 V_o poco después de la misma. En la Fig. 10.9*b* se muestra, con línea punteada, la distribución de velocidades que se obtiene a partir de la relación de áreas:

$$\frac{v}{V_o} = \frac{A_o}{A} = \frac{B_o}{B}$$

donde B es el ancho de la sección medida sobre una línea equipotencial, dentro de la zona de contracción.

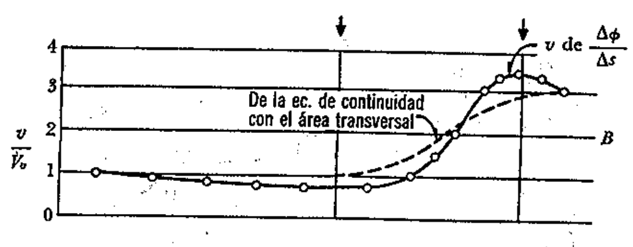
En la Fig. 10.9*c* se presenta la variación del coeficiente de presión C_p sobre la pared, calculado a partir de la variación de velocidades con la Ec. (10.6). Se observa que C_p acusa una caída hasta el valor negativo de -10.3 en la sección próxima al final de la contracción, en la que es de esperarse la posible separación del flujo.

Cuando se conoce una línea de corriente (por lo general de frontera) y el potencial ϕ_i en varios puntos M_i de la misma, se puede utilizar el método ideado por Prasil, para la construcción gráfica de la

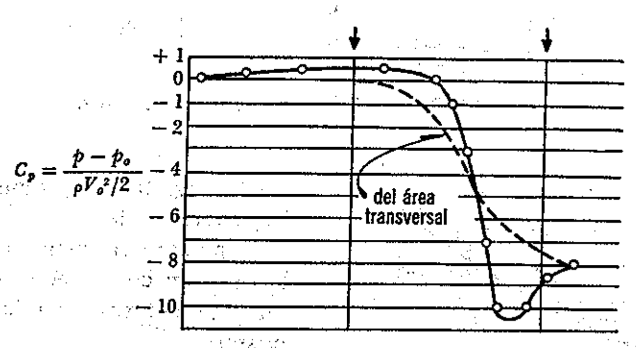


a) Red de flujo

Fig. 10.9a.



b) Variación de la velocidad sobre la pared



c) Variación de la presión sobre la pared

Figura 10.9. Red de flujo en una contracción gradual plana.

red de flujo. Tal es el caso de la red de la lámina vertiente sobre un cimacio (figura 10.10*a*) cuya frontera superior se conoce o se supone, para que después se rectifique, una vez que se determine la frontera inferior y se compare con el perfil del cimacio. A dicha línea de corriente se le asigna el valor arbitrario ψ_1.

La ecuación de Bernoulli (10.3) aplicada entre los puntos M_o y M_i conduce al siguiente resultado:

$$H - z_i = h_i = \frac{v_i^2}{2g}$$

en el que H representa la energía total medida desde un plano de referencia arbitrario.

Tomando en consideración la Ec. (10.7), se obtiene

$$v_i = \frac{d\phi}{ds} = \sqrt{2\,g\,h_i}$$

o sea, que la velocidad es proporcional a h_i y que su variación puede determinarse como se indica en la Fig. 10.10*b*. Después, el potencial se calcula sobre la superficie libre con una integración gráfica de la ecuación siguiente:

$$\phi = \int_0^s v_i\,ds = \int_0^s \sqrt{2\,g\,h_i}\,ds$$

El punto inicial para la integración coincide con M_o y la curva de ϕ se muestra

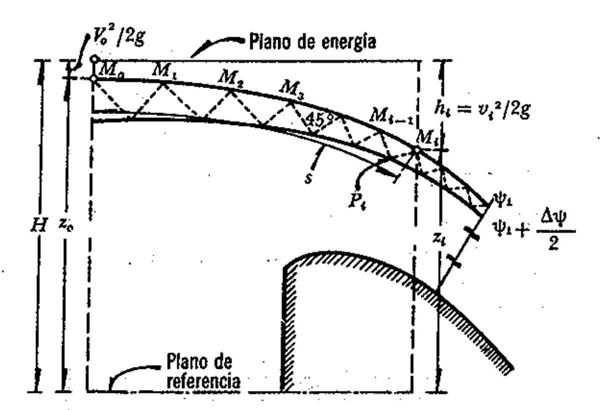


Figura 10.10a. Red de flujo sobre un cimacio.

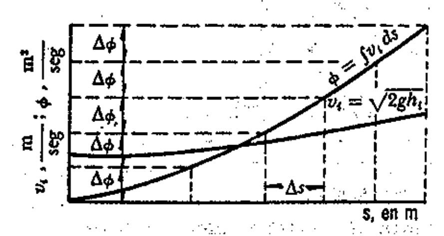


Figura 10.10b. Integración gráfica de la ecuación $\phi = \int v_i\, ds$.

en la Fig. 10.10*b*. Elegidos los incrementos iguales para $\Delta\phi$, con esta curva se obtienen los valores de s para los puntos $M_1, M_2, M_3, \ldots M_i$, cuyos valores del potencial difieren en $\Delta\phi$ constante.

Apoyadas en dos puntos, M_{i-1} y M_i, de la Fig. 10.10*a*, se trazan dos rectas que forman ángulos de 45°, respecto de la tangente a la superficie libre, los cuales se intersecan en el punto P_i que pertenece a la línea de corriente $\psi_i + \Delta\psi/2$. La reiteración del procedimiento, con los nuevos puntos encontrados, permite definir la totalidad de la red de flujo. La frontera inferior deberá coincidir con el perfil del cimacio, pero si acontece lo contrario deberá probarse con una nueva frontera superior y repetir todo el procedimiento.

En la Fig. 10.11 se muestra una red de flujo terminada.

La presión en cualquier punto se calcula también con la ecuación de Bernoulli, una vez determinada la velocidad en el mismo.

$$\frac{p}{\gamma} = h - \frac{v^2}{2g}$$

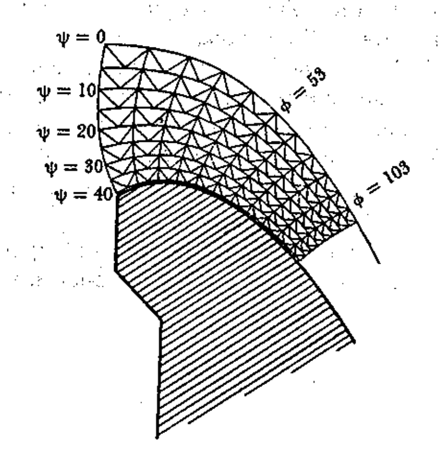


Figura 10.11. Red de flujo sobre un cimacio.

Problema 10.4 Un vertedor de cresta delgada se encuentra en un canal muy ancho. El nivel de la superficie del agua en el canal, a una distancia de 2.14 m —aguas arriba— del vertedor, se encuentra a 0.458 m por arriba de la cresta y el tirante en el canal a esta misma distancia es de 1.373 m (Fig. 10.12): *a)* dibujar la red de flujo irrotacional sobre el vertedor; *b)* si el gasto total es de 0.591 m³/seg por m de ancho de cresta, determinar el empuje total (también por metro de ancho de cresta) que se ejerce sobre la placa del vertedor, así como la distribución de presiones.

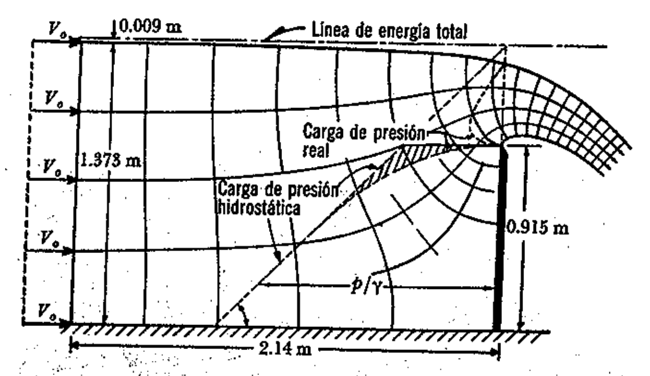


Figura 10.12. Red de flujo para el vertedor, del problema 10.4.

Solución a). Se ha dibujado la red de flujo (Fig. 10.12). Las superficies superior e inferior de la lámina vertiente se obtuvieron por un procedimiento de tanteos, siguiendo el método de Prasil.

Solución b). La fuerza de presión total se logró después de determinar la distribución de presiones que se muestra en la Fig. 10.12, a partir de la ecuación de Bernoulli. La energía total del flujo, a una distancia mayor de 2.14 m aguas arriba del vertedor, se calculó sumando el tirante en el canal y la carga de velocidad del flujo uniforme; esto es:

$$z + \frac{p}{\gamma} = 1.373 \text{ m}$$

$$V_o = \frac{Q}{A} = \frac{0.591}{1.373 \times 1} = 0.430 \text{ m/seg}$$

$$\frac{V_o^2}{2g} = \frac{(0.430)^2}{19.6} = 0.0095 \text{ m}$$

$$H = 1.373 + 0.0095 = 1.3825 \text{ m}$$

Con el plano de referencia al nivel del piso del canal, la carga de presión en cada punto sobre la placa vale:

$$\frac{p}{\gamma} = H - z - \frac{v^2}{2g}$$

resultando así la distribución de presiones que se muestra en la Fig. 10.12.

La fuerza de presión es igual al área encerrada por la curva de distribución de presiones, y vale 820 kg. por metro de ancho

Problema 10.5. La Fig. 10.13*a* muestra una presa derivadora, desplantada sobre material permeable isotrópico limitado en su profundidad por un manto impermeable. Determinar la red de flujo para calcular el gasto de infiltración y la distribu-

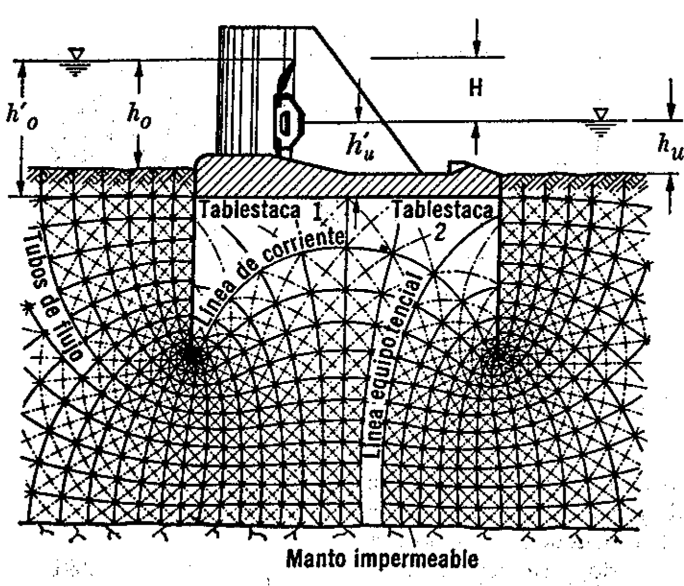


Figura 10.13a. Red de infiltración bajo una presa derivadora.

ción de presiones sobre la superficie de cimentación.

Solución. Debido al desnivel H entre el nivel —aguas arriba— y el nivel de desfogue de la presa, en la zona permeable se produce un flujo de infiltración del agua a través del suelo; y, por lo mismo, una red de flujo con las reglas indicadas en las secciones anteriores.

Las fronteras de esta red de flujo corresponden a dos líneas de corriente y dos equipotenciales. La línea de corriente superior coincide con la frontera de la presa (incluyendo los dos tablestacados) y la inferior con el manto impermeable. El piso de —aguas arriba— y el de —aguas abajo— de la presa son las dos líneas equipotenciales de frontera.

N_p representa el número de caídas de potencial $\Delta\phi$ en la red, esto es, existen $N_p + 1$ líneas equipotenciales. De acuerdo con la Ec. (10.1), $\phi = -kh$ representa el potencial; es decir, todos los puntos que hay sobre una misma línea equipotencial tienen el mismo valor de $h = z + p/\gamma$, para los cuales z representa el desnivel entre esos puntos y un plano de referencia arbitrario.

Cada caída de potencial será entonces:

$$\Delta\phi = \Delta h = \Delta\,(p/\gamma + z) = \frac{H}{N_p}$$

donde H es la diferencia de niveles de la superficie libre —aguas arriba— y —aguas abajo—. Esto significa que en dos puntos al mismo nivel, situados sobre dos equipotenciales vecinas, la diferencia de presiones vale:

$$\Delta p = \gamma\,\frac{H}{N_p}$$

En el caso de la Fig. 10.13a, $N_p = 42$, de este modo:

$$\Delta\phi = \frac{H}{42}$$

con lo cual se conoce la caída de presión, a lo largo de una línea de corriente cualquiera de la red de flujo, lo cual incluye a la línea superior de frontera entre la red y la presa. Con ello, es posible determinar la distribución de presiones hidrostáticas sobre la superficie de cimentación.

Según la Fig. 10.13a la superficie horizontal de cimentación se inicia desde el intervalo 20 hasta el 23. La diferencia de presiones, a lo largo de la plantilla horizontal, entre las dos tablestacas y para $N_p = 42$ intervalos, es $\frac{4}{42}\gamma H$. En el extremo —aguas arriba— de la superficie horizontal de cimentación (punto de intersección con la tablestaca 1) actúa la presión:

$$p_0 = \gamma\left(h'_0 - \frac{19}{42}H\right) = \gamma\left(h'_u + \frac{23}{42}h'_0\right)$$

y en el extremo —aguas abajo— la presión:

$$p_u = \gamma\left(h'_0 - \frac{23}{42}h'_0\right) = \gamma\left(h'_u + \frac{19}{42}H\right)$$

En la Fig. 10.13b se presenta la distribución de presiones sobre la superficie de cimentación de la obra, la que muestra aproximadamente una forma trapecial.

Con la red de flujo es posible calcular el gasto de infiltración por debajo de la presa.

Si $\Delta\phi = \Delta\psi$, el gasto que se infiltra a lo largo de cada tubo de flujo es (figura 10.6b):

$$\Delta q = v\,\Delta n$$

y en el total de tubos de flujo y por unidad de ancho es:

$$q = N_f\,\Delta q = N_f\,v\,\Delta n$$

donde N_f es el número de tubos de flujo. Por otra parte, de las Ecs. (10.1) y (10.16a) tenemos:

$$v = \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{k\,H}{N_p\,\Delta s}$$

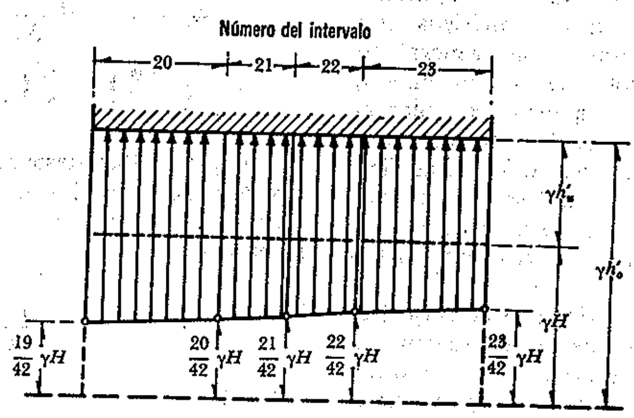


Figura 10.13b. Distribución de las subpresiones en la base de la presa derivadora de la Fig. 10.13.

donde N_p es el número de caídas de potencial y k el coeficiente de permeabilidad, por lo cual resulta:

$$q = \frac{N_f}{N_p} \frac{\Delta n}{\Delta s} k H$$

y por construcción gráfica $\Delta n = \Delta s$, entonces resulta, finalmente, que el gasto infiltrado por unidad de ancho vale:

$$q = k \frac{N_f}{N_p} H$$

Para este problema, con $k = 10^{-3}$ cm/seg, $N_f = 12$, $N_p = 42$ y $H = 3.5$ m, el gasto en m³/seg por cada metro de ancho es:

$$q = 10^{-5} \times \frac{12}{42} \times 3.5 =$$

$$= 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{seg/m} = 0.01\ \text{lt/seg/m}$$

10.5 Métodos numéricos de solución

10.5.1 La ecuación de Laplace en diferencias finitas

Con el advenimiento de las computadoras, los procedimientos numéricos son ahora de uso común y más general en la solución de problemas de ingeniería, y, quizás, a la vez los más accesibles al ingeniero. Se basan en la solución de la ecuación de Laplace por diferencias finitas. Para mayor facilidad se hará el desarrollo de la ecuación de Laplace para el flujo plano y se generalizará para el tridimensional.

Para este efecto, el campo de flujo (incluyendo sus fronteras), se cubre con una malla de cuadrados, orientada en la forma más conveniente y paralela a un sistema de ejes $x - y$ con cualquier origen. El tamaño de los cuadrados recibe el nombre de *intervalo* de la red y debe ser lo más pequeño posible a fin de asegurar mayor precisión.

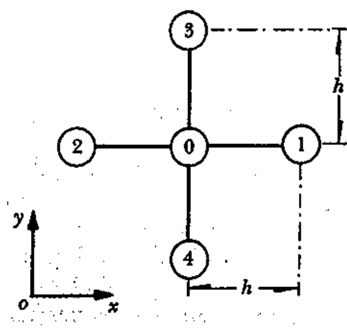


Figura 10.14. Estrella regular.

La Fig. 10.14 muestra una *estrella regular* correspondiente a un punto 0 cualquiera, de una red cuyo intervalo es h. La expansión en serie de Taylor de la función ϕ en los puntos 1 y 2, y en términos del valor de φ en el punto 0, es:

$$\phi_1 = \phi_0 + h\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_0 + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_0 \quad (10.17a)$$

$$\phi_2 = \phi_0 - h\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_0 + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_0 - \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_0 \quad (10.17b)$$

en los que se han despreciado los términos de orden superior al tercero.

Al restar la Ec. (10.17b) de la (10.17a), se obtiene:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_0 = \frac{\phi_1 - \phi_2}{2h} \quad (10.18)$$

La Ec. (10.18) permite calcular el valor de la primera derivada en el punto 0, en términos de los valores de la función en

los puntos 1 y 2 y del intervalo de la red. Si se suman las Ecs. (10.17a) y (10.17b), resulta:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{\phi_1 + \phi_2 - 2\phi_0}{h^2} \quad (10.19)$$

Un desarrollo análogo al anterior, pero ahora en la dirección y, conduce a resultados semejantes:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_0 = \frac{\phi_3 - \phi_4}{2h} \quad (10.20)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{\phi_3 + \phi_4 - 2\phi_0}{h^2} \quad (10.21)$$

Esto significa que para satisfacer la ecuación de Laplace en el punto 0 se debe cumplir la Ec. (10.9), es decir:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\phi_0 = 0 \quad (10.22a)$$

o bien:

$$\phi_0 = \tfrac{1}{4}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4) \quad (10.22b)$$

Es decir, que la función ϕ en el punto cero es la media aritmética de ϕ en los cuatro puntos adyacentes colocados sobre los brazos de la estrella. Una ecuación semejante a (10.22b) se presentará para ψ en el caso bidimensional; otros tipos de operadores más precisos pueden consultarse en la Ref. 56.

La generalización de la Ec. (10.22b) para un flujo tridimensional es muy simple; basta considerar que la estrella tiene dos brazos más, con el mismo intervalo, orientados según el eje z y que terminan en los puntos 5 y 6. La ecuación equivalente a (10.22b) es:

$$\phi_0 = \tfrac{1}{6}(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6) \quad (10.23)$$

si bien en este caso no existe expresión semejante para la función de corriente ψ, pues la ecuación de Laplace para esta función no se satisface.

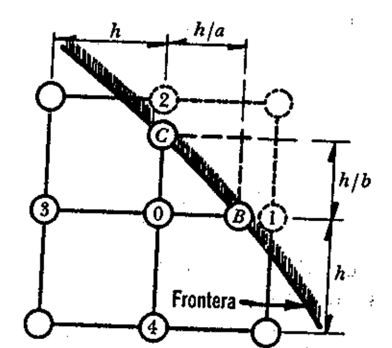


Figura 10.15. Estrella irregular para el primer problema de frontera.

Como generalmente las fronteras de un flujo con potencial son curvas y no es posible hacer que los nudos terminales de la malla coincidan con la frontera misma, las estrellas en la zona inmediata a ésta son irregulares o incompletas, como la de la Fig. 10.15. Los brazos incompletos tienen las dimensiones ahí indicadas y, en los puntos de intersección de la malla con la frontera, se conocen los valores ϕ_B y ϕ_C (problema de Dirichlet).

Por interpolación lineal, para los pun-

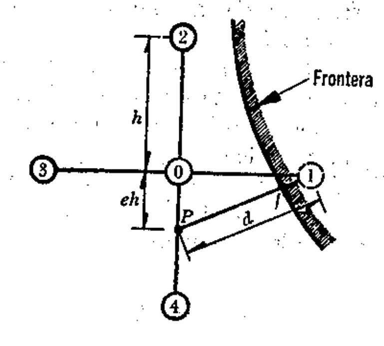


Figura 10.16. Estrella irregular para el segundo problema de frontera.

tos 1 y 2 se demuestra que las ecuaciones equivalentes a (10.22) son:

$$a\phi_B + b\phi_C + \phi_3 + \phi_4 - \phi_0(2+a+b) = 0 \quad (10.24a)$$

$$\phi_0 = \frac{1}{2+a+b}(a\phi_B + b\phi_C + \phi_3 + \phi_4) \quad (10.24b)$$

La Ec. (10.24b) es aplicable también en el caso de una estrella irregular de un brazo incompleto; para ello, basta hacer a o b igual a r. En el caso de tener que satisfacer la condición de gradiente normal nulo (problema de Neumann, Ec. (10.15a) $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ sobre la frontera (en que n es la coordenada normal a la misma), se pueden desarrollar fórmulas semejantes aceptando variación lineal de la función entre dos puntos próximos y una expresión semejante a la Ec. (10.18) o a la (10.20), esto es:

$$\phi_e - \phi_i \approx \left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_f d = 0$$

en la que los subíndices e e i indican puntos de la malla exterior e interior a la frontera, respectivamente, separados la distancia d en dirección normal a la misma y el punto f sobre la intersección con la frontera de la cuerda que une a los puntos e e i.

Un caso de condición de gradiente normal nulo se presenta en la Fig. 10.16. Dibujada la normal a la frontera que contiene al punto ficticio 1, que completa a la estrella, dicha normal interseca a la frontera en f y a la cuerda 0 — 4, de la estrella en P, pudiéndose escribir:

$$\phi_1 = \phi_P + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_f d$$

donde d es la distancia de 1 a P. Siendo

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_f = 0, \ \phi_1 = \phi_P$$

y supuesta una variación lineal de ϕ del punto 2 al 4, resulta:

$$\phi_1 = \phi_0 + e\,(\phi_4 - \phi_0)$$

donde $e\,h$ es la distancia de 0 a P. De esta manera, el valor de la función en el punto 1 queda especificada en términos de los valores en los puntos 0 y 4; en las Ecs. (10.22) se elimina la intervención del punto ficticio 1 fuera de la región, de donde resulta:

$$\phi_2 + \phi_3 + (1+e)\,\phi_4 - (3+e)\,\phi_0 = 0 \quad (10.25a)$$

$$\phi_0 = \frac{1}{3+e}\,[\phi_2 + \phi_3 + (1+e)\,\phi_4] \quad (10.25b)$$

Si la frontera coincide con los puntos 0, 2, 4 de la Fig. 10.16, según el resultado anterior $\phi_1 = \phi_3$, siendo la Ec. (10.22b), como sigue:

$$\phi_0 = \phi_f = \tfrac{1}{4}\,(\phi_2 + 2\,\phi_3 + \phi_4) \quad (10.26)$$

Este mismo resultado se satisface cuando los puntos 0, 2 y 4 están sobre un eje de simetría del flujo que se analiza.

10.5.2 Método de relajaciones

Dentro de los procesos iterativos de solución numérica, uno de los más importantes es el de relajaciones. Su técnica básica consiste en asignar valores iniciales, de la función armónica, en los diferentes nudos de una malla trazada dentro del campo de integración. Dichos valores, substituidos en las ecuaciones de diferencias finitas para cada punto, deben dar residuos cero en el caso que los valores iniciales sean los correctos. Por relajación

se entiende la técnica que consiste en *liquidar* dichos residuos, es decir, reducirlos a cero.

A fin de entender mejor esos conceptos, se empleará la estrella regular de la figura 10.14, para la cual se han elegido valores iniciales de la función en el punto 0 y en los cuatro restantes, que son respectivamente, ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4. Los valores deben satisfacer la Ec. (10.22a) en caso de ser los correctos; de no ser así, arrojarán un residuo para el punto central, de valor:

$$R_0 = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\,\phi_0 \quad (10.27)$$

que debe ser relajado mediante el cálculo de su efecto en los otros cuatro puntos. Esto es, si se efectúa un incremento $\Delta\phi_0$ en ϕ_0, el nuevo residuo es:

$$R_0 + \Delta R_0 = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 - 4\,(\phi_0 + \Delta\phi_0);$$

el incremento en el residuo, respecto del original, es:

$$\Delta R_0 = -\,4\,\Delta\phi_0$$

Como puede verse, el cambio en el residuo es menos cuatro veces el cambio impuesto en la función misma, por lo que, para *liquidar* el residuo original, la función se debe incrementar en:

$$\Delta\phi_0 = \tfrac{1}{4}\,R_0 \quad (10.28a)$$

Dicho incremento en la función ϕ_0 impone cambios en los residuos de los cuatro puntos adyacentes de la malla, de valor:

$$\Delta R_1 = \Delta R_2 = \Delta R_3 = \Delta R_4 = \Delta\phi_0 \quad (10.28b)$$

toda vez que al aplicar el operador simple al punto 1, el valor de la función en 0 aparece multiplicado por 1 y, por lo mismo, también su incremento. Esto es, si el valor de la función —en un punto— se relaja una cantidad igual a 1, su residuo cambia en —4 y el de los cuatro puntos adyacentes en —1 (Fig. 10.17).

Por un razonamiento análogo se obtienen los esquemas de relajación para una estrella irregular, como la de la Fig. 10.15

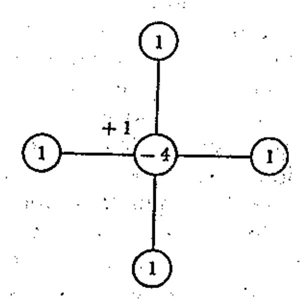


Figura 10.17. Esquema de relajación para una estrella regular.

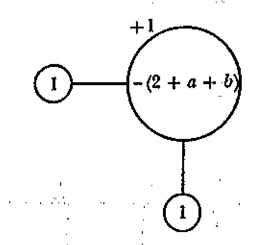


Figura 10.18. Esquema de relajación para una estrella irregular.

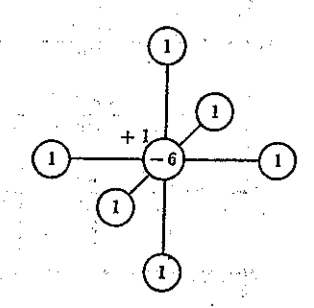


Figura 10.19. Esquema de relajación para una estrella regular, en el espacio tridimensional.

o para el caso de flujo tridimensional (Figs. 10.18 y 10.19).

Resulta conveniente que la relajación se haga con el residuo de mayor valor absoluto. El valor final de la función —en cada punto— será la suma algebraica del valor inicial más todos los incrementos efectuados en la misma. De acuerdo con el grado de precisión deseado, los valores finales de la función deben arrojar residuos de valor aproximado, cero. Si se sospecha la existencia de cierto error en alguna de las etapas de relajación, éste no debe corregirse sino simplemente iniciar otro proceso con los nuevos valores iniciales de que se disponga. Una elección adecuada de éstos puede reducir considerablemente el número de etapas de la relajación, contando para ello con el auxilio de una construcción gráfica aproximada de la red de flujo.

Problema 10.6. Determinar la red de flujo de la contracción bidimensional mostrada en la figura 10.20, utilizando el método de relajaciones. El gasto es de 60 lt/seg por cada metro de ancho.

Solución. La frontera inferior corresponde a la línea de corriente $\psi = 0$ y la superior a la línea de corriente $\psi = 60$. La frontera que coincide con el eje y y la opuesta, son líneas equipotenciales donde se supone que las perturbaciones ocasionadas por la contracción ya no tienen influencia, por lo que el flujo es uniforme (v constante en cada punto). Los valores de ψ se reparten en forma lineal, variando de 0 a 60, como se indica en la figura. Se ha trazado una malla de cuadrados, orientada según las fronteras y el sistema $x - y$. Con líneas de puntos se ha elaborado un sistema de líneas de flujo aproximadas, hecho a mano, con objeto de interpolar los valores iniciales de la

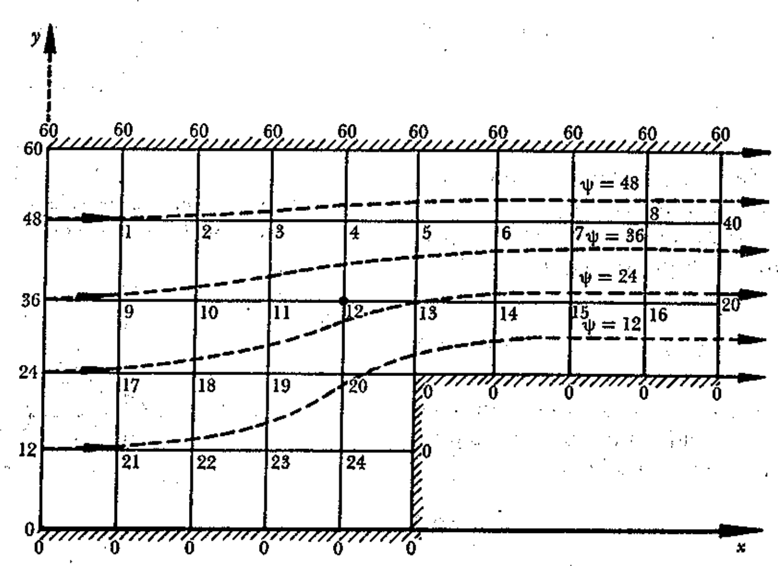


Figura 10.20. Condiciones de frontera y trazo aproximado de las líneas de corriente en una contracción bidimensional.

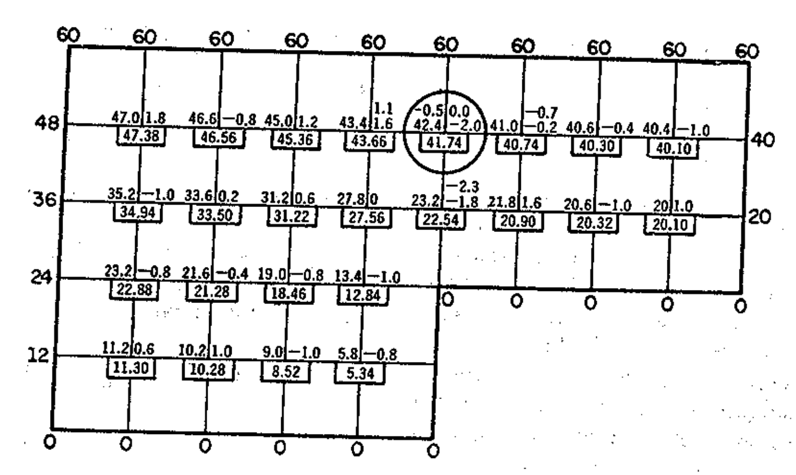


Figura 10.21. Valores iniciales, sus residuos y valores finales de ψ para el problema 10.6

función ψ, que en este caso es más conveniente de integrar.

En la Fig. 10.21 se presentan, en el ángulo correspondiente al segundo cuadrante de cada punto, los valores iniciales interpolados de acuerdo con el trazo aproximado de la Fig. 10.20; en el primer cuadrante se muestran los residuos calculados, según la Ec. (10.27). Por último, debajo de cada nudo de la malla, y encerrados en un rectángulo, aparecen los valores finales terminados, de acuerdo con la precisión deseada; en este caso, hasta la segunda cifra decimal.

Con objeto de aclarar el procedimiento, en la Fig. 10.21 se indica —con un círculo— el punto en el que resultó el residuo de máximo valor absoluto, el cual fue de −2 y que se obtuvo de la siguiente manera:

$$R = 41.0 + 60 + 43.4 +$$
$$+ 23.2 - 4\,(42.4) = -2.0$$

Siguiendo el procedimiento, según la Ec. (10.28a) el incremento de la función es:

$$\Delta\psi = \frac{-2.0}{4} = -0.50$$

Dicho incremento se anota arriba del valor inicial de ψ y el residuo liquidado se tacha, el cual, de acuerdo con la ecuación (10.28b), establece cambios en los residuos de los puntos adyacentes; éstos son idénticos al mismo incremento que, sumados algebraicamente con los residuos propios del punto, resultan los que se anotan en la misma figura. Para ello, se exceptúa el punto sobre la frontera, en el cual el valor de ψ es constante. El proceso se reitera con el punto de máximo residuo (en este caso el inmediato inferior al antes analizado).

A lo anterior se pueden agregar técnicas que aceleren la convergencia, como la relajación incrementada y la relajación en bloque (Ref. 57).

Con los valores finales de ψ en cada punto, es posible determinar los de ϕ haciendo uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann (10.10), las que, desarrolladas por incrementos finitos para una estrella regular como en la Fig. 10.14, resultan:

$$\phi_1 - \phi_2 = \psi_3 - \psi_4$$

$$\phi_3 - \phi_4 = \psi_2 - \psi_1$$

aun cuando en este caso la precisión es menor, debido a que es menos aproximado el desarrollo por incrementos finitos, para la primera derivada que para la segunda. Para efectuar el cálculo se asigna, a todos los puntos de la equipotencial que coincide con el eje y, el mismo valor (cualquiera que se elija), a partir del cual se obtienen los restantes con ayuda de las ecuaciones anteriores.

Para dibujar las líneas de corriente y equipotenciales definitivas, se realiza una interpolación con los valores finales de ϕ y ψ y después se unen los puntos de ψ = = cte y ϕ = cte, conservando la condición $\Delta\psi = \Delta\phi$.

Conviene señalar que el método se aplica en igual forma a estrellas irregulares que a flujos tridimensionales, respetando únicamente los esquemas de relajación respectivos.

10.5.3 Método matricial

Los operadores, expresados por la ecuación (10.22a), para estrellas regulares, así como los de las Ecs. (10.24a) o (10.25a) para estrellas irregulares de frontera se pueden aplicar a cada uno de los puntos de la malla trazada dentro del campo de flujo para generar un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, donde n es el número de puntos interiores de la malla en que se desconoce el valor del potencial ϕ.

El sistema de n ecuaciones con n incógnitas, que son los valores de ϕ en los puntos interiores, es de la forma general:

$$a_{11}\phi_1 + a_{12}\phi_2 + a_{13}\phi_3 + \dots + a_{1n}\phi_n = c_1$$

$$a_{21}\phi_1 + a_{22}\phi_2 + a_{23}\phi_3 + \dots + a_{2n}\phi_n = c_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}\phi_1 + a_{n2}\phi_2 + a_{n3}\phi_3 + \dots + a_{nn}\phi_n = c_n$$

donde a_{ij} son los coeficientes conocidos y x_i las incógnitas. Este sistema, escrito en forma matricial, es:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \tag{10.29}$$

La solución del sistema de ecuaciones se puede efectuar siguiendo métodos matriciales o por medio de un programa de biblioteca de cualquier computadora digital. Sin embargo, tiene la desventaja del planteo previo del sistema de ecuaciones, en el cual es posible cometer errores. Esto se puede resolver mediante un programa general para que la propia computadora genere el sistema, alimentando la máquina únicamente con los datos de la geometría de las fronteras del flujo.

De acuerdo con los puntos de la malla trazada en la Fig. 10.20, la aplicación del operador expresado por la Ec. (10.22a) (en este caso para ψ) a los puntos 1 y 2 conduce a las ecuaciones respectivas siguientes:

$$\psi_2 + 60 + 48 + \psi_9 - 4\psi_1 = 0;$$

$$-4\psi_1 + \psi_2 + \psi_9 = -108;$$

$$\psi_3 + 60 + \psi_1 + \psi_{10} - 4\psi_2 = 0;$$

$$\psi_1 - 4\psi_2 + \psi_3 + \psi_{10} = -60.$$

La aplicación reiterada del mismo operador, a todos los puntos de la malla, conduce al sistema de ecuaciones de la tabla 10.1.

TABLA 10.1. Sistema de ecuaciones para la función de corriente, del problema 10.6

ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}	ψ_{16}	ψ_{17}	ψ_{18}	ψ_{19}	ψ_{20}	ψ_{21}	ψ_{22}	ψ_{23}	ψ_{24}	*Término independiente C.*
−4	+1							+1																= −108
+1	−4	+1							+1															= − 60
	+1	−4	+1							+1														= − 60
		+1	−4	+1							+1													= − 60
			+1	−4	+1							+1												= − 60
				+1	−4	+1							+1											= − 60
					+1	−4	+1							+1										= − 60
						+1	−4								+1									= −100
+1								−4	+1							+1								= − 36
	+1							+1	−4	+1							+1							= 0
		+1							+1	−4	+1							+1						= 0
			+1							+1	−4	+1							+1					= 0
				+1							+1	−4	+1											= 0
					+1							+1	−4	+1										= 0
						+1							+1	−4	+1									= 0
							+1							+1	−4									= − 20
								+1								−4	+1			+1				= − 24
									+1							+1	−4	+1			+1			= 0
										+1							+1	−4	+1			+1		= 0
											+1							+1	−4				+1	= 0
																+1				−4	+1			= − 12
																	+1			+1	−4	+1		= 0
																		+1			+1	−4	+1	= 0
																			+1			+1	−4	= 0

10.5.4 Método del elemento finito

En la descripción de los métodos anteriores se ha indicado una serie de limitaciones que restringen su empleo o que hacen perder precisión en los resultados finales. En efecto, utilizar mallas de figuras regulares (en este caso cuadrados) dentro del campo de flujo, implica la necesidad de estrellas irregulares en la zona vecina a las fronteras, perdiendo precisión y aumentando la complejidad del cálculo.

Recientemente, Claugh, Zienkiewics y otros autores (Ref. 58) han elaborado una técnica de solución de ecuaciones diferenciales parciales, con una concepción diferente. Consiste en emplear —dentro del campo de flujo— una malla de triángulos de forma y dimensiones que puedan variar dentro de la región, permitiendo que los vértices de los triángulos vecinos a las fronteras coincidan con éstas, eliminando así las complicaciones de las estrellas irregulares. Para conseguirlo resulta necesario resolver un sistema grande de ecuaciones lineales no homogéneas, lo cual es posible únicamente con la ayuda de computadoras. La síntesis del método que presentamos corresponde a la Ref. 59.

Igual que en los anteriores procesos, el problema consiste en determinar los valores de la función ϕ o ψ en cada punto dentro del flujo, de suerte que satisfaga la ecuación de Laplace.

Dentro del cálculo de variaciones existe el llamado problema de Dirichlet mediante el cual se demuestra que la solución de la Ec. (10.9), dentro del área que ocupa en el campo de flujo, equivale matemáticamente a encontrar el mínimo de la función:

$$D(\phi) = \iint\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy \qquad (10.30)$$

Para resolver el problema se traza sobre la región R del flujo una malla de triángulos de forma y dimensiones cualesquiera (de preferencia isósceles o equiláteros), que divida a la región en áreas triangulares pequeñas o elementos finitos (figura 10.22).

Como hipótesis, se considera que ϕ se determina en los vértices de los triángulos y es función lineal de las coordenadas de los propios vértices. Esto es:

$$\phi = A + B\,x + C\,y \qquad (10.31)$$

donde A, B y C son coeficientes constantes por determinar.

La aplicación de la Ec. (10.31) a los vértices i, j, k, del triángulo de la figura 10.22, conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$A + B\,x_i + C\,y_i = \phi_i \qquad (10.32a)$$

$$A + B\,x_j + C\,y_j = \phi_j \qquad (1.032b)$$

$$A + B\,x_k + C\,y_k = \phi_k \qquad (1.032c)$$

donde se considera —por el momento— que las incógnitas son A, B y C.

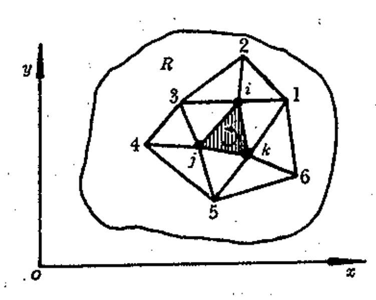


Figura 10.22. Elementos finitos dentro de la región R.

El determinante de este sistema de ecuaciones es:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

el cual tiene por valor el doble del área del triángulo de vértice i, j y k, como fácilmente puede comprobarse, es decir:

$$\Delta_s = 2\,A_\Delta$$

Siguiendo la regla de Cramer, las incógnitas del sistema de Ecs. (10.32) valen:

$$A = \frac{1}{2\,A_\Delta}\begin{vmatrix} \phi_i & x_i & y_i \\ \phi_j & x_j & y_j \\ \phi_k & x_k & y_k \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\,A_\Delta}[\phi_i(x_j\,y_k - x_k\,y_j) +$$

$$+ \phi_j(x_k\,y_i - x_i\,y_k) +$$

$$+ \phi_k(x_i\,y_j - x_j\,y_i)] \qquad (10.33a)$$

$$B = \frac{1}{2\,A_\Delta}\begin{vmatrix} 1 & \phi_i & y_i \\ 1 & \phi_j & y_j \\ 1 & \phi_k & y_k \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\,A_\Delta}[\phi_i(y_j - y_k) + \phi_j(y_k - y_i) +$$

$$+ \phi_k(y_i - y_j)] \qquad (10.33b)$$

$$C = \frac{1}{2\,A_\Delta}\begin{vmatrix} 1 & x_i & \phi_i \\ 1 & x_j & \phi_j \\ 1 & x_k & \phi_k \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\,A_\Delta}[\phi_i(x_k - x_j) + \phi_j(x_i - x_k) +$$

$$+ \phi_k(x_j - x_i)] \qquad (10.33c)$$

Por otra parte, la derivada parcial de la Ec. (10.30) respecto (por ejemplo) de ϕ_i, con $\dfrac{\partial\phi}{\partial x} = B$, $\dfrac{\partial\phi}{\partial y} = C$, de la Ec. (10.31), resulta ser:

$$\frac{\partial D}{\partial\phi_i} = \iint 2\left(B\frac{\partial B}{\partial\phi_i} + C\frac{\partial C}{\partial\phi_i}\right)dx\,dy$$

Observe que el término entre paréntesis se puede considerar constante para cualquier valor de x y y; además que al efectuar la doble integración resulta:

$$\frac{\partial D}{\partial\phi_i} = \left[B\frac{\partial B}{\partial\phi_i} + C\frac{\partial C}{\partial\phi_i}\right]2\,A_\Delta$$

En la anterior pueden utilizarse los resultados obtenidos en las Ecs. (10.33b) y (10.33c), con lo cual se tiene que:

$$\frac{\partial D}{\partial\phi_i} = \frac{1}{2\,A_\Delta}\{[(y_j - y_k)^2 + (x_k - x_j)^2]\phi_i +$$

$$+ [(y_j - y_k)(y_k - y_i) +$$

$$+ (x_k - x_j)(x_i - x_k)]\,\phi_j +$$

$$+ [(y_j - y_k)(y_i - y_j) +$$

$$+ (x_k - x_j)(x_j - x_i)]\phi_k\} \qquad (10.34)$$

La Ec. (10.34) se puede escribir —simbólicamente— en la forma siguiente:

$$\frac{\partial D}{\partial\phi_i} = \frac{1}{2\,A_\Delta}\{[a_{jk} \times b_{jk}]\phi_i +$$

$$+ [a_{jk} \times b_{ki}]\,\phi_j +$$

$$+ [a_{jk} \times b_{ij}]\,\phi_k\} \qquad (10.35)$$

donde:

$$a_{jk} = |(y_j - y_k), (x_k - x_j)| \qquad (10.36)$$

$$b_{jk} = \left|\begin{matrix}(y_j - y_k) \\ (x_k - x_j)\end{matrix}\right| \qquad (10.37a)$$

$$b_{ki} = \left|\begin{matrix}(y_k - y_i) \\ (x_i - x_k)\end{matrix}\right| \qquad (10.37b)$$

$$b_{ij} = \left|\begin{matrix}(y_i - y_j) \\ (x_j - x_i)\end{matrix}\right| \qquad (10.37c)$$

El mínimo de la función D (Ec. 10.30) en el punto i de la región R (punto 0 de la Fig 10.23) se obtendrá cuando valga cero la suma de las derivadas $\partial D/\partial\phi_i$ (obtenidas de la Ec. 10.35) para todos los triángulos que tienen un vértice común en dicho punto. Esto es, se debe satisfacer que:

$$\sum_1^n \frac{\partial D}{\partial\phi_i} = 0 \qquad (10.38)$$

donde n es el número de triángulos que rodean al punto $i = 0$.

Para satisfacer la Ec. (10.38) se debe calcular $\partial D/\partial\phi_i$ en cada uno de los n triángulos, por la aplicación reiterada de

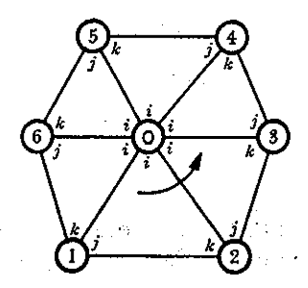


Figura 10.23. Elementos finitos en torno del punto cero.

la Ec. (10.35) (eligiendo en todos los triángulos $i = 0$, j y k el que le corresponda conforme el triángulo en discusión y siguiendo un orden prestablecido como se indica en la Fig. 10.23) para después efectuar la suma e igualarla con cero.

Con el procedimiento descrito, al agrupar términos se obtiene la ecuación:

$$\begin{aligned}&\{[a_{12} \times b_{12}] + [a_{23} \times b_{23}] + \\ &+ [a_{34} \times b_{34}] + [a_{45} \times b_{45}] + \\ &+ [a_{56} \times b_{56}] + [a_{61} \times b_{61}]\}\phi_0 + \\ &+ \{[a_{12} \times b_{20}] + [a_{61} \times b_{06}]\}\phi_1 + \\ &+ \{[a_{12} \times b_{01}] + [a_{23} \times b_{30}]\}\phi_2 + \\ &+ \{[a_{23} \times b_{02}] + [a_{34} \times b_{40}]\}\phi_3 + \\ &+ \{[a_{34} \times b_{03}] + [a_{45} \times b_{50}]\}\phi_4 + \\ &+ \{[a_{45} \times b_{04}] + [a_{56} \times b_{60}]\}\phi_5 + \\ &+ \{[a_{56} \times b_{05}] + [a_{61} \times b_{10}]\}\phi_6 = 0\end{aligned} \quad (10.39a)$$

que ya simplificada se escribe:

$$\begin{aligned}&c_0 \phi_0 + c_1 \phi_1 + \\ &+ c_2 \phi_2 + c_3 \phi_3 + \\ &+ c_4 \phi_4 + c_5 \phi_5 + c_6 \phi_6 = 0\end{aligned} \quad (10.39b)$$

donde los coeficientes c_p dependen exclusivamente de las coordenadas de los vértices de los triángulos, en el punto 0 y en torno a dicho punto, y ϕ_p es el valor del potencial en dichos vértices.

Si se repite el procedimiento para la totalidad de puntos que coinciden con los vértices de la malla de triángulos, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales —no homogéneas— de la forma general expresada por la Ec. (10.29), cuyas incógnitas son $\phi_1, \phi_2 \ldots \phi_n$, permitiendo con su solución determinar a ϕ en toda la región.

Se observa que con esta técnica, la formulación de los valores de los coeficientes c_{ij} es aparentemente muy difícil de seguir, en comparación con la de los correspondientes a la solución de Laplace por incrementos finitos. Sin embargo, la sistematización en el momento de hacer los cálculos, o bien con la computadora, resuelve muchos de los inconvenientes del método por incrementos finitos. Es evidente que los desarrollos anteriores son válidos, si se desea integrar ψ, en el caso de un flujo bidimensional.

Problema 10.7. Determinar la red de infiltración por debajo de la estructura derivadora que se muestra en la Fig. 10.24, mediante el método del elemento finito.

Solución. En la Fig. 10.24 se ha trazado una malla de triángulos para resolver el problema. De acuerdo con la frontera resulta más conveniente integrar a ψ, y en la frontera *A-B* se distribuye con uniformidad de cero a 100. Sobre la frontera *A-F-G* todos los puntos tienen valor 100 y sobre *B-C-D-E*, cero.

Debido a que existe un eje de simetría se puede trabajar sólo con la mitad del espacio. La base de la cimentación de la estructura y el manto impermeable son líneas de corriente a las cuales se les asig-

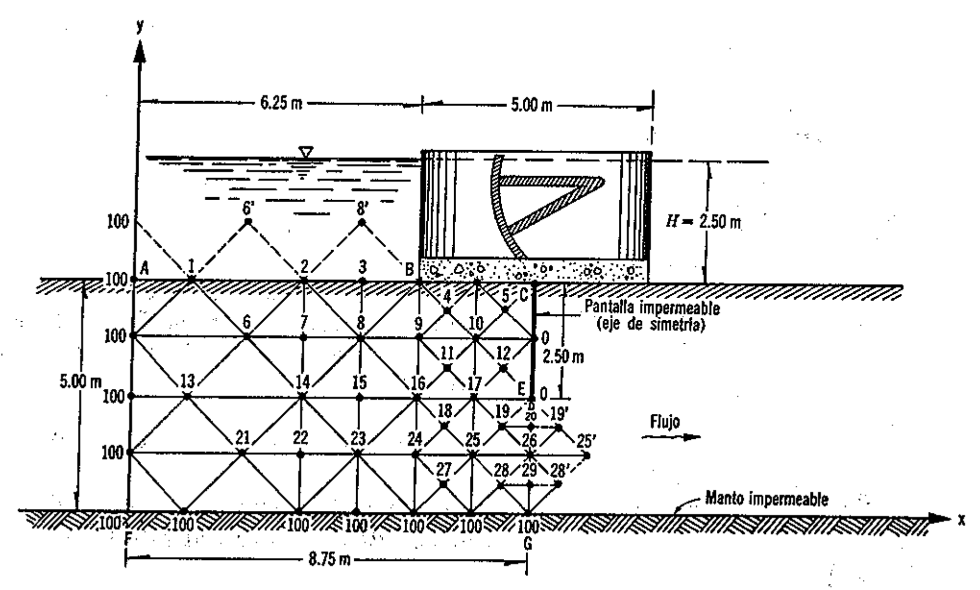


Figura 10.24. Problema 10.7

na los valores arbitrarios $\psi = 0$ y $\psi = 100$. Como las líneas *A-B* y *C-D* se eligen como equipotenciales, de las Ecs. (10.15a) y (10.18) se tiene que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0 = \psi_{8'} - \psi_8 = \psi_{6'} - \psi_6$$

Luego entonces $\psi_8 = \psi_{8'}$ y $\psi_6 = \psi_{6'}$, lo cual equivale a que en los puntos 8′ y 6′, ψ tenga el mismo valor que en los 8 y 6, respectivamente. Lo mismo puede decirse para los puntos próximos al eje de simetría.

Finalmente, la frontera de la izquierda quedaría teóricamente en el infinito; sin embargo, aquí se ha limitado de modo arbitrario a una distancia suficientemente alejada del dentellón para que pueda ser considerada la línea de corriente 100. Los vértices de los triángulos representan los puntos donde se va a calcular el valor de ψ, y aparecen en la Fig. 10.24 numerados en forma progresiva del 1 al 29. En la misma figura se indica la orientación del sistema $x-y$ elegido, según el cual la diferencia entre las abscisas de los puntos es de $\Delta x = 0.625$ m, 1.25 m o 2.50 m. Una situación idéntica existe para las ordenadas.

Para la malla propuesta la solución numérica requiere resolver varias estrellas tipo, las cuales se repiten sucesivamente; por ejemplo, las que se muestran en las Figs. 10.25 y 10.26.

La ecuación general (10.39) vale para la estrella de la Fig. 10.25, donde las matrices indicadas son:

$$a_{12} = [0 \;\; \Delta x]$$

$$b_{12} = b_{03} = b_{60} = \begin{bmatrix}\Delta x \\ 0\end{bmatrix}$$

$$a_{23} = [-\Delta x/2 \;\; \Delta x/2]$$

$$b_{23} = b_{04} = b_{10} = \begin{bmatrix}-\Delta x/2 \\ \Delta x/2\end{bmatrix}$$

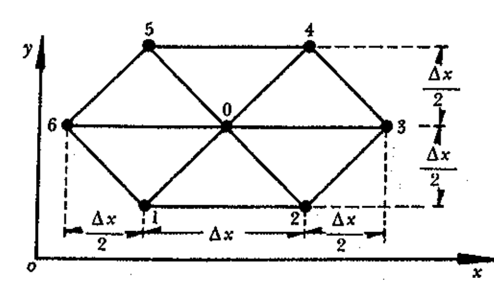


Figura 10.25. Estrella tipo de la malla de la figura 10.24.

$$a_{34} = \begin{bmatrix} -\Delta x/2 & -\Delta x/2 \end{bmatrix}$$

$$b_{34} = b_{05} = b_{20} = \begin{bmatrix} -\Delta x/2 \\ -\Delta x/2 \end{bmatrix}$$

$$a_{45} = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta x \end{bmatrix}$$

$$b_{45} = b_{06} = b_{30} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Delta x \end{bmatrix}$$

$$a_{56} = \begin{bmatrix} \Delta x/2 & -\Delta x/2 \end{bmatrix}$$

$$b_{56} = b_{01} = b_{40} = \begin{bmatrix} \Delta x/2 \\ -\Delta x/2 \end{bmatrix}$$

$$a_{61} = \begin{bmatrix} \Delta x/2 & \Delta x/2 \end{bmatrix}$$

$$b_{61} = b_{02} = b_{50} = \begin{bmatrix} \Delta x/2 \\ \Delta x/2 \end{bmatrix}$$

Los diferentes productos de las matrices en la Ec. (10.39a) son los siguientes:

$$a_{12} \times b_{12} = a_{45} \times b_{45} = (\Delta x)^2$$

$$a_{23} \times b_{23} = a_{34} \times b_{34} = a_{56} \times b_{56} = = a_{61} \times b_{61} = \frac{(\Delta x)^2}{2}$$

$$a_{12} \times b_{20} = a_{61} \times b_{06} = a_{12} \times b_{01} = = a_{23} \times b_{30} = a_{34} \times b_{03} =$$

$$= a_{45} \times b_{50} = a_{45} \times b_{04} = = a_{56} \times b_{60} = -\frac{(\Delta x)^2}{2}$$

$$a_{23} \times b_{02} = a_{34} \times b_{40} = a_{56} \times b_{05} = = a_{61} \times b_{10} = 0$$

Al efectuar las substituciones de los resultados anteriores en la Ec. (10.39a), para la estrella analizada resulta la ecuación:

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_4 + \psi_5 - 4\,\psi_0 = 0$$

En la misma forma, para la estrella de la Fig. 10.26 la ecuación resulta ser:

$$\psi_1 + 2\,\psi_2 + 2\,\psi_4 + \psi_5 + \psi_6 - 7\,\psi_0 = 0$$

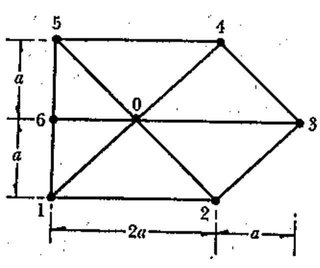


Figura 10.26. Estrella tipo, de malla, similar a la de la Fig. 10.24.

El resto de las estrellas tipo se pueden resolver con la misma técnica aplicada en los casos anteriores; los resultados se muestran en la tabla 10.2. Con dichos resultados se estableció el sistema de ecuaciones de la tabla 10.3 (una para cada punto). La última columna presenta los valores de las incógnitas, resultados de la solución con el empleo de una computadora digital.

TABLA 10.2. Estrellas tipo y ecuación correspondiente, para el problema 10.7

ESTRELLAS	ECUACION
	$\psi_1 + 2\psi_2 + 2\psi_4 + \psi_5 + \psi_6 - 7\psi_0 = 0$
	$\psi_1 + \psi_2 + \psi_4 + \psi_5 + 2\psi_6 - 6\psi_0 = 0$
	$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0 = 0$
	$\psi_1 + \psi_2 + \psi_4 + \psi_6 + \psi_7 - 5\psi_0 = 0$
	$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_5 + \psi_6 + \psi_7 - 6\psi_0 = 0$
	$\psi_1 + \psi_2 + \psi_4 + \psi_5 - 4\psi_0 = 0$
	$2\psi_2 + 2\psi_3 + 2\psi_4 + \psi_1 + \psi_5 + 3\psi_6 - 11\psi_0 = 0$
	$\psi_1 + \psi_2 + \psi_7 + 2\psi_3 + 2\psi_4 + 2\psi_5 + 2\psi_6 - 11\psi_0 = 0$

TABLA 10.3. Sistema de ecuaciones para ψ del problema 10.7

ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}	ψ_{11}	ψ_{12}	ψ_{13}	ψ_{14}	ψ_{15}	ψ_{16}	ψ_{17}	ψ_{18}	ψ_{19}	ψ_{20}	ψ_{21}	ψ_{22}	ψ_{23}	ψ_{24}	ψ_{25}	ψ_{26}	ψ_{27}	ψ_{28}	ψ_{29}	*Término independ.*	*Solución*
−7					+4																								= −300	ψ_1 = 92.48
	−6	+1			+3	+1	+1																						= 0	ψ_2 = 73.86
	+1	−4					+2																						= 0	ψ_3 = 47.88
			−4					+1	+1																				= 0	ψ_4 = 14.35
				−4					+1																				= 0	ψ_5 = 4.62
+2	+1				−7	+1						+2	+1																= 0	ψ_6 = 86.84
	+1				+1	−4	+1						+1																= 0	ψ_7 = 75.90
		+1				+1	−4	+1						+1															= 0	ψ_8 = 58.83
			+1				+2	−6		+1					+1														= 0	ψ_9 = 38.91
			+1	+1					−4	+1	+1																		= 0	ψ_{10} = 18.49
								+1	+1	−4					+1	+1													= 0	ψ_{11} = 40.03
									+1		−4					+1													= 0	ψ_{12} = 14.95
					+2							−7								+2									= 0	ψ_{13} = 94.54
					+1	+1							−5	+1						+1	+1								= −300	ψ_{14} = 84.09
							+1						+1	−4	+1							+1							= 0	ψ_{15} = 72.62
								+1		+1				+2	−6		+1						+1						= 0	ψ_{16} = 61.42
										+1	+1					−4	+1	+1											= 0	ψ_{17} = 41.30
															+1	+1	−4						+1	+1					= 0	ψ_{18} = 63.52
																+2		−7	+1					+2	+1				= 0	ψ_{19} = 46.70
																		+2	−4						+1				= 0	ψ_{20} = 39.34
												+2	+1							−6	+1								= −200	ψ_{21} = 94.04
													+1							+1	−4	+1							= −100	ψ_{22} = 91.07
														+1							+1	−4	+1						= −100	ψ_{23} = 86.13
															+1		+1					+2	−6			+1			= −100	ψ_{24} = 80.84
																	+1	+1						−4		+1	+1		= 0	ψ_{25} = 70.51
																		+2	+1						−6		+2	+1	= 0	ψ_{26} = 63.95
																							+1	+1		−4			= −200	ψ_{27} = 87.84
																								+2	+1		−7	+1	= −300	ψ_{28} = 84.00
																									+1		+2	−4	= −100	ψ_{29} = 82.99

En la Fig. 10.28 se presentan, con trazo continuo, las líneas de corriente $\psi = 20$, 40, 60, 80, obtenidas interpolando entre los valores que han resultado en los puntos de la malla analizada. Se observa que aun cuando la frontera elegida a la izquierda ha quedado demasiado lejos de la línea de corriente $\psi = 80$, es posible acercarla más hacia ésta, una distancia arbitraria, hasta formar cuadrados con las equipotenciales.

Para obtener los valores de la función potencial ϕ se puede proceder en la misma forma que con ψ. Sin embargo, observe que la malla elegida (Fig. 10.24) forma a su vez otras de diferente tamaño, orientadas 45° respecto del sistema de ejes $x - y$, si además se recurre a puntos auxiliares como se muestra en la Fig. 10.27, designados con la notación a_i. Lo anterior permite hacer un cálculo aproximado de ϕ si se recurre a las Ecs. de Cauchy-Riemann.

Los valores de ψ en los puntos auxiliares se calculan con los obtenidos anteriormente con la Ec. (10.22b); por ejemplo, para el punto a_7 tenemos:

$$\psi_{a7} = \frac{\psi_6 + \psi_1 + 100 + \psi_{13}}{4} =$$

$$= \frac{86.84 + 92.48 + 100 + 94.54}{4} = 93.46$$

valor que se anota en el segundo cuadrante del punto en la Fig. 10.27. Los puntos 1, a_1, 2, 3, a_2 se encuentran sobre la misma equipotencial a la cual se le fija arbitrariamente el valor 500. En otros casos es conveniente proceder con los puntos que quedan sobre las diagonales.

Para el cuadrado que forman los pun-

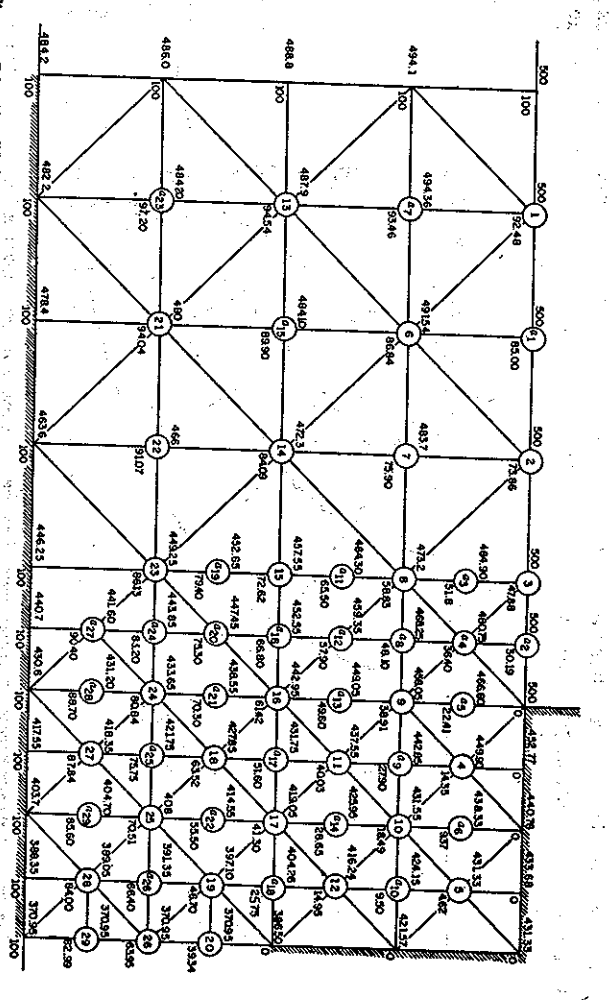


Figura 10.27. Valores finales de ψ y ϕ dentro de la región analizada en el problema 10.7. Los valores del segundo cuadrante —en cada punto— corresponden a ϕ, y los del cuarto cuadrante, a ψ.

tos 1, a_7, 6, a_1, de las Ecs. de Cauchy-Riemann en diferencias finitas, se tiene:

$$\phi_6 - \phi_1 = \psi_{a1} - \psi_{a7} = 85.00 - 93.46 = -8.46$$

$$\phi_{a7} - \phi_{a1} = \psi_6 - \psi_1 = 86.84 - 92.48 = -5.64$$

De la primera ecuación, obtenemos:

$$\phi_6 = 500 - 8.46 = 491.54$$

De la segunda ecuación se tiene:

$$\phi_{a7} = 500 - 5.64 = 494.36$$

En esta forma se puede penetrar en todo el campo para lograr los valores de ϕ en los restantes puntos, los cuales se indican en la Fig. 10.27. Conviene, sin embargo, insistir en que los valores obtenidos para ϕ, por este procedimiento, son indudablemente menos precisos que los adquiridos por la técnica directa utilizada para ψ; si bien la precisión en este caso es suficiente para los fines que se persiguen.

Con estos valores de ϕ se interpolaron las curvas equipotenciales ϕ = 480, 460, 440, 420, etc., las cuales se eligieron de manera que $\Delta\phi = \Delta\psi$, para obtener así la red del flujo con malla de cuadrados, que se presenta en la Fig. 10.28, donde las líneas equipotenciales aparecen con trazo punteado.

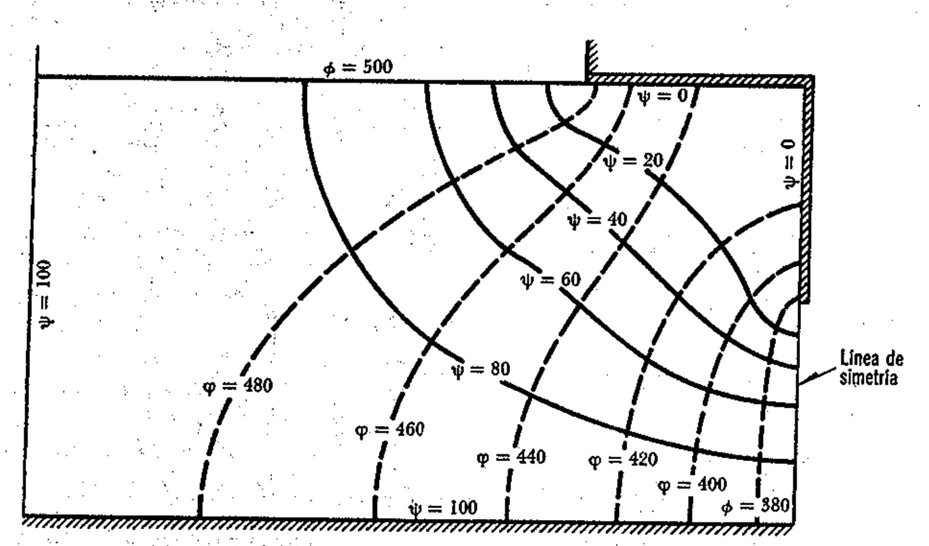


Figura 10.28. Red de flujo del problema 10.7.

10.6 Métodos de solución analítica

10.6.1 Método de solución directa

La integración analítica de la ecuación v = grad ϕ conduce a potenciales en aquellos casos raros para los cuales es suficiente especificar la forma como varía la velocidad. En este caso, es más aconsejable la representación escalar del vector velocidad, para disminuir la complejidad en la solución. De cualquier manera, es necesario asegurarse previamente de que

ϕ y ψ existen, esto es, que el flujo es irrotacional e incompresible, respectivamente. Los problemas 10.2 y 10.3 son ejemplos de este tipo de solución. Pueden presentarse otros casos de interés relacionados con flujos bidimensionales y permanentes:

a) *Flujo rectilíneo uniforme.* Es el más sencillo y se realiza con velocidad uniforme y constante v_0, con líneas de corriente paralelas de cierta inclinación respecto del sistema coordenado (Fig. 10.29). Se satisfacen en cualquier punto las siguientes ecuaciones:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = v_{0x}$$

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_{0y}$$

Cumpliendo la condición de irrotacionalidad y compresibilidad del flujo, la función potencial resulta:

$$\phi = v_{0x}\, x + v_{0y}\, y \qquad (10.40)$$

Como la función de corriente se obtiene por integración directa, en forma semejante al potencial, resulta que:

$$\psi = v_{0x}\, y - v_{0y}\, x \qquad (10.41)$$

Las líneas de corriente forman un haz de rectas paralelas, de ecuación $v_{0x}\, y - v_{0y}\, x$ = constante, cuya pendiente es v_{0y} / v_{0x}. De igual manera, las equipotenciales tienen la ecuación $v_{0x}\, x + v_{0y}\, y$ = constante, cuya pendiente es $-v_{0x}/v_{0y}$. Cuando el flujo es paralelo al eje ($\theta = 0$), $v_{0y} = 0$ y $\phi = v_{0x}$, $\psi = v_{0y}$.

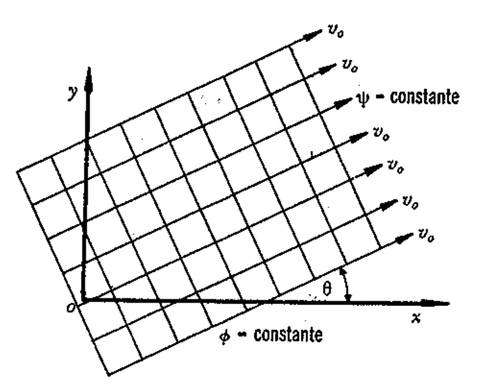


Figura 10.29. Flujo rectilíneo uniforme.

b) *Fuente.* Se produce radialmente desde un eje z en planos $x - y$ perpendiculares a dicho eje. El gasto unitario que sale de la fuente, entre dos planos paralelos separados una distancia igual a uno (Fig. 10.30), es constante y vale:

$$q = 2\pi r v_r$$

q se conoce como la intensidad de la fuente, siendo v_r la velocidad radial a una distancia r del origen ($r^2 = x^2 + y^2$).

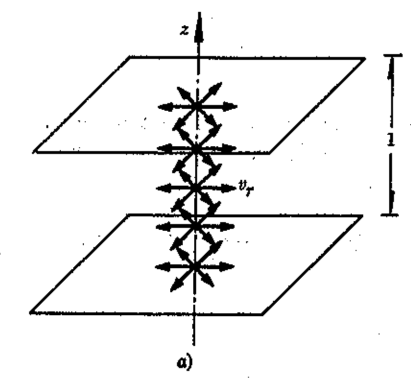


Figura 10.30a. Flujo desde una fuente bidimensional.

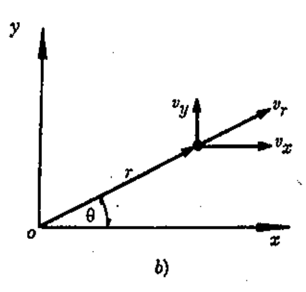


Figura 10.30b. Flujo desde una fuente bidimensional.

Por tanto:

$$v_r = \frac{q}{2\pi}\frac{1}{r}, \quad v_\theta = 0 \qquad (10.42)$$

Haciendo $q/2\pi = m$ constante, resulta que la velocidad varía inversamente con el radio r.

De lo anterior se deduce que las componentes de velocidad son:

$$v_x = \frac{m\,x}{r^2}; \qquad v_y = \frac{m\,y}{r^2}$$

En efecto,

$$v_r = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m\,x}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{m\,y}{r^2}\right)^2} = \frac{m}{r}$$

La función potencial existe, ya que el rotacional vale cero, lo cual puede confirmarse como sigue:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{4\,mx\,yr}{r^4} + \frac{4\,mx\,yr}{r^4} = 0$$

Además,

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = $$

$$= \frac{mx}{r^2}dx + \frac{my}{r^2}dy$$

$$d\phi = \frac{m}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

luego entonces:

$$\phi = \frac{q}{4\pi}\ln(x^2+y^2) = \frac{q}{2\pi}\ln r \qquad (10.43)$$

donde la constante de integración puede admitir cualquier valor y, en este caso, cero. Al despejar a r resulta:

$$e^{\phi/m} = r = \sqrt{x^2+y^2}$$

esto es, las líneas equipotenciales son circunferencias concéntricas al origen, las cuales, para $\phi = \pi\,m/8, 2(\pi\,m/8), 3(\pi\,m/8)$, tienen el aspecto indicado en la Fig. 10.31.

Es fácil demostrar que el flujo es incompresible y que existe la función de corriente. De aquí:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{mx}{r^2}; \qquad -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{my}{r^2}$$

$$d\psi = -\frac{my\,dx}{x^2+y^2} + \frac{mx\,dy}{x^2+y^2} = $$

$$= m\,d\,(\text{áng}\tan y/x)$$

y eligiendo la constante de integración igual a cero, resulta:

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\,\text{áng}\tan(y/x) = m\,\theta \qquad (10.44)$$

donde θ es el ángulo de giro en coordenadas polares. De la ecuación anterior resulta:

$$\frac{y}{x} = \tan\frac{\psi}{m}$$

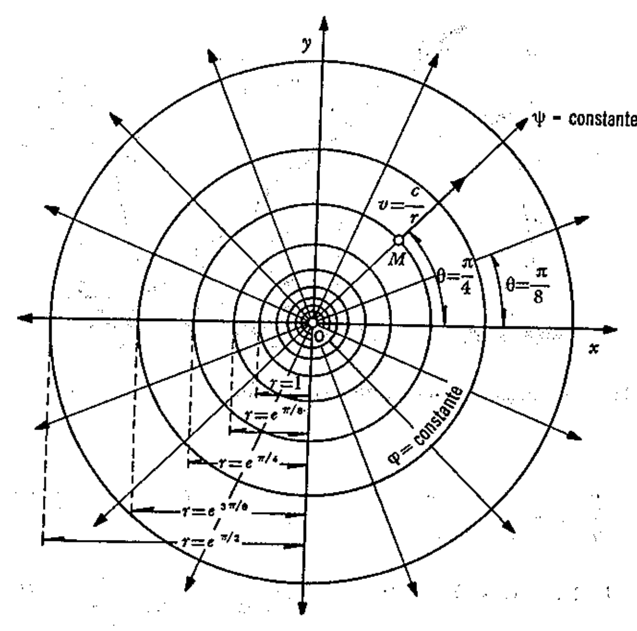


Figura 10.31. Fuente bidimensional.

Las líneas de corriente son radiales; de la Ec. (10.44) para $\psi = \pi\,m/8$, $2(\pi\,m/8)$, $5(\pi\,m/8)$, etc., presentan el aspecto de la Fig. 10.31.

c) *Sumidero.* Es similar a la fuente, con la única diferencia de que las líneas de corriente confluyen hacia el origen; esto es, la velocidad v_r es negativa y, por lo mismo, las funciones potencial y de corriente cambiarán de signo. Las funciones para el sumidero resultan ser:

$$\phi = -\frac{q}{4\pi}\ln(x^2+y^2) = $$

$$= -\frac{q}{2\pi}\ln r \qquad (10.45)$$

$$\psi = -\frac{q}{2\pi}\,\text{áng}\tan y/x = $$

$$= -\frac{q}{2\pi}\,\theta \qquad (10.46)$$

Problema 10.8. Una compuerta plana inclinada descarga agua con una abertura δ pequeña, en comparación con el tirante h_0 —aguas arriba— (Fig. 10.32), de tal manera que se puede considerar que las líneas de flujo son en dirección radial al punto 0; esto es, igual que el flujo a un sumidero. Determinar la distribución de presiones dinámicas sobre la compuerta, el empuje total sobre la misma y su punto de aplicación, suponiendo que el flujo es permanente e incompresible (referencia 9).

Solución. Con la nomenclatura de la figura 10.32 se aplica la ecuación de Bernoulli (10.3), entre un punto B sobre la superficie libre (donde la velocidad es uniforme de valor v_0), el punto i y el punto A; todos dirigidos sobre la frontera superior:

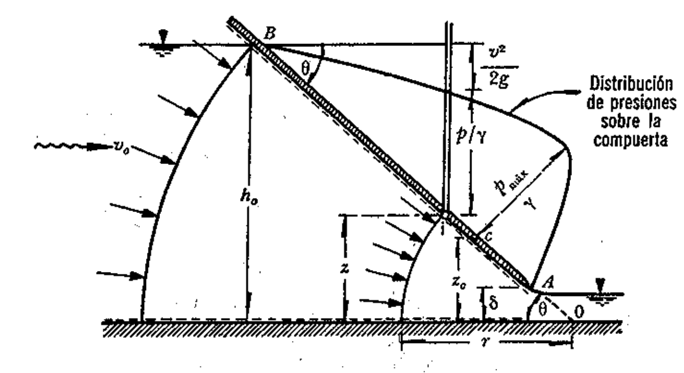


Figura 10.32. Descarga de una compuerta inclinada con una abertura pequeña.

$$h_0 + \frac{v_0^2}{2g} = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \frac{v_\delta^2}{2g} + \delta$$

De acuerdo con la Ec. (10.42) se puede escribir:

$$v_0 r_B = v\, r = v_\delta\, r_A = \text{constante}$$

pero,

$$r_B = \frac{h_0}{\text{sen}\,\theta};\quad r = \frac{z}{\text{sen}\,\theta};\quad r_A = \frac{\delta}{\text{sen}\,\theta}$$

Luego entonces, se satisface que:

$$v_0 h_0 = v\, z = v_\delta\, \delta$$

o bien

$$\frac{v}{v_0} = \frac{h_0}{z},$$

que substituida en la ecuación de Bernoulli resulta:

$$\frac{p}{\gamma} = h_0 - z - \frac{v^2 - v_0^2}{2g} =$$

$$= h_0 - z - \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{h_0^2}{z^2} - 1\right)$$

Además, con $\frac{v_\delta}{v_0} = \frac{h_0}{\delta}$, de la misma ecuación de Bernoulli, tenemos:

$$h_0 - \delta = \frac{v_\delta^2 - v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{h_0^2}{\delta^2} - 1\right)$$

y

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{\delta^2}{h_0 + \delta}$$

Por lo tanto,

$$\frac{p}{\gamma} = h_0 - z - \frac{\delta^2}{h_0 + \delta}\left(\frac{h_0^2}{z^2} - 1\right)$$

que es la ley de distribución de presiones de la Fig. 10.32. El punto en el que ocurre el valor máximo de la presión se obtiene por el criterio de la primera derivada:

$$\frac{dp}{dz} = \gamma\left[-1 + \frac{2\,h_0^2\,\delta^2}{(h_0 + \delta)\,z^3}\right] = 0$$

con lo anterior, la posición del punto resulta:

$$z_o = \sqrt[3]{\frac{2\,h_0^2\,\delta^2}{h_0 + \delta}}$$

Esto es, la posición de la presión máxima y su magnitud es independiente del ángulo θ de inclinación de la compuerta. El empuje total, resultado de las presiones hidrostáticas, vale:

$$P = \int p\, ds = \frac{\gamma}{\text{sen}\,\theta} \times$$

$$\times \int_{\delta}^{h_0}\left[h_0 - z - \frac{\delta^2}{h_0 + \delta}\left(\frac{h_0^2}{z^2} - 1\right)\right] dz =$$

$$= \frac{\gamma}{\text{sen}\,\theta}\left[h_0 z - \frac{z^2}{2} + \frac{\delta^2}{h_0 + \delta}\left(\frac{h_0^2}{z} + z\right)\right]_{\delta}^{h}$$

$$P = \frac{\gamma}{\text{sen}\,\theta}(h_0 - \delta)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\delta}{h_0 + \delta}\right)$$

con $h_0 = 5$ m, $\delta = 0.25$ m, $\gamma = 1$ ton/m^3, $\theta = 90°$, se obtiene:

$$z_o = \sqrt[3]{\frac{2 \times 25 \times 0.0625}{5 + 0.25}} = 0.841 \text{ m}$$

$$(p/\gamma)_{máx} = 5 - 0.841 - \frac{0.0625}{5.25} \times$$

$$\times\left(\frac{25}{0.707} - 1\right) = 3.75 \text{ m}$$

$$P = (5 - 0.25)^2\left(0.5 - \frac{0.25}{5.25}\right) = 10.21 \text{ ton}$$

Las expresiones de este problema son aplicables sólo si $h_0 \gg \delta$.

d) *Vórtice libre y combinado.* El vórtice libre está limitado a fluidos ideales y se caracteriza por el hecho de que el movimiento se produce con líneas de corriente en la forma de circunferencias concéntricas al origen con velocidades tangenciales —que siguen la ley dada por la Ec. (10.5); esto es:

$$v_r = 0 \qquad (10.47a)$$

$$v_\theta = \frac{k}{r} \qquad (10.47b)$$

Las equipotenciales son líneas radiales desde el origen (Fig. 10.33). Las funciones potencial y de corriente se obtienen intercambiando ϕ y ψ en las ecuaciones para una fuente. Para un vórtice que gira en dirección positiva (sentido antihorario) se tiene:

$$\phi = k \text{ áng tan} \frac{y}{x} = k\theta$$

$$\psi = -\frac{k}{2}\ln(x^2 + y^2) = -k \ln r$$

El signo menos en ψ permite dar validez a las Ecs. (10.10) y (10.11).

La intensidad de un vórtice depende de la magnitud de k, pues para un radio dado —a medida que k aumenta— se incrementa la velocidad de rotación.

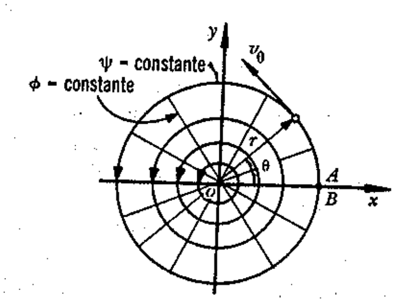


Figura 10.33. Vórtice irrotacional.

La intensidad se define como la magnitud de la circulación, la cual a su vez se

especificó en la sección 10.3. Para el caso particular de un contorno circular cerrado con centro en el origen, que arranca en un punto A y regresa al punto B (que coincide con A), se tiene:

$$\phi_A = k\theta_A = 0$$

y para el punto B, después de una vuelta completa $\phi_B = k\theta_B = 2\pi k$. De acuerdo con la Ec. (10.14), la circulación vale $\Gamma = 2\pi k$; esto es, diferente de cero aun cuando se trata del flujo con potencial, lo cual se debe a que en este caso el potencial es una función múltiple. En efecto, se tienen diferentes valores del potencial para el mismo punto:

$$\phi = \phi_A + 2\pi n k$$

donde n es un número entero cualquiera. Para cualquier otro circuito cerrado que no incluya el origen, la circulación vale cero.

Las funciones potencial y de corriente son, finalmente:

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \qquad (10.48)$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \qquad (10.49)$$

Si se elige una línea de corriente de radio r como frontera rígida interior del flujo, éste se extenderá desde dicha frontera hasta el infinito, obteniéndose así el llamado flujo de circulación pura alrededor de un cilindro de radio r. La velocidad v en un punto cualquiera fuera de ese cilindro sigue la ley hiperbólica (10.47b), como sigue:

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \qquad (10.50)$$

y alcanza su máximo valor sobre la superficie del cilindro

$$v_{\theta_0} = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}$$

y su mínimo $v_\theta = 0$ para $r = \infty$.

El potencial de un flujo de circulación pura alrededor del cilindro está dado por la Ec. (10.48).

De la Ec. (10.50), si $r \to 0$, $v_\theta \to \infty$, lo cual es imposible que suceda. Una explicación de esta circunstancia y del hecho de que exista circulación en el vórtice irrotacional, es que en la parte central —y con radio r_0— se presenta un vórtice rotacional cuya ley de distribución de velocidades se aparta de la dada por la ecuación (10.50); es $v_\theta = kr$. El movimiento en esta zona muestra también la forma de circunferencias concéntricas cuya circulación vale:

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} v_\theta \, r \, d\theta = 2\pi r v_\theta = 2\pi k r^2$$

El movimiento en esta zona recibe el nombre de vórtice forzado o rotacional y se produce como si fuera un cuerpo rígido con velocidad angular constante ω, siendo la ley de distribución de velocidades $v_\theta = \omega r$. La combinación de ambos flujos se muestra en la Fig. 10.34 y recibe el nombre de vórtice combinado o de Rankine; en esta forma se presenta en la naturaleza. Es el caso del vórtice formado por el flujo hacia un orificio practicado en el fondo de un recipiente con niveles de agua, bajos, o en la entrada de los túneles de desvío de una presa.

La superficie libre de un vórtice combinado es cóncava en la zona del vórtice forzado y convexa en la zona del vórtice libre (Fig. 10.34).

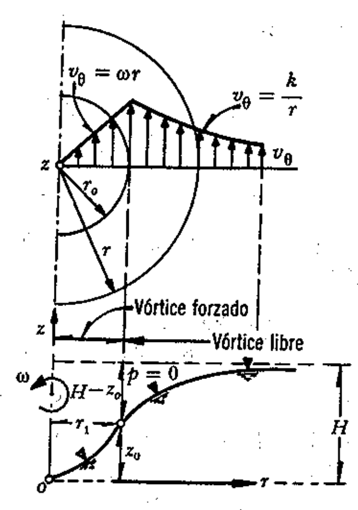


Figura 10.34. Vórtice combinado.

Siendo el flujo permanente, la ecuación de Bernoulli (10.3) entre dos puntos 1 y 2 sobre la superficie libre es:

$$H = z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

Para la zona de vórtice libre, tenemos que:

$$v = v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$z_1 - z_2 = \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) \qquad (10.51a)$$

o bien, para $r_1 = \infty$, $z_1 = H$ y con $z_2 = z$, $r_2 = r$, lo siguiente:

$$H - z = \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g r^2} = \frac{v_\theta^2}{2g} \qquad (10.51b)$$

La superficie libre en la zona de vórtice libre adquiere la forma de un hiperboloide de revolución, asintótico al eje de rotación y al plano horizontal $z = H$, como se muestra en la Fig. 10.34 (sección 2.8).

Sobre la superficie libre en la zona de vórtice forzado $v = \omega r$ y de la Ec. (4.9b), resulta:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{v^2}{rg} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \qquad (10.52)$$

Cuando $r = 0$, $z = 0$ y la constante de integración es cero, la superficie libre tiene la forma de un paraboloide de revolución.

En la frontera de los dos vórtices, $r = r_0$, $z = z_0$, la depresión para el vórtice libre es

$$H - z_0 = \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g r_0^2} = \frac{v_{\theta_0}^2}{2g}$$

y para el vórtice forzado:

$$z_0 = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} = \frac{v_{\theta_0}^2}{2g}$$

luego,

$$H - \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} = \frac{\omega^2 r_0^2}{2g}$$

y de aquí

$$r_0 = \sqrt{\frac{gH}{\omega^2}} \qquad (10.53)$$

Esto es, a medida que ω aumenta, r_0 disminuye.

Cuando el vórtice combinado no presenta una superficie libre, se puede calcular la distribución de presiones en su

interior. En este caso es más conveniente aplicar la Ec. (4.9b) para los dos tipos de vórtice, pues en ambos casos las líneas de corriente son circunferencias concéntricas horizontales y la ley de distribución de velocidades que en cada uno se elige, lleva consigo la irrotacionalidad o rotacionalidad del flujo. La ecuación para el flujo permanente es:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v_\theta^2}{r}$$

Para la zona de vórtice libre $v_\theta = \dfrac{\Gamma}{2\pi r}$ y la diferencia de presiones entre dos puntos 1 y 2 resulta:

$$p_2 - p_1 = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r^3} dr =$$

$$= \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2}\left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\right) \qquad (10.54)$$

Para la zona de vórtice forzado $v_\theta = \omega r$; la diferencia de presiones entre dos puntos 1 y 2 es:

$$p_2 - p_1 = \int_{r_1}^{r_2} \rho\, \omega^2 r\, dr =$$

$$= \rho \frac{\omega^2}{2}(r_2^2 - r_1^2) \qquad (10.55)$$

Problema 10.9. A la entrada del túnel de desvío de una presa se forma un vórtice combinado. En un punto a 1.20 m del centro de rotación la velocidad tangencial es de 0.90 m/seg; *a)* determinar la diferencia de niveles de la superficie libre del agua entre este punto y otro con un radio $r = 0.60$ m; *b)* determinar la diferencia de niveles entre la superficie libre para este segundo punto y la superficie libre inalterada del agua. Suponga que el flujo está dentro de la zona de vórtice libre.

Solución a). De la ecuación (10.50) para $r = 1.20$ m, y $v_\theta = 0.9$ m/seg

$$\Gamma = 2\pi r\, v_\theta = 2\pi \times 1.2 \times 0.9 = 6.79 \text{ m}^2/\text{seg}$$

De la Ec. (10.51a) para $r_1 = 1.20$ m, y $r_2 = 0.60$ m

$$z_1 - z_2 = \frac{(6.79)^2}{8\pi^2 \times 9.8}\left[\frac{1}{(0.6)^2} - \frac{1}{(1.2)^2}\right]$$

$$= 0.124 \text{ m}$$

Solución b). Para $r = 0.60$ m, de la ecuación (10.50):

$$v_\theta = \frac{6.79}{2\pi \times 0.6} = 1.8 \text{ m/seg}$$

y de la Ec. (10.51b):

$$H - z = \frac{(1.8)^2}{2 \times 9.8} = 0.1655 \text{ m}$$

Problema 10.10. Los diámetros exterior e interior del impulsor de una bomba centrífuga son de 1.20 y 0.60 m, respectivamente. Encontrar la velocidad de rotación con la cual se inicia el ascenso del agua contra una carga de 9.15 m.

Solución. En este caso, como el flujo se debe a un agente exterior que es la potencia proporcionada a la flecha del impulsor, el movimiento se presenta en la zona de vórtice forzado.

Con $r_1 = 0.30$ m, $r_2 = 0.60$ m y $\dfrac{p_2 - p_1}{\gamma} = 9.15$ m, de la Ec. (10.55), resulta:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{r_2^2 - r_1^2}\left(\frac{p_2 - p_1}{\gamma}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \times 9.8 \times 9.15}{0.36 - 0.09}}$$

$$\omega = 25.77 \text{ rad/seg}$$

$$n = \frac{60\,\omega}{2\pi} = \frac{60 \times 25.77}{6.28}$$

$$n = 246 \text{ rev/min}$$

10.6.2 Método de solución indirecta

Consiste esencialmente en una solución de ensayos para probar funciones arbitrarias, con la idea de que se adapten al problema de interés. De hecho, muchas de las funciones potenciales básicas parecen haberse encontrado, probando alguna función ϕ que satisfaga la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera. Sin embargo, es remota la posibilidad de éxito de este método en la solución de nuevos problemas. Por ejemplo, la función $\phi = \frac{1}{2}(a x^2 + b y^2 + c z^2)$ es una solución de la ecuación de Laplace, únicamente si se satisface que $a + b + c = 0$. Algunos casos de flujo se indican a continuación.

a) *Flujo con simetría axial contra una pared.* Si se considera que $b = a$, $c = -2a$, y que la función potencial es:

$$\phi = \frac{a}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

su resultado es el mismo del problema 10.2, donde más bien se especificó el campo de velocidades.

b) *Flujo bidimensional contra una placa.* Si ahora $a = -b$, y $c = 0$, entonces $\phi = (a/2)(x^2 - y^2)$, o sea el mismo resultado del problema 10.3, donde $a = 3$.

10.6.3 Superposición de flujos

Basado en la propiedad de superposición de la función potencial, este método consiste en combinar soluciones conocidas de flujos con potencial, tales como flujos uniformes, fuentes, sumideros, vórtices, etc., y encontrar soluciones de otros más complicados. Es quizá este método el que tiene mayores aplicaciones.

a) *Vórtice espiral.* El fenómeno meteorológico llamado tornado se asemeja al flujo resultante de la superposición de un vórtice irrotacional y de un sumidero, excepto en la región próxima al origen. Es un buen ejemplo de la concordancia que puede tener el fenómeno con un fluido real como el aire y el fluido ideal aquí considerado. Las funciones potencial y de corriente para el nuevo flujo se obtienen de la suma de los flujos componentes (vórtice y sumidero), como sigue:

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta - \frac{q}{2\pi}\ln r =$$

$$= \frac{\Gamma}{2\pi}\text{ áng tan }\frac{y}{x} - \frac{q}{4\pi}\ln(x^2 + y^2)$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r - \frac{q}{2\pi}\theta$$

$$= -\frac{\Gamma}{4\pi}\ln(x^2 + y^2) - \frac{q}{2\pi}\text{ áng tan }\frac{y}{x}$$

En la Fig. 10.35 se muestra la disposición del flujo resultante.

La velocidad tangencial del vórtice es

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

y la velocidad radial del sumidero es

$$v_r = -\frac{q}{2\pi r}$$

La velocidad resultante es:

$$v = \frac{\sqrt{\Gamma^2 + q^2}}{2\pi r}$$

la cual puede también obtenerse de

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2}$$

Así resulta:

$$v\,r = c = \frac{\sqrt{\Gamma^2 + q^2}}{2\pi}$$

Aplicando la ecuación de Bernoulli (10.3) a dos puntos colocados al mismo nivel, se tiene que

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho c^2}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$

lo cual indica una relación lineal entre p y $1/r^2$.

Esta relación se ha comprobado en tornados con mediciones realizadas directamente (la Ref. 14 presenta una demostración de esto).

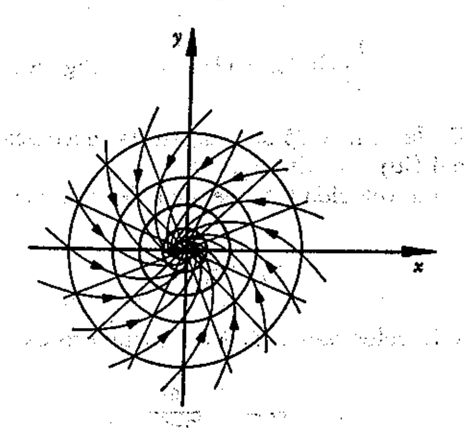


Figura 10.35. Vórtice espiral.

Problema 10.11. La velocidad resultante de un tornado a una distancia $r = 360$ m, desde su centro es de 24 m/seg. Para el aire con densidad $\rho = 0.125$ kg seg^2/m^4, encontrar la presión en un punto a 180 m desde su centro.

Solución. La constante $c = v\,r = 24 \times 360 = 8\,640$ m^2/seg.

Para $r_2 = \infty$, $p_2 = 0$ (presión atmosférica), la presión en el punto es:

$$p_1 = -\frac{\rho c^2}{2 r_1^2} = -\frac{0.125 \times 8\,640^2}{2 \times (180)^2}$$

$$p_1 = -144.0 \text{ kg/m}^2$$

b) *Flujo de una fuente a un sumidero.* Se obtiene de la superposición del flujo de una fuente y un sumidero, ambos de igual intensidad. Tiene aplicación en Geohidrología al estudiar el flujo de agua de un pozo de recarga a uno de absorción, perforados a través de un medio permeable.

Suponga que, tanto la fuente como el sumidero, se localizan sobre el eje de las x y están separados una distancia $2a$ (figura 10.36). Según las Ecs. (10.43) y (10.45), el potencial del nuevo flujo es:

$$\phi = \phi_f + \phi_s = \frac{q}{2\pi}(\ln r_1 - \ln r_2) =$$

$$= \frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} \qquad (10.56a)$$

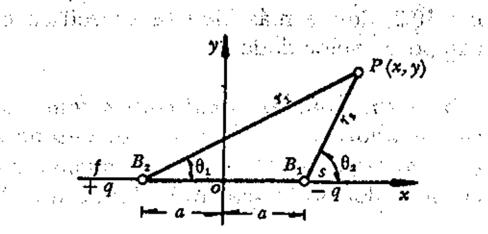


Figura 10.36. Flujo de una fuente a un sumidero.

Para un punto cualquiera P (Fig. 10.36) se tiene:

$$r_1 = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x - a)^2 + y^2}$$

La función potencial resulta también:

$$\phi = \frac{q}{4\pi}\ln\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} \qquad (10.56b)$$

En la misma forma, la función de corriente es:

$$\psi = \frac{q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) \qquad (10.57)$$

o bien con

$$\tan\theta_1 = \frac{y}{x + a}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{y}{x - a}$$

entonces:

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

luego

$$\theta_1 - \theta_2 = \text{áng tan}\,\frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

y entonces:

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\,\text{áng tan}\left(\frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\right) \qquad (10.58)$$

Se puede encontrar la ecuación de las líneas de corriente, para lo cual, de la Ec. (10.58) se puede escribir:

$$x^2 + y^2 + \frac{2ay}{\tan\frac{2\pi\psi}{q}} = a^2$$

y de ahí

$$x^2 + \left(y + \frac{a}{\tan\frac{2\pi\psi}{q}}\right)^2 = \left(\frac{a}{\text{sen}\,\frac{2\pi\psi}{q}}\right)^2$$

Esto es, las líneas de corriente consisten en una familia de circunferencias cuyo centro tiene las coordenadas variables

$$\left(0, \pm\frac{a}{\tan\frac{2\pi\psi}{q}}\right)$$

con radio también variable, de valor

$$\frac{a}{\text{sen}\,\frac{2\pi\psi}{q}}$$

En forma análoga, se puede demostrar que las líneas equipotenciales constituyen una familia de circunferencias, de ecuación:

$$(x - k\,a)^2 + y^2 = (k^2 - 1)\,a^2$$

cuyo centro tiene las coordenadas $(\pm\,k\,a, 0)$ y su radio es $\sqrt{(k^2 - 1)\,a^2}$, donde:

$$k = \frac{e^{(4\pi/q)\phi} + 1}{e^{(4\pi/q)\phi} - 1}$$

Tomando en consideración los valores de r_1 y r_2, las componentes de velocidad son:

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{q}{2\pi}\,\frac{r_2^2(x+a) - r_1^2(x-a)}{r_1^2\,r_2^2} \qquad (10.59a)$$

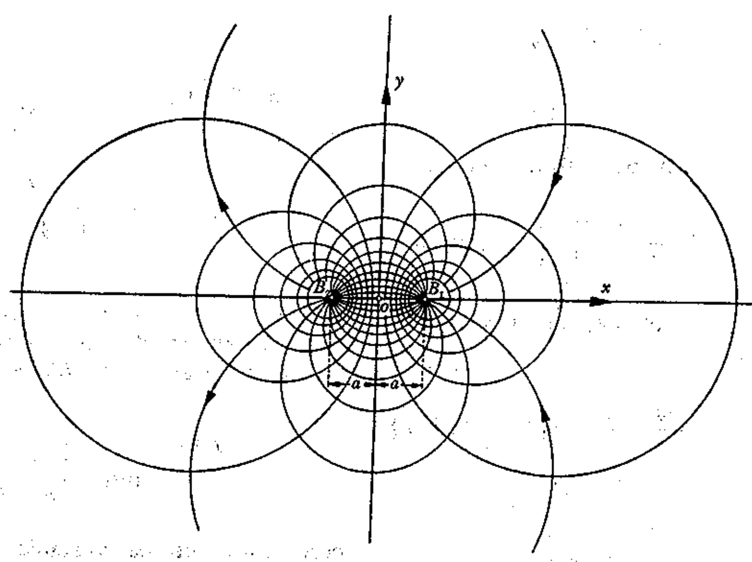


Figura 10.37. Flujo de una fuente a un sumidero.

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{q}{2\pi}\,\frac{(r_2^2 - r_1^2)\,y}{r_1^2\,r_2^2} \qquad (10.59b)$$

y la magnitud de velocidad:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} =$$

$$= \frac{q}{2\pi}\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2 - (r_1^2 + r_2^2 - 4\,a^2)}{r_1^2\,r_2^2}}$$

$$v = \frac{q\,a}{\pi\,r_1\,r_2} \qquad (10.60)$$

Siendo, por supuesto, tangente en cada punto a las líneas de corriente. La figura 10.37 presenta la forma del flujo.

Problema 10.12. Una compuerta cilíndrica descarga agua con una abertura λ pequeña, en comparación con el tirante h_0 —aguas arriba— (Fig. 10.38). Si se supone que la frontera de la compuerta coincide con una de las equipotenciales (de forma circular) del flujo de una fuente a un sumidero, las restantes equipotenciales serán líneas de corriente para el flujo hacia la compuerta; esto es, se intercambian las equipotenciales por líneas de corriente para el nuevo flujo. Determinar la ley de distribución de presiones sobre la pared de la compuerta, suponiendo el flujo permanente.

Solución. La geometría y nomenclatura de la Fig. 10.38 permite calcular la posición de la fuente y sumidero, ficticios, que determinan el flujo. Una vez conocido el radio de la compuerta y la abertura λ, la posición del eje de la compuerta coincide con el centro de la línea equipotencial (circunferencia) de frontera y vale:

$$x_0 = \lambda + R$$

por lo que la abscisa del centro de la circunferencia resulta:

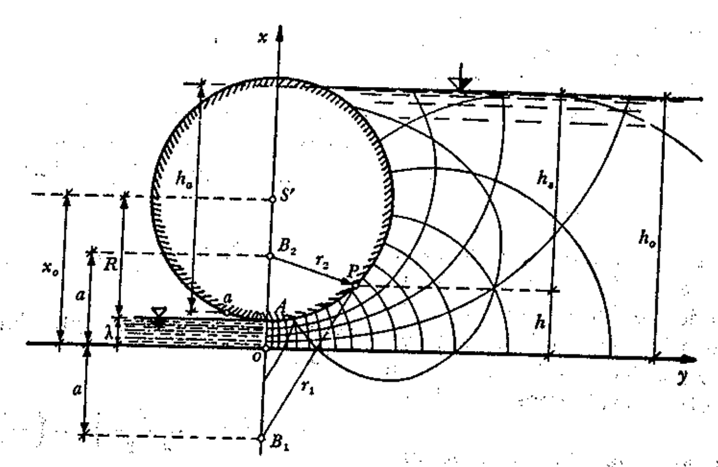


Figura 10.38. Flujo por debajo de una compuerta cilíndrica.

$$k^2\,a^2 = x_0^2$$

y su radio:

$$a\sqrt{k^2 - 1} = a\sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} - 1} = R$$

Luego entonces:

$$a = \sqrt{x_0^2 - R^2}$$

De la ecuación de Bernoulli para la línea de corriente que coincide con el eje de la compuerta, obtenemos:

$$h_0 + \frac{v_0^2}{2g} = h + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \lambda + \frac{v_A^2}{2g}$$

de la que resulta:

$$v_0^2 = v_A^2 - 2g\,(h_0 - \lambda)$$

Por lo tanto:

$$\frac{p}{\gamma} = (h_0 - h) + \frac{v_0^2 - v^2}{2g} =$$

$$= h_s + \frac{v_A^2 - 2g\,(h_0 - \lambda) - v^2}{2g}$$

$$\frac{p}{\gamma} = h_s - (h_0 - \lambda) - \frac{v^2 - v_A^2}{2g}$$

De la Ec. (10.60) para los puntos P y A, se tiene:

$$\frac{q}{\pi} = \frac{v\,r_1\,r_2}{a} = \frac{v_A\,r_{1A}\,r_{2A}}{a}$$

y

$$v = v_A\,\frac{r_{1A}\,r_{2A}}{r_1\,r_2}$$

de donde:

$$\frac{p}{\gamma} = h_s - (h_0 - \lambda) - \frac{v_A^2}{2g} \times$$

$$\times \left(\frac{r_{1A}^2\,r_{2A}^2}{r_1^2\,r_2^2} - 1\right)$$

Se ha comprobado experimentalmente que esta ley de distribución de presiones

es más precisa cuando se hace coincidir A con el punto real de separación de la vena líquida —que es el punto a de la figura 10.38—obteniéndose así:

$$\frac{p}{\gamma} = h_s - h_a - \frac{v_a^2}{2g}\left(\frac{r_{1a}^2\, r_{2a}^2}{r_1^2\, r_2^2} - 1\right)$$

c) *Doblete*. Es el nombre del flujo límite que resulta del flujo de una fuente a un sumidero de igual intensidad, cuando la distancia entre ellos tiende a cero. Es completamente teórico y sólo sirve en la solución de otros problemas de flujos compuestos.

La función potencial del flujo de una fuente a un sumidero (Ec. 10.56b) se puede escribir en la forma:

$$\phi = \frac{q}{4\pi}\{\ln[(x+a)^2 + y^2] - \ln[(x-a)^2 + y^2]\}$$

Si

$$F(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$$

resulta:

$$\phi = \frac{q}{4\pi} 2a\left[\frac{F(x+a, y) - F(x-a, y)}{2a}\right]$$

Si se aproximan la fuente y el sumidero, la distancia a tiende a cero y la intensidad de ambos decrece ilimitadamente, de modo que el producto $(2qa)$ tiende a un valor finito c (Ref. 16). Debido a que $da = dx$, el valor límite de la expresión anterior es:

$$\phi_d = \frac{c}{4\pi}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{c}{4\pi}\frac{2x}{x^2 + y^2}$$

La función potencial del doblete es, finalmente:

$$\phi_d = \frac{c}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2} \qquad (10.61)$$

A partir de la Ec. (10.58) y por un procedimiento análogo se demuestra la función de corriente del doblete, esto es:

$$\psi_d = -\frac{c}{2\pi}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \qquad (10.62)$$

cuyas líneas de corriente tienen la ecuación:

$$x^2 + \left(y + \frac{c}{4\pi\psi_d}\right)^2 = \left(\frac{c}{4\pi\psi_d}\right)^2$$

esto es, son circunferencias con centro en

$$\left(0, \pm\frac{c}{4\pi\psi_d}\right)$$

y radio

$$\frac{c}{4\pi\psi_d}$$

Las líneas equipotenciales son también circunferencias, de ecuación:

$$\left(x - \frac{c}{4\pi\phi_d}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{4\pi\phi_d}\right)^2$$

con centro en

$$\left(\pm\frac{c}{4\pi\phi_d}, 0\right)$$

y radio

$$\frac{c}{4\pi\phi_d}$$

La Fig. 10.39 presenta la red de flujo de un doblete bidimensional.

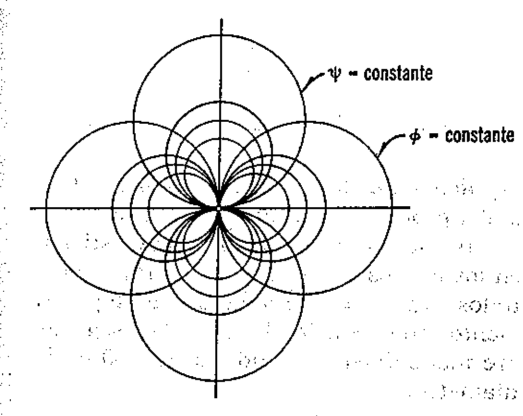


Figura 10.39. Flujo de un doblete bidimensional.

d) *Flujo en torno a un cilindro*. Es el flujo que se obtiene de la superposición de uno uniforme rectilíneo de velocidad v_0 y uno doblete; sus funciones potencial y de corriente son:

$$\phi = v_0 x + \frac{c}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\psi = v_0 y - \frac{c}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2}$$

La línea de corriente adecuada a $\psi = 0$, que delimita a los dos flujos, resulta ser una circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 = \frac{c}{2\pi v_0}$$

Si el radio de esta circunferencia se hace igual a R, se obtiene entonces:

$$\frac{c}{2\pi v_0} = R^2, \text{ o bien } \frac{c}{2\pi} = v_0 R^2$$

Si se considera que dicha línea de corriente cero corresponde a una frontera rígida, equivalente a la de un cilindro de radio R, se puede estudiar el flujo únicamente en el exterior de dicha frontera (Fig. 10.40); esto es, el flujo de la corriente uniforme alrededor de dicho cilindro. Así, resulta que las funciones potencial y de corriente, para dicho flujo, son finalmente:

$$\phi = v_0 x + v_0\left(\frac{R^2 x}{x^2+y^2}\right)$$

$$= v_0 r\cos\theta + v_0 R^2\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\phi = v_0 \cos\theta\left(r + \frac{R^2}{r}\right) \qquad (10.63)$$

$$\psi = v_0 y - v_0\left(\frac{R^2 y}{x^2+y^2}\right)$$

$$= v_0 r \operatorname{sen}\theta - v_0 R^2\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}$$

$$\psi = v_0 \operatorname{sen}\theta\left(r - \frac{R^2}{r}\right) \qquad (10.64)$$

Tales ecuaciones satisfacen la condición de frontera de que para $r \to \infty$, entonces:

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = v_0$$

$$v_y = 0$$

y que, además, la circulación alrededor del cilindro vale cero.

Las componentes de velocidad en coordenadas cartesianas y polares son:

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = v_0 - v_0 R^2\frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad (10.65a)$$

$$v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -v_0 R^2\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad (10.65b)$$

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = v_0\cos\theta\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \qquad (10.66a)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -v_0 \operatorname{sen}\theta\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \quad (10.66b)$$

Las componentes de la velocidad radial y tangencial, sobre la pared del cilindro, se obtienen con $r = R$ y valen $v_r = 0$ y $v_\theta = -2v_0 \operatorname{sen}\theta$. El signo menos significa que la velocidad tangencial está dirigida en sentido contrario al considerado como positivo para v_θ y, además, para $\theta = 0$ y $\theta = 180°$, $v_\theta = 0$; esto es, que los puntos A y B (Fig. 10.40) son puntos de estancamiento. Para el punto C ($\theta = 90°$), la velocidad tangencial es horizontal, vale $v_\theta = -2v_0$ y corresponde al punto de máxima velocidad.

Aplicando la ecuación de Bernoulli (10.3) entre un punto muy alejado del cilindro donde la presión es p_0 y otro de estancamiento (A o B), donde $v = 0$, resulta que la presión en ese punto vale:

$$p = p_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

o sea, la energía total.

Problema 10.13. De manera semejante a la del problema 3.1, calcular la intensidad de las presiones, en kg/m², que existirían en los puntos $x = -1.5$ m, -3 m, -6 m; todos para $y = 0$ del lado que sopla el viento, con velocidad $v_0 = 20$ m/seg, sobre una chimenea cilíndrica de 3.00 m de diámetro.

Solución. Con $y = 0$, de la Ec. (10.65a), resulta

$$v_x = v_0\left(1 - \frac{R^2}{x^2}\right);$$

ello comprueba la ecuación usada en el problema 3.1. Para los datos, la fórmula se transforma en:

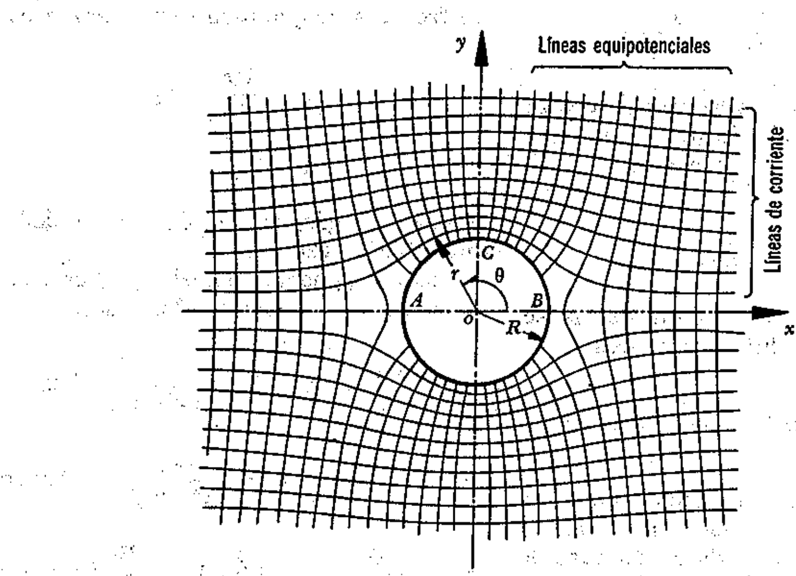


Figura 10.40. Flujo en torno a un cilindro.

$$v_x = 20\left(1 - \frac{1.5^2}{x^2}\right) = 20\left(1 - \frac{2.25}{x^2}\right)$$

Para $x = -1.5$ m, entonces:

$$v_x = 20\left(1 - \frac{2.25}{2.25}\right) = 0 \text{ (punto de estancamiento)}$$

Para $x = -3$ m, se obtiene:

$$v_x = 20\left(1 - \frac{2.25}{9}\right) = 15 \text{ m/seg}$$

Para $x = -6$ m, finalmente:

$$v_x = 20\left(1 - \frac{2.25}{36}\right) = 18.75 \text{ m/seg}$$

Siendo el flujo horizontal, la ecuación de Bernoulli (10.3) aplicada sobre la línea de corriente que coincide con el eje x, entre un punto con velocidad v_0 y presión p_0 y cualquiera de los puntos anteriores, se simplifica a la forma:

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g}$$

o bien,

$$p_0 + \rho\frac{v_0^2}{2} = p + \rho\frac{v^2}{2}$$

Puesto que p_0 coincide con la presión atmosférica, resulta:

$$p = \rho\left(\frac{v_0^2 - v^2}{2}\right)$$

De la Fig. 1.4, la densidad del aire a 15°C es:

$$\rho_0 = 0.125 \text{ kg seg}^2/\text{m}^4$$

Para $x = -1.5$ m (punto de estancamiento), se tiene:

$$p = 0.0625\,(20^2 - 0) = 25 \text{ kg/m}^2$$

Para $x = -3$ m, nos da:

$$p = 0.0625\,(400 - 225) = 10.94 \text{ kg/m}^2$$

Para $x = -6$ m, entonces:

$$p = 0.0625\,(400 - 351.56) = 3.027 \text{ kg/m}^2$$

10.6.4 Métodos analíticos

Muchos métodos se han desarrollado para la solución analítica de ecuaciones diferenciales parciales, particularmente de la ecuación de Laplace; son algunos de ellos: la solución por series de Fourier, por funciones singulares, esféricas, elipsoidales, armónicas, por cambio de variables y los métodos de ecuaciones integrales.

Este sistema puede llegar a ser bastante complejo aun para flujos simples, pero está fuera de los objetivos de este libro. (Para mayor información consultar las referencias 2, 5, 60 y 61.)

El método de transformación conforme es también de tipo analítico, si bien de mayor utilidad práctica. Consiste en un cambio de variables que, en el caso del flujo plano, se convierte en el sistema de transformación conforme o de mapeo en el plano complejo. Por este procedimiento, las soluciones de flujos conocidos, en un plano complejo, se transforman en el flujo deseado en otro plano complejo. En algunos casos, se utilizan transformaciones conformes sucesivas hasta obtener el flujo deseado.

Antes de explicar el método, conviene recordar algunos conceptos importantes.

El número complejo $z = x + iy$, se compone de dos cantidades escalares x y y que son reales, donde $i = \sqrt{-1}$. La parte x se conoce como real y la parte y como imaginaria. Este número complejo

se representa en el plano cartesiano $x - y$ (Fig. 10.42), por medio del vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ cuyo módulo es:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

El ángulo θ que forman $\mathbf{r}$ y el eje x se conoce como argumento y tiene el valor:

$$\theta = \text{áng tan } \frac{y}{x}$$

generalmente se restringe al intervalo $-\pi < \theta < \pi$.

Para que dos números complejos sean iguales, se necesita que lo sean las partes real e imaginaria. De acuerdo con esta representación, z también se puede expresar substituyendo las coordenadas polares r, θ, como sigue:

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta$$

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

Por otra parte, de un desarrollo en serie se demuestra que:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

Luego, un número complejo se puede expresar en tres formas distintas:

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = re^{i\theta}$$

de aquí también resulta que:

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

Si x y y son variables, el número $z = x + iy$ es una variable compleja.

Es posible definir otra variable compleja, w, como una función de la variable compleja z; esto es:

$$w = f(z)$$

de manera que su parte real ϕ y la imaginaria ψ son, en general, funciones de x y y; es decir:

$$w = \phi + i\psi = f_1(x, y) + if_2(x, y)$$

Por ejemplo, si $w = z^2$, con $i^2 = -1$, se tiene que

$$\phi + i\psi = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

de tal manera que:

$$\phi = x^2 - y^2$$

$$\psi = 2xy$$

En la misma forma que $z = x + iy$ define un punto sobre un diagrama que tiene a x como abscisa y a y como ordenada, de igual manera $w = \phi + i\psi$ define un punto sobre otro diagrama que tiene a ϕ como abscisa y a ψ como ordenada (figura 10.41). Cada diagrama se designa como el plano z y el plano w, respectivamente. Para cada punto (x, y) sobre el plano z, existirá el correspondiente punto (ϕ, ψ) sobre el plano w, debido a que los valores de ϕ y de ψ se determinan a partir de x y y.

Para el ejemplo anterior, el punto $z = x + iy = 1.67 + 0.89i$ en el plano z, tiene su correspondiente en el plano $w = z^2$, que es:

$$w = \phi + i\psi = (x^2 - y^2) + i2xy$$

$$w = (1.67^2 - 0.89^2) + i \cdot 2 \cdot 1.67 \cdot 0.89$$

$$w = 2 + 3i$$

Las Figs. 10.41 y 10.42 muestran los puntos correspondientes en los dos planos.

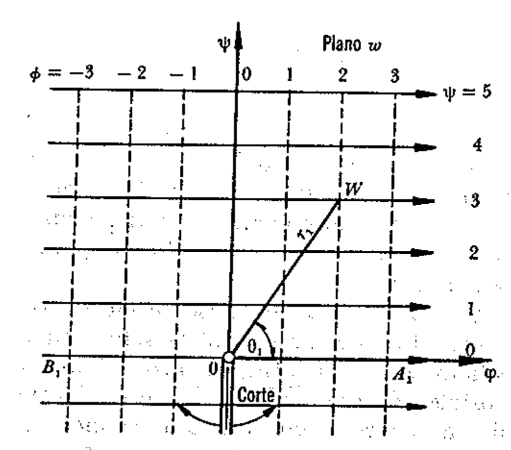


Figura 10.41. Plano w que representa el esquema de un flujo uniforme de izquierda a derecha.

Análogamente, cualquier curva sobre el plano z tiene una correspondiente sobre el plano w; por supuesto, con una forma distinta al ocurrir *la transformación* del plano z al plano w, la cual consiste en una correspondencia de los planos que quedan sobre ambas curvas.

Si se considera que ϕ es una función potencial y ψ la correspondiente función de corriente, la malla de líneas $\phi = x^2 - y^2 = C_1$ y $\psi = x^2 - y^2 = C_2$, sobre el plano w (Fig. 10.41), representa con claridad un flujo uniforme $\phi = C_1$, $\psi = C_2$ paralelo al eje ϕ en la dirección positiva

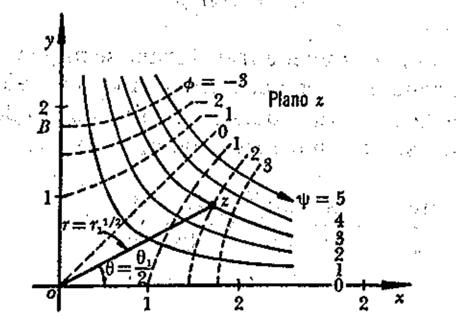


Figura 10.42. Un cuadrante del plano z resultante de la transformación $z = w^{\frac{1}{2}}$, o bien, $w = z^2$.

de ese eje. Sobre el plano z (Fig. 10.42) las correspondientes líneas ϕ y ψ representan el aspecto del flujo irrotacional, alrededor de una esquina a 90°, descrito en 10.6.2. Si la función w es distinta de $w = z^2$, el resultado en el plano z será diferente del de la Fig. 10.42.

La función $w = f(z)$ se puede considerar como la transformación del plano z al aspecto de flujo uniforme del plano w. Una vez conocida la función de transformación $w = f(z)$, para un problema particular, su parte real $\phi = f_1(x, y)$, igualada con una constante, conduce a la ecuación de las líneas equipotenciales en el plano físico o plano z; su parte imaginaria $\psi = f_2(x, y)$, igualada con una constante, conduce a la ecuación de las líneas de corriente en el plano z. Cada línea tiene su propia constante particular.

La transformación inversa $z = f^{-1}(w)$ se puede considerar como la que transforma el flujo paralelo del plano w al del flujo real sobre el plano z. La consideración de esa forma inversa permite, a menudo, un aspecto visual del plano z que desee obtenerse, mediante el uso de las coordenadas polares. Por ejemplo, dada la función $w = z^2$, el aspecto del plano z se determina por un análisis de la forma inversa $z = w^{\frac{1}{2}}$. Si $z = re^{i\theta}$ y $w = r_1e^{i\theta}$, entonces $re^{i\theta} = r_1^{\frac{1}{2}}\,e^{i(\theta_1/2)}$; igualando módulos y argumentos, se tiene:

$$r = r_1^{\frac{1}{2}},\ \theta = \frac{\theta_1}{2}$$

de tal suerte que esta transformación particular se puede describir físicamente como el resultado de trazar la malla rectangular —de la Fig. 10.41— sobre una hoja de material elástico; además de practicar un corte a lo largo de la parte negativa del eje y, girar los dos lados del corte un ángulo de 90° hasta hacerlos

coincidir con el eje x. La malla, originalmente dibujada, se deforma junto con la hoja y se convierte en una línea cuyo aspecto es el de la Fig. 10.42.

Se demuestra que en la variable compleja w, ϕ y ψ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y, por lo mismo, a la de Laplace. Aquí w se conoce como el potencial complejo y a dw/dz (también compleja) como la velocidad compleja, cuyo valor es:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial}{\partial x}(\phi + i\psi) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = v_x - i\, v_y$$

$$\frac{dw}{dz} = v_x - i\, v_y$$

Esto es, la parte real de la velocidad compleja corresponde a la componente v_x de la velocidad real, y la parte imaginaria a la componente v_y con signo menos de la velocidad real en ese punto. El valor absoluto de la velocidad compleja es $|dw/dz| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ o sea, la magnitud de la velocidad en el punto z; su argumento es $-\alpha$, donde $\alpha =$ áng tan v/u. Por lo tanto:

$$\frac{dw}{dz} = |v| \left[\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha)\right]$$

$$\frac{dw}{dz} = |v|\, e^{-i\alpha}$$

A menudo resulta más conveniente expresar $w = f(z)$ en la forma inversa: $z = f(w)$; un ejemplo es la transformación $z = w + e^w$. Además, la derivada de la función inversa dz/dw juega un papel importante en ciertas transformaciones y se representa por:

$$\zeta = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\dfrac{dw}{dz}} = \frac{e^{i\alpha}}{|v|}$$

ζ es un número complejo con un valor para cada punto en el plano z. Su módulo es $1/|v|$ y su argumento es la dirección α de v, donde v es la velocidad en el punto sobre el plano z.

Para una línea de corriente en el plano z, a lo largo de la cual la velocidad v y la dirección α del flujo son conocidas, es posible —de este modo— calcular $\zeta = dz/dw$ de la ecuación anterior, aun cuando la función $w = f(z)$ sea desconocida. Lo anterior tiene utilidad en la determinación de las líneas de corriente, en fronteras a superficie libre.

En casos complicados, el proceso de transformación de un modelo del plano z al plano w puede llevarse a cabo por etapas. El modelo z cambia mediante uno o más planos intermedios y la relación funcional entre w y z queda representada por la serie de ecuaciones de transformación, usadas. Como un ejemplo simple, considere la función $w = \operatorname{sen} e^z$. Sea $e^z = p$; entonces:

$$z = \ln p$$

$$w = \operatorname{sen} p$$

El plano z puede transformarse al plano intermedio p por el cambio inverso dado por la primera ecuación; el plano p puede hacerse al w por medio de la segunda:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dp}\frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dp}\frac{1}{\dfrac{dz}{dp}} = p \cos p$$

$$\frac{dw}{dz} = v_x - i\, v_y = e^z \cos e^z$$

TABLA 10.4. Ejemplos de funciones de transformación y flujos a que corresponden

	Transformación	*Aspecto del flujo en el plano z*
1.	$w = A z$	Flujo uniforme.
2a.	$w = m \ln(z - a)$	Fuente en $z = a$.
2b.	$w = -(i\,k/2\pi)\ln(z - a)$	Vórtice en $z = a$.
2c.	$w = (m - i\,k/2\pi)\ln(z - a)$	Vórtice espiral en $z = a$.
3.	$w = k/(z - a)$	Doblete en $z = a$.
4.	$w = m \ln[(z + a)/(z - a)]$	Fuente en $(-a, 0)$, sumidero en $(a, 0)$.
5.	$w = A z^n$	Flujo alrededor de una pared que tiene un ángulo $\theta = \pi/n$.
6.	$w = v_0(z + R^2/z)$	Flujo alrededor de un cilindro de radio R.

No obstante que se han investigado muchas funciones analíticas para encontrar sus correspondientes transformaciones, sólo algunas de ellas han mostrado utilidad al adaptarse a problemas de ingeniería. En publicaciones especializadas se presentan a manera de tablas. En la tabla 10.4 se indican algunos ejemplos (referencia 62).

La Ref. 60 presenta otros tipos de transformación.

Un método de análisis semejante se basa en el teorema de Schwarz-Christoffel, a menudo en unión de la transformación conforme. Este teorema proporciona un medio de mapear el interior de un polígono simple, cerrado en el semiplano superior, con la frontera del polígono llegando a ser el eje real (eje x en el plano complejo).

Problema 10.14. Considerando la transformación $w = z^2$ (Figs. 10.41 y 10.42):

a) Determinar los valores de w, ϕ, ψ y dw/dz en el punto (2, 1) del plano z.

b) Analizar los mismos valores en el punto (0, 0) del plano z.

c) Determinar la forma de las curvas, $x =$ constante y $y =$ constante, sobre el plano w.

Solución a). Puesto que $z = x + i\,y = 2 + i$; $w = \phi + i\psi = z^2 = 3 + 4\,i$, resulta $\phi = 3$, $\psi = 4$. Además:

$$\frac{dw}{dz} = 2\,z = 4 + 2\,i$$

Solución b). En el origen del plano z, se tiene:

$$z = x + i\,y = 0$$

$$w = z^2 = 0$$

$$\phi = 0, \psi = 0$$

$$\frac{dw}{dz} = 2\,z = 0$$

Como el punto $z = 0$ es una singularidad donde la función es analítica, no es posible seguir el procedimiento de mapeo. En este punto, las direcciones de las líneas de corriente, en el plano z son dos: $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi/2$; al transformar al plano w, la dirección es $\alpha = 0$.

Solución c). Siendo $w = z^2$, vemos que:

$$\phi + i\psi = (x + i\,y)^2$$

$$\phi = x^2 - y^2; \quad \psi = 2\,x\,y$$

entonces:

$$y = \frac{\psi}{2x}; \quad \phi = x^2 - \left(\frac{\psi}{2x}\right)^2$$

Si x = constante = $1, \phi = 1 - \psi^2/4$ resulta una parábola sobre el plano w. Esto es, las líneas x = constante forman una familia de parábolas y las y = constante forman otra que se interseca —ortogonalmente— con la anterior.

Problema 10.15. Con el modelo $w = 2z^2$, determinar la magnitud y dirección de la velocidad en el punto (3,2).

Solución. La velocidad compleja es:

$$\frac{dw}{dz} = 4z = v_x - i\,v_y$$

$$v_x - i\,v_y = 4\,(3 + 2i) = 12 + 8i$$

Por tanto:

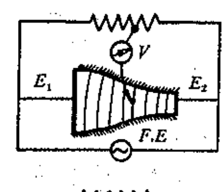
$$v_x = 12, v_y = -8\,; |\,v\,| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 14.42$$

$$\alpha = \text{áng tan}\,\frac{v_y}{v_x} = \text{áng tan}\,(-0.67) =$$

$$= -34^\circ\,54'$$

10.7 Analogías

Frecuentemente se emplea la analogía eléctrica para obtener la solución aproximada de un problema de potencial en el sistema eléctrico análogo. El método se basa en la semejanza de la función potencial ϕ con el potencial eléctrico E (voltaje) que también satisface la ecuación de Laplace; de tal manera que el vector grad E representa la intensidad eléctrica del campo y es proporcional al campo de velocidades de un flujo con potencial.



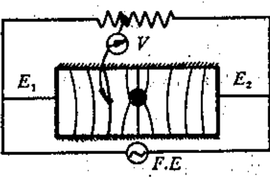


Figura 10.43. Analogía eléctrica ϕ-E para flujos bidimensionales.

Puede usarse un conductor seco. Consiste en una hoja de papel cubierta superficialmente con una capa delgada uniforme, conductora de electricidad, por ejemplo, carbón. Este tipo de papel se conoce comercialmente con el nombre de papel teledeltos. La geometría de las fronteras del flujo se recorta dentro de este papel —a una determinada escala— y se hace pasar la corriente eléctrica desde los electrodos a través de la zona en la que se produce el flujo, con una diferencia conocida de potencial eléctrico entre ambos. Con un tercer electrodo móvil se mide el voltaje en diferentes puntos de la zona de flujo, para conocer aquéllos en los que se tenga el mismo potencial eléctrico;

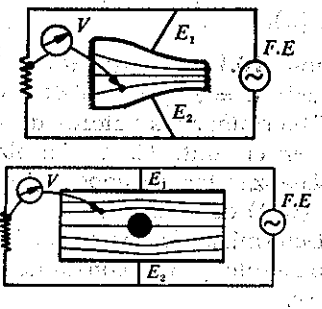


Figura 10.44. Analogía eléctrica ψ-E para flujos bidimensionales.

igual analogía se puede suponer para la función de corriente ψ. En las Figs. 10.43 y 10.44 se presentan ejemplos.

También se puede usar un conductor húmedo, de poco espesor, dentro de un tanque electrolítico; el conductor puede ser una solución de agua salina.

Existen otras analogías como la de la membrana y la del túnel Hele-Schaw (referencia 60).

PROBLEMAS

1. Calcular la velocidad de las siguientes funciones bidimensionales:

   a) $\phi = -2\ln(x^2 + y^2)$;
   b) $\phi = Ux + Vy$;
   c) $\phi = 2xy$;

   así como la divergencia y rotacional de dichas funciones.

2. ¿Cuáles de las siguientes funciones escalares podrían representar el potencial de velocidades de un flujo ideal?

   a) $f = x - 3y$;
   b) $f = x^2 + y^2$;
   c) $f = x^2 - y^2$;
   d) $f = \text{sen}\,(x + y)$;
   e) $f = \text{sen}\,(x - y)$;
   f) $f = \ln\,(x + y)$;
   g) $f = \ln\,(x - y)$;
   h) $f = \text{áng tan}\,(y/x)$

3. Un potencial de velocidades en flujo bidimensional es $\phi = y + x^2 - y^2$. Determinar la función de corriente para este flujo.

4. Dada $\psi = 3x - 5y$.

   a) ¿Representa un flujo con potencial?
   b) Si la respuesta anterior es afirmativa, ¿cuál es dicho potencial?

5. La función de corriente bidimensional para un flujo es: $\psi = 9 + 6x - 4y + 7xy$. Determinar el potencial de velocidades.

6. Dado el potencial: $\phi = y^3/3 - x^2 y$,

   a) determinar el vector velocidad que describe al flujo;
   b) demostrar que el flujo es irrotacional;
   c) ¿cuál es la función de corriente?;
   d) dibujar las líneas equipotenciales y de corriente sobre el semiplano derecho ($x \geqq 0$), para $\phi = \psi = 0, \pm 5, \pm 10$, a una escala de un cm = 1 unidad.

7. Verificar la validez de las Ecs. (10.11).

8. Deducir la ecuación de Laplace, a partir de la ecuación de continuidad en coordenadas polares, en el mismo sistema de coordenadas.

9. La expresión general —en coordenadas polares— para el potencial del flujo bidimensional, alrededor de una esquina de ángulo α, se puede escribir en la forma:

   $$\phi = r^{\pi/\alpha} \cos\,(\pi\theta/\alpha).$$

   a) Determinar la función de corriente para este flujo.
   b) Demostrar que para $\alpha = \pi$, el flujo se puede representar por $\mathbf{v} = \mathbf{i}$.
   c) Para $\alpha = \pi/2$, demostrar que el flujo es el del problema 10.3.

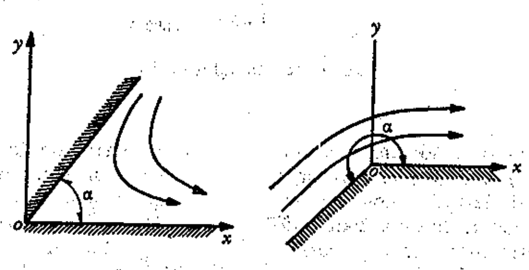


Figura del problema 9.

d) Determinar la magnitud de la velocidad en la esquina, para $0 < \alpha < \pi$ o para $\pi < \alpha < 2\pi$.

e) Dibujar las líneas de corriente y equipotenciales para $\psi = 0$, 2, 4 y 6 y $\phi = 0$, ± 2, ± 4, ± 6; con $\alpha = 3\pi/2$ y a una escala de 1 cm = 4 unidades. Se sugieren coordenadas polares.

10. *a)* ¿Satisface la función $f = 1/r$ la ecuación de Laplace, en dos dimensiones?
b) ¿La satisface en flujo tridimensional?
c) Determinar la función de corriente para la función indicada.

11. El potencial de velocidades, para un flujo permanente incompresible, está dado por $\phi = (-a/2)\,(x^2 + 2y - z^2)$, donde a es una constante arbitraria mayor que cero.

a) Encontrar la ecuación para el vector velocidad.
b) Determinar la ecuación para las líneas de corriente sobre el plano x-z ($y = 0$). Demostrar que se satisface la ecuación de continuidad correspondiente.

12. Demostrar que el rotacional para un flujo bidimensional es igual a: $\partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2$.

13. *a)* Dibujar una red de flujo para la curva de la Fig. 10.2 y, a partir de ella, determinar la distribución de velocidades y de presiones sobre la sección $0 - A$.
b) Considerando que el fluido es agua y que $v_0 = 1.5$ m/seg, determinar la diferencia de presiones entre las superficies interior y exterior de la curva; y comparar el resultado con el obtenido del problema 10.1.

14. La presión es constante e igual a la atmosférica, a lo largo de las líneas de corriente —superior e inferior— para el flujo delante de la placa vertedora de la Fig. 10.12; también lo es a lo largo de la línea de corriente superior para el chorro descargado por la compuerta deslizante de la Fig. 6.13. Explicar por qué el espaciamiento entre líneas equipotenciales varía a lo largo de estas líneas de corriente.

15. En la figura se muestra la mitad de un chiflón bidimensional, simétrico respecto del eje horizontal, en el que se han dibujado las líneas de corriente.

a) Dibujar las líneas equipotenciales.
b) Reproducir las curvas de v/v_0 y de C_p, semejantes a las de la Fig. 10.9, referidas a este problema.
c) Indicar la posibilidad de separación.

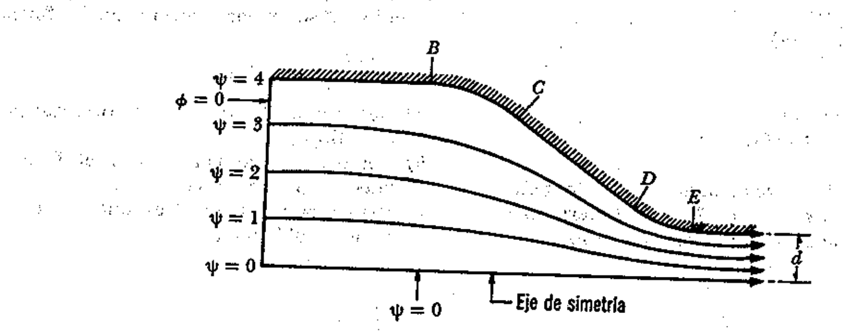


Figura del problema 15.

16. La figura muestra la situación de la superficie libre, de la lámina que vierte sobre una placa de pared delgada. Los perfiles superior e inferior de la lámina han sido determinados experimentalmente y corresponden a una carga de h = 1m.

a) A partir de los datos del perfil y con base en el método de Prasil, calcular el gasto q por unidad de ancho de cresta. Considerar para ello que $y_C = 2$ m y $y_D = 1.82$ m.
b) Trazar la red de flujo mediante el método de Prasil, considerando que haya cuatro tubos de flujos.
c) Determinar la distribución de velocidades sobre la sección vertical *A-B*, desde $y_B = 0.205$ m, hasta $y_A = 0.855$ m.
d) Calcular, también, la distribución de presiones sobre la misma sección y el coeficiente μ del vertedor, tal como se indica en la Fig. 7.2:

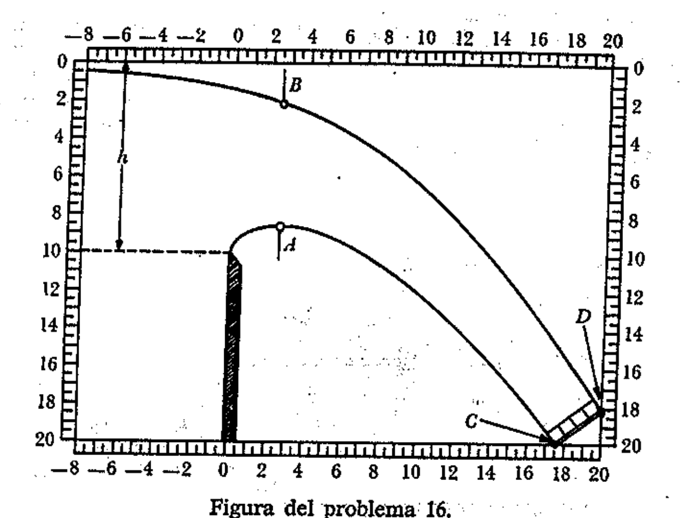


Figura del problema 16.

17. La Fig. 6.13 muestra la red de flujo para la descarga de una compuerta deslizante. De acuerdo con la relación y_1/a, verificar la distribución de presiones, sobre la compuerta y sobre el fondo, que se indican en dicha figura; expresarlas en función del coeficiente de presión.

18. La figura muestra la red de flujo debajo

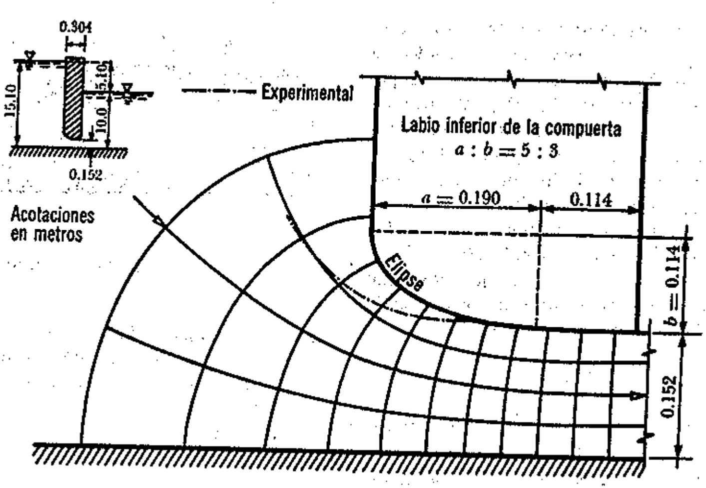


Figura del problema 18.

de la compuerta cuyas dimensiones se indican. La línea curva muestra la distribución de presiones que ha resultado experimentalmente. A partir de la red de flujo obtener la misma distribución de presiones y comparar con la distribución experimental indicada. Señalar si es conveniente corregir el diseño del perfil del labio inferior de la compuerta y diga la solución que propondría.

19. De acuerdo con los resultados del problema 10.7, determinar el gasto unitario de infiltración y la distribución de presiones, a lo largo de la base de cimentación de la pantalla. Considerar que el coeficiente de permeabilidad del suelo es de $k = 1.5 \times 10^{-6}$ cm/seg.

20. Dibujar la red de flujo de infiltración alrededor de la tablestaca mostrada. Usar una escala de 1 cm = 2.5 m y cuatro tubos de flujo en la red. Calcular el gasto de infiltración por unidad de ancho.

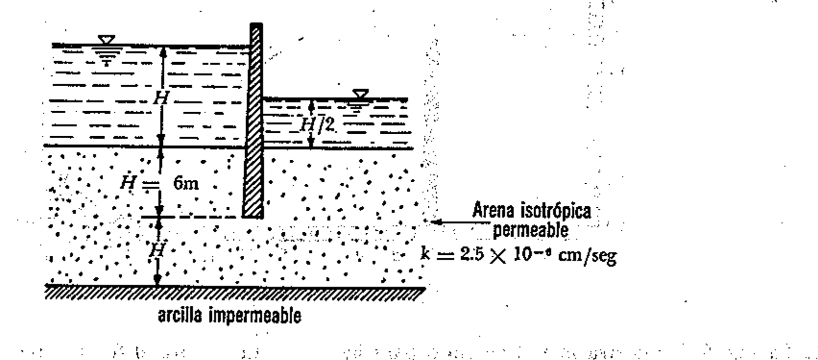


Figura del problema 20.

21. La solución de problemas de flujo en acuíferos no confinados, como el mostrado en la figura, usualmente involucra dos hipótesis debidas a Dupuit: 1) El gradiente de las cargas piezométricas es constante sobre cualquier sección vertical e igual a $\partial(p/\gamma + z)/\partial x$ sobre la superficie libre. 2) La velocidad es horizontal y uniforme desde la línea superior hasta el fondo de cualquier sección vertical e igual a $-k[\partial(p/\gamma+z)/\partial x]$. Para el flujo a través del dique mostrado en la figura, demostrar que la forma de la superficie libre está dada por:

$$2q_0x/k = (p/\gamma + z)^2 - (p/\gamma + z_0)^2$$

donde q_0 es el gasto por unidad de ancho del dique. Determinar q_0 en función de L y de las cargas en las dos fronteras del dique.

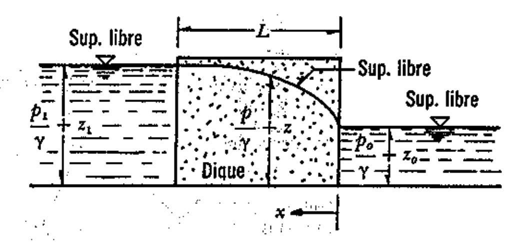


Figura del problema 21.

22. Determinar y dibujar, sobre la Fig. 10.20 del problema 10.6, las componentes de la velocidad como funciones de y, para $x = 4.5\,h$ y para $x = 5.5\,h$ (h es el intervalo de la red elegida).

23. Para el chiflón elíptico bidimensional mostrado, determinar la velocidad y distribución de presiones a lo largo del mismo: *a)* Siguiendo el método de relajaciones; *b)* resolviendo por medio de una computadora. Tomar incrementos de por lo menos $d/10$.

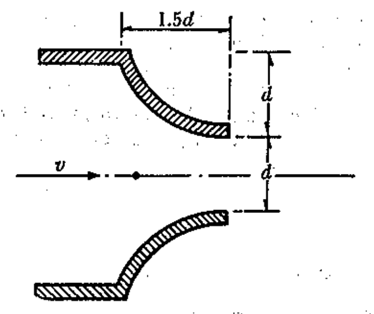


Figura del problema 23.

24. Elegir cualquiera de las redes de flujo de los problemas anteriores y verificarla por el método del elemento finito.

25. Demostrar que la circulación, alrededor de un doblete, es cero.

26. Verificar que las funciones potenciales para la fuente, sumidero, vórtice irrotacional y doblete, son armónicas.

27. Una fuente de intensidad 4π se localiza en el punto (4, 0) y otra de intensidad 6π en (0, 0).

a) Localizar el punto de estancamiento.
b) Determinar el vector velocidad en (0, 8).

28. Dos fuentes bidimensionales —de intensidades diferentes q y $3q$— están localizadas sobre el eje x a una distancia a.

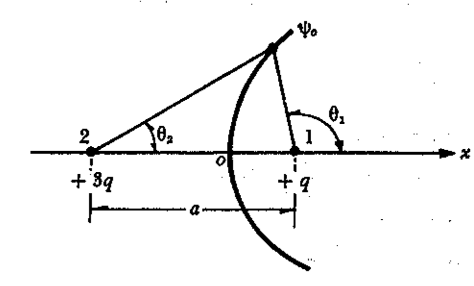


Figura del problema 28.

a) Determinar las funciones potencial y de corriente del flujo superpuesto.
b) Determinar la línea de corriente ψ_0 que separa y limita las masas de fluido, provenientes de ambas fuentes.

29. Un sumidero bidimensional se encuentra representado en la figura, por un punto separado —la distancia a— desde una pared de longitud infinita. La intensidad del sumidero es $-m$. Determinar las líneas de corriente resultantes del flujo y la distribución de presiones sobre la pared, considerando que a una distancia grande, $p = p_0$.

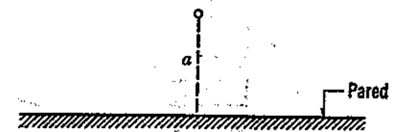


Figura del problema 29.

30. Determinar el aspecto de las líneas de corriente, de un flujo bidimensional paralelo al eje x con velocidad constante $+v_0$, y una fuente bidimensional de intensidad $+q$ colocada en el origen del sistema coordenado.

a) Determinar la ecuación de la línea de corriente cero y dibujar la misma, de modo que el flujo de fuente quede contenido hacia el interior de dicha línea.
b) Determinar el lugar de todos los puntos cuyas componentes de velocidad, en la dirección y, tienen el valor constante k.
c) Demostrar que el punto de estancamiento está en $x = -q/2\pi v_0$.

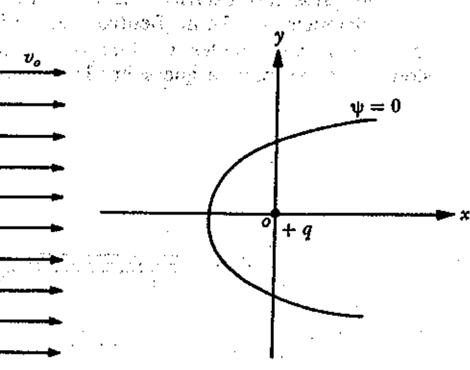


Figura del problema 30.

d) Demostrar que el ancho del semicuerpo —formado por la línea $\psi = 0$, para $x = +\infty$, es q/v_0.

31. Dentro de un flujo uniforme de velocidad $+v_0$, paralelo al eje x, una fuente y un pozo están localizados sobre dicho eje. Son simétricos respecto del origen y de igual intensidad.

a) Demostrar que la línea que delimita el flujo, de fuente a pozo, forma con el flujo paralelo una curva cerrada y ovalada cuyos semiejes b y c dependen del parámetro $v_0 a/q$. La superficie encerrada por dicha curva forma el óvalo llamado de Rankine.

b) Determinar la magnitud de la velocidad, del flujo resultante, en los puntos extremos A y B del óvalo.

c) Si $q = 1.85$ m³/seg/m y $a = 6$ m, determinar b y c, así como la diferencia de presiones entre la del flujo uniforme y el punto (0, 1.5 m) para agua como fluido.

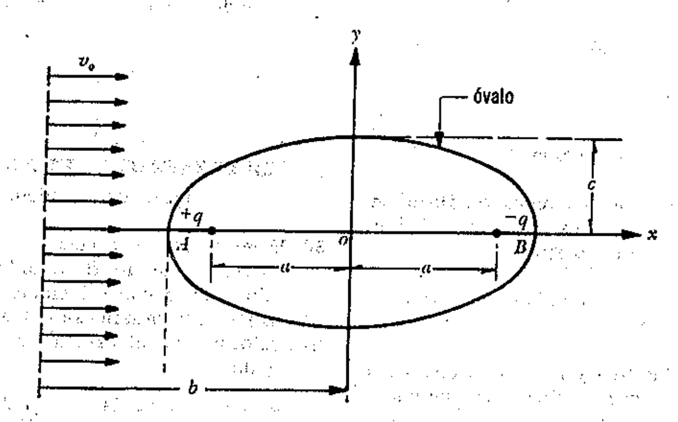


Figura del problema 31.

32. Sobre el centro del óvalo, mostrado en la figura de semieje $b = 3$ cm, $c = b/5$, se ha montado rígidamente un tubo de Prandtl, en el cual las perforaciones para la medición de presiones estáticas se encuentran a la distancia $l = 7$ cm. Dentro del flujo paralelo de velocidades v_0 domina la presión p_0, de tal manera que sobre la perforación al frente del tubo actúa una presión total $p_t = p_0 + \rho v_0^2/2$.

a) Determinar la presión p que se registrará sobre las perforaciones de medición estática mostradas.

b) Demostrar que:

$$v_0 \approx 1.0308\sqrt{2(p_t - p)/\rho}$$

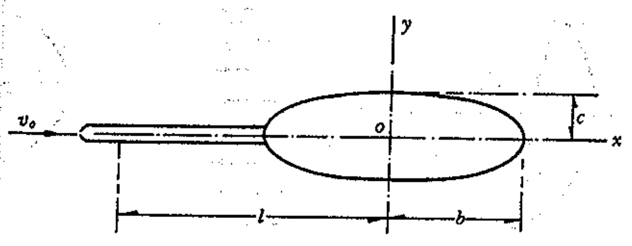


Figura del problema 32.

33. *a)* Demostrar que la fuerza resultante, del empuje de un flujo uniforme sobre un cilindro (Fig. 10.40), vale cero y que la fuerza sobre ambas mitades (la frontal y la trasera) es igual a $2R\,p_0 - (\rho R\,v_0^2/3)$ por unidad de longitud del cilindro.

b) ¿Para qué valor de θ la presión sobre la superficie del cilindro es igual a p_0?

c) ¿Cuál es la función de corriente para un cilindro de radio $R = 0.15$ m y $v_0 =$ = 2.5 m/seg?

34. Determinar la función de corriente compleja $w(z)$, de un flujo como el de la Fig. 10.29.

35. El flujo de una fuente de vórtices tiene el potencial complejo $w(z) = a(1 + i)\ln z$. Determinar las líneas de corriente y equipotenciales de dicho flujo y demostrar que a proporciona la velocidad del flujo para $|z| = \sqrt{2}$.

36. El potencial complejo de un flujo $w(z)$, en el plano, satisface la ecuación:

$$z = x + iy = a(e^{cw} + e^{-cw})$$

donde a y c son valores constantes reales y e la base de los logaritmos naturales. Determinar las líneas de corriente y equipotenciales de dicho flujo, así como la velocidad de los puntos $z = \pm a$.

37. Mediante la función de transformación conforme $w =$ áng cos z/l, se puede describir el flujo de infiltración alrededor de una tablestaca como la mostrada, hincada hasta la profundidad l. Los niveles del agua, por arriba del manto permeable, tienen una diferencia $h_0 - h_u$.

a) Definir las condiciones de frontera por satisfacer en este flujo plano de infiltración;

b) determinar la forma de las líneas de corriente y de las equipotenciales;

c) determinar la variación de la velocidad, a lo largo de la frontera superior horizontal de la capa permeable, y a lo largo de la tablestaca.

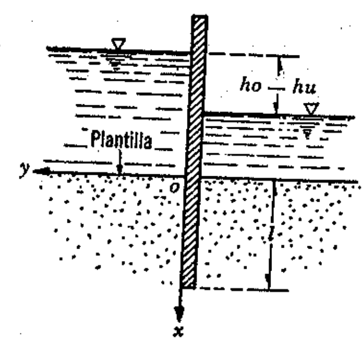


Figura del problema 37.

38. Un flujo se produce dentro del subsuelo sobre el manto impermeable, cuya forma se muestra en la figura.

a) Demostrar que la función compleja de transformación: $w(z) = \sqrt{z}$ (donde $z = x + iy$) describe un flujo sobre la capa permeable de arena que se muestra.

b) Si las alturas y_1, y_2 de la frontera superior del flujo (separados la distancia l entre las secciones verticales A y B) deben determinarse a partir de mediciones, mostrar un esquema del flujo y encontrar una expresión del gasto.

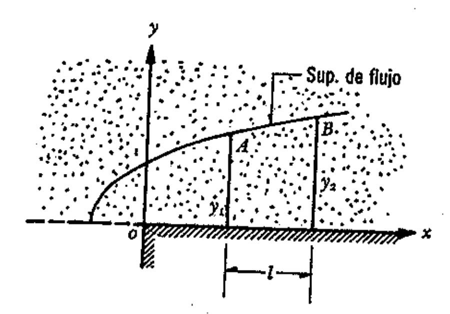


Figura del problema 38.

39. Un flujo se produce dentro de una capa de arena que descansa sobre un manto impermeable horizontal, como se muestra en la figura; y a partir del nivel horizontal de la capa impermeable existe una zona de filtros. A la distancia l del recipiente se encuentra dicha zona de filtros.

a) ¿Qué relación existe entre el gasto de infiltración q cuando, para un valor de $H = 2$ m, la longitud l adopta los valores: 10 m, 20 m, 30 m?

b) ¿Cómo se relacionan estos tres valores con las distancias o-s uno con otro? Para resolver este problema, utilizar los resultados del anterior.

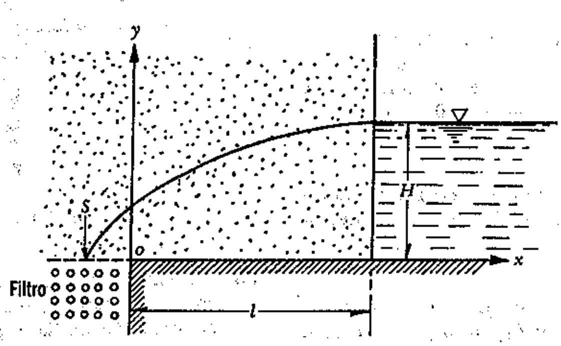


Figura del problema 39.

11

EMPUJE DINAMICO DE UN FLUJO SOBRE UN CUERPO

11.1 Aspectos generales

En el capítulo 8 se presentó el análisis experimental del problema de la resistencia que se desarrolla sobre la superficie de frontera sólida de un flujo, por el efecto de la viscosidad del fluido y de la rugosidad de la pared. En el caso de fluidos de viscosidad relativamente pequeña, el efecto de fricción interna es apreciable —únicamente— en una pequeña región próxima a la frontera sólida del flujo; ésta recibe el nombre de *capa límite*. Si se trata de una frontera curva o con cambios bruscos de dirección, se presenta el fenómeno de separación de la capa límite que origina la formación de vórtices y de fuertes turbulencias, los cuales impiden el tratamiento con base en las ecuaciones del flujo con potencial.

Sin embargo, hay en ingeniería problemas de gran importancia relacionados con el flujo en torno de cuerpos con fronteras curvas o agudas, en las que ocurren evidentemente fenómenos de separación con todas sus consecuencias. Es el caso del empuje del viento sobre estructuras de diferentes formas, tales como construcciones urbanas, chimeneas, antenas, torres, cables para energía eléctrica, puentes, etc., en las que es necesario conocer las solicitaciones que induce el viento, ya que son de gran interés para el análisis estructural de aquéllas. Cuando se trata del flujo de agua, también resultan de interés los efectos sobre rejillas, pilas de puente, obturadores, etc. Los conceptos básicos que aquí se presentan son también de mucha importancia en la explicación de la mecánica del arrastre de cuerpos sólidos, en suspensión dentro de un flujo, como es el caso del sedimento en los ríos.

En cualquiera de estos casos, el procedimiento en base a la teoría de los flujos con potencial, no es posible debido a la presencia de fenómenos de tipo viscoso que impiden soluciones correctas. Basta mencionar que en el caso del flujo con potencial, en torno a un cuerpo simétrico como un cilindro, los resultados de esa teoría indican la completa ausencia de empujes dinámicos, lo cual —evidentemente— es falso.

Es aquí donde la investigación experimental ofrece una técnica poderosa en la respuesta y donde los resultados obtenidos con un modelo reducido pueden ser confiables, siempre que en la reproducción del fenómeno se incluyan los factores más importantes. Dicho estudio puede efectuarse

en un túnel con agua pero, principalmente, en un túnel de viento, el instrumento de investigación más avanzado en este tipo de problemas.

Siendo tan variada la geometría de los cuerpos expuestos a un flujo, la investigación debe efectuarse prácticamente para cada caso en particular. En este capítulo se presentan los conceptos básicos y los resultados para algunos casos sencillos, que pueden ser de utilidad en muchos problemas.

11.2 Conceptos fundamentales

Un concepto intuitivo —fácil de comprender— es el de resistencia o arrastre que un fluido en movimiento ejerce sobre un cuerpo sumergido en aquél. Esta acción consiste en una fuerza dinámica causada por dos factores: uno es que el esfuerzo cortante que produce fuerzas tangenciales sobre la superficie del cuerpo, en razón de la viscosidad y del gradiente transversal de velocidades dentro de la capa límite; otro, que las intensidades de presión, al variar sobre la superficie del cuerpo por efectos dinámicos o de turbulencia, producen fuerzas normales a la frontera. Es posible que se produzcan ondas sobre la superficie de un líquido como resultado del movimiento de un cuerpo (un barco, bote, etc.); la resistencia debida a estas ondas se conoce como arrastre por onda, siendo disipada cierta energía para generar dichas ondas y que es abastecida por el sistema de propulsión del barco.

La suma vectorial de las fuerzas de superficie normales y tangenciales integradas sobre el total de la frontera del cuerpo, conduce a una fuerza resultante, como se ilustra en la Fig. 11.1. La componente de esta fuerza en la dirección de la velocidad general del flujo, recibe el nombre de arrastre; la componente normal se llama sustentación.

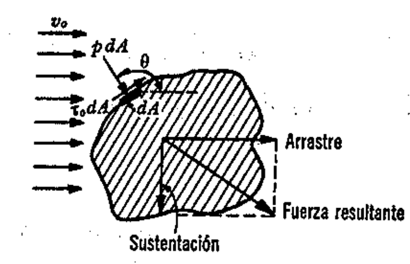


Figura 11.1. Fuerzas inducidas por el flujo.

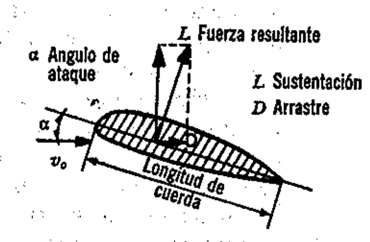


Figura 11.2. Arrastre y sustentación de un perfil aerodinámico.

Tanto el arrastre como la sustentación comprenden, a su vez, componentes producto de la fricción y presión sobre el cuerpo, de modo que el arrastre total es:

$$D = D_f + D_p \qquad (11.1)$$

siendo las componentes:

arrastre por fricción,

$$D_f = \int_A \tau_0 \operatorname{sen} \theta \, dA \qquad (11.2)$$

arrastre por presión,

$$D_p = -\int_A p \cos \theta \, dA \qquad (11.3)$$

donde A es el área total de la superficie de frontera del cuerpo y θ el ángulo entre la normal al elemento de área sobre la superficie y la dirección del flujo.

El arrastre por presión —que depende principalmente de la forma del cuerpo— se conoce también como arrastre de forma; el arrastre de fricción, llamado también de superficie, se debe a la componente del esfuerzo tangencial friccionante sobre la frontera. Algunos cuerpos, como las alas de un avión, los perfiles hidrodinámicos y barcos, tienen grandes arrastres de superficie, que en ocasiones son predominantes. Los edificios, puentes, chimeneas y estructuras, sujetos al empuje de viento, tienen arrastres de forma, grandes, en comparación con las resistencias de superficie.

Las fuerzas de arrastre por fricción y presión se definen en términos de los coeficientes de arrastre como:

$$D_f = C_f \rho \frac{v_0^2}{2} A_f \qquad (11.4)$$

$$D_p = C_{D_p} \rho \frac{v_0^2}{2} A_p \qquad (11.5)$$

donde A_f y A_p son áreas de referencia adecuadamente elegidas. Para la resistencia de superficie, A_f es por lo general el área real sobre la que actúan los esfuerzos tangenciales que producen a D_f. Para el arrastre de forma, A_p es usualmente el área transversal normal a la velocidad v_0.

Los coeficientes de arrastre C_f y C_{D_p} no tienen dimensiones y se pueden determinar de las Ecs. (11.4) y (11.5), utilizando valores teóricos o experimentales de las variables que en ellas intervienen. Esto también es posible a partir de las ecuaciones (11.2) y (11.3).

El arrastre total D generalmente se define por la relación:

$$D = C_D \rho \frac{v_0^2}{2} A \qquad (11.6)$$

en la que C_D es el coeficiente de arrastre total que reúne a las componentes del sistema de fuerzas, en la dirección del arrastre; vale:

$$C_D = C_{D_f} + C_{D_p} \qquad (11.7)$$

Además, A es el área transversal normal a v_0, de suerte que siendo $A = A_p$, el coeficiente:

$$C_{D_f} = C_f \left(\frac{A_f}{A_p} \right) \qquad (11.8)$$

y C_{D_p} es la misma en las Ecs. (11.5) y (11.7).

Asimismo, ρ es la densidad del fluido en el que el cuerpo se encuentra sumergido, aunque sea otro fluido (burbujas de líquido o gas); la velocidad v_0 corresponde a la del flujo sin disturbios antes del cuerpo. Para un cuerpo estacionario en un campo de flujo permanente, v_0 es la velocidad de llegada —medida en un punto antes del cuerpo— tal que las características del flujo no sean afectadas por la presencia del mismo. Si el cuerpo se mueve dentro de un fluido en reposo, el campo de flujo equivalente se puede obtener por la superposición de una velocidad uniforme v_0 igual y opuesta a la del cuerpo en movimiento.

Para la fuerza de sustentación no es costumbre separar las componentes de fricción y de presión. En cuerpos aerodinámicos como el de la Fig. 11.2, diseñados para producir sustentación, la fuerza de ésta es resultado de un efecto de componente de presión. Cabe aclarar que dentro de las fuerzas de sustentación no se incluye la fuerza hidrostática de flotación que actúa sobre cualquier cuerpo sumergido en un líquido.

La fuerza de sustentación se evalúa análogamente como sigue:

$$L = C_L \rho \frac{v_0^2}{2} A \qquad (11.9)$$

donde el área característica A puede ser la máxima que proyecte el cuerpo o, lo que es común, el área proyectada normal a v_0.

Del análisis dimensional (Apéndice A) se deduce que los coeficientes de arrastre total y de sustentación, no tienen dimensiones, sino que presentan una forma parecida a la del coeficiente de presión, definido por la Ec. (5.22a). De los conceptos de números hidrodinámicos, del subcapítulo 5.3, es de esperarse que los coeficientes de arrastre y sustentación dependan de la geometría del cuerpo y de los parámetros sin dimensiones que describen el comportamiento dinámico del fluido en movimiento permanente; esto es, de los números de Reynolds (Re), de Froude (Fr) y de Euler (Eu), esto es:

$$C_D = C_D\,(\text{geometría}, Re, Fr, Eu)$$

$$C_L = C_L\,(\text{geometría}, Re, Fr, Eu)$$

La geometría se refiere no únicamente a la naturaleza geométrica y rugosidad superficial del cuerpo, sino también a las distancias que guarda respecto de otros cuerpos o de las fronteras del fluido. Se pueden citar dos ejemplos: *a)* el coeficiente de arrastre de una esfera que cae dentro de un tubo —lleno de líquido— será diferente que si ésta cae en el mismo líquido de extensión infinita; *b)* en el caso de un cuerpo parcialmente sumergido en un líquido, como la pila de un puente, se producen cambios en la superficie libre (formación de ondas) que impiden encontrar relaciones definidas entre el coeficiente de arrastre y la geometría del cuerpo.

Dichas relaciones se pueden simplificar de acuerdo con la importancia de las fuerzas consideradas en cada parámetro y difícilmente se presenta el caso en el que sean más de dos los parámetros importantes en el fenómeno. El más común se encuentra en el arrastre de cuerpos sumergidos en fluidos que se comportan como incompresibles, en el que las fuerzas viscosas sean las más importantes; esto es, el número de Reynolds y la geometría.

El punto de aplicación de las fuerzas de arrastre y sustentación corresponde al centro de gravedad, del área expuesta, en el caso de cuerpos simétricos. En otros cuerpos, este punto se determina a partir de la distribución de las presiones alrededor de los mismos, la cual también se puede representar a través del coeficiente de presión C_p en cada punto (Ec. 5.22a).

En el laboratorio, un túnel con agua o uno de viento facilita la medición del coeficiente de arrastre, mediante balanzas de resortes u otros dispositivos que se conectan directamente al cuerpo dentro del flujo; o bien, en forma indirecta determinando la distribución de velocidades, antes y después del cuerpo, como en el problema 4.22.

El arrastre por presión se puede obtener midiendo las presiones alrededor de la superficie de un cuerpo sumergido en una corriente uniforme, de aire o de agua, de velocidades conocidas. La integración de estas presiones —en toda la superficie— conduce a obtener el arrastre por presión. La diferencia entre el arrastre total medido con la balanza y el arrastre por presión, es igual al de fricción.

Problema 11.1. Dentro de un río y por encima del fondo del mismo se encuentra una tubería larga y cilíndrica de 0.152 m de diámetro. Para encontrar la distribución de presiones se efectuaron pruebas en un túnel de viento con un modelo de 0.152 m de diámetro. Cuando la velocidad del viento fue de 15.25 m/seg las presiones registradas en tomas piezométricas, colocadas en la periferia del cilindro (figura 11.3), fueron:

Angulo θ, en grados	*Presión, en kg/m²*
0	44.9
30	37.2
60	33.6
90	30.8
120	14.05
150	13.35
180	12.65
210	11.2
240	9.18
270	7.01
300	7.01
330	28.1

Se supone que la densidad del aire en el túnel de viento es $\rho = 0.125$ kg seg²/m⁴, para 15°C; se desprecia el arrastre por fricción. Determinar el coeficiente de arrastre total (Ref. 63). Calcular a qué velocidad v_0 del agua en el río corresponderían estas condiciones y la magnitud de las fuerzas de arrastre y sustentación reales, sobre la tubería en el río.

Solución. En la Fig. 11.3 se han trazado a escala las presiones radiales medidas alrededor de la periferia del cilindro, así como la línea envolvente que indica la variación de las mismas. De acuerdo con la Ec. (11.3), el arrastre de forma se puede obtener por un procedimiento gráfico como se indica en la figura mencionada, de tal modo que la línea base para la determinación del área, sea el arco AB.

El área sombreada ACB menos la zona ADB representan, a escala, el arrastre de forma; o sea, $D = 2.93$ kg/m, cuyo coeficiente está dado por:

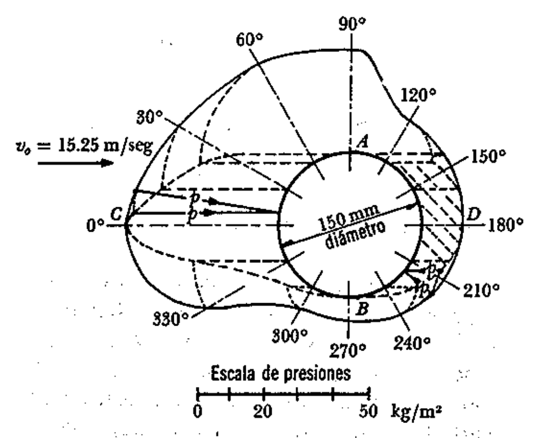


Figura 11.3. Distribución de presiones sobre el cilindro del problema 11.1.

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho\, v_0^2 A} =$$

$$= \frac{2.93}{0.5 \times 0.125 \times 15.25^2 \times 0.1525} = 1.32$$

Incidentalmente, la resultante de las componentes verticales de presión representa la sustentación sobre el cuerpo, la cual tiene un valor de -2.3 kg/m.

Las consideraciones impuestas en las pruebas serán semejantes a las del río, cuando los números de Reynolds en ambos sean los mismos. Suponiendo que la temperatura en agua y aire fuese la misma, la viscosidad del aire será $\nu = 16 \times 10^{-6}$ m²/seg y, para el agua, $\rho = 101.86$ kg seg²/m⁴, siendo $\nu = 1.15 \times 10^{-6}$ m²/seg. Por tanto, al igualar el número de Reynolds, tenemos:

$$\frac{15.25 \times 0.152 \times 10^6}{16} =$$

$$= \frac{v_0 \times 0.152 \times 10^6}{1.15}$$

de donde, $v_0 = 1.092$ m/seg.

El coeficiente de arrastre $C_D = 1.32$ será

el mismo para la tubería en agua; por tanto, la fuerza de arrastre para este último caso será:

$$D = \frac{1}{2} \times 101.86\,(1.095)^2 \times 0.152 \times 1.32 =$$
$$= 12.1 \text{ kg/m}$$

11.3 Arrastre por fricción

La resistencia por fricción pura sobre la pared de un conducto fue discutida en el capítulo 8 y se debe a la acción del esfuerzo cortante sobre la superficie de frontera del cuerpo. La distribución de velocidades dentro de la capa límite, generada sobre una placa plana cuya orientación es en la dirección del flujo, se presenta en la Fig. B.3. El arrastre debido al esfuerzo cortante —puramente viscoso— sobre dicha placa se puede calcular a partir de la Ec. (11.4) para la cual es necesario conocer el coeficiente de arrastre por fricción C_f. Dicho coeficiente depende de que la capa límite sea laminar o turbulenta.

Si la capa límite es laminar, C_f depende del número de Reynolds del flujo, basado sobre la velocidad del flujo libre v_0 y de la longitud x de la placa. Si la capa límite es turbulenta, C_f depende del número de Reynolds del flujo, de la rugosidad de la placa y de la localización de la transición de capa límite laminar a turbulenta, la cual a su vez depende de la rugosidad de la placa y del grado de turbulencia del flujo libre.

Las curvas experimentales del coeficiente de arrastre por fricción, en función del número de Reynolds para superficies planas lisas, se presentan en la Fig. 11.4; ésta incluye una curva aproximada para superficies rugosas, típicas del casco de un barco, con la cual se pueden aproximar resultados para el arrastre por fricción sobre la superficie de barcos, submarinos, aviones, etcétera.

Para la zona laminar, el coeficiente C_f se puede calcular de la ecuación de Blasius, esto es:

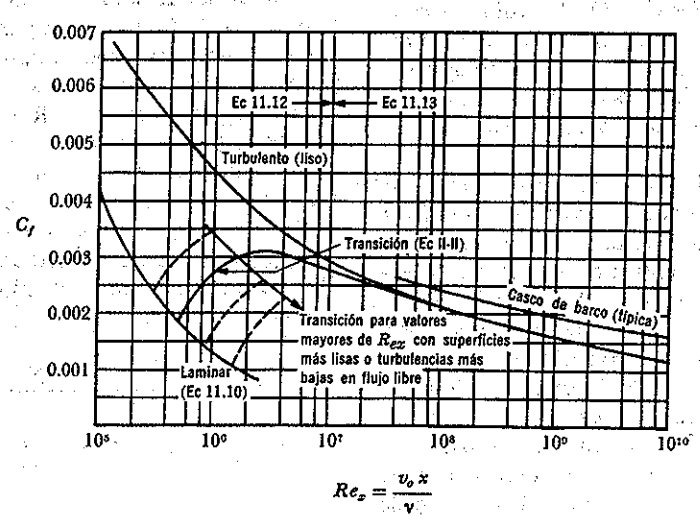


Figura 11.4. Coeficiente de arrastre por fricción para superficies planas lisas, paralelas al flujo. (Mediciones de Wieselsberger, Gerber, Froude, Kempf y Schoenherr.)

$$C_f = \frac{1.328}{Re_x^{1/2}} \qquad (11.10)$$

Para la zona de transición vale la ecuación de Prandtl-Schlichting, para una placa plana lisa:

$$C_f = \frac{0.455}{(\log Re_x)^{2.58}} - \frac{A}{Re_x} \qquad (11.11)$$

donde A depende del valor crítico del número de Reynolds ($v_0 x_c/\nu$) (para el cual la capa límite se torna turbulenta) como sigue:

$v_0 x_c/\nu$	10^5	5×10^5	10^6
A	360	1 200	3 300

Para la zona turbulenta y valores dentro del rango $5 \times 10^5 < v_0 x/\nu < 10^7$, vale la ecuación de Blasius:

$$C_f = \frac{0.072}{Re_x^{1/5}} \qquad (11.12)$$

y para $10^6 < Re < 10^9$, la ecuación de Prandtl:

$$C_f = \frac{0.455}{(\log Re_x)^{2.58}} \qquad (11.13)$$

Problema 11.2. Determinar la fuerza de arrastre por fricción producida por el viento, a una velocidad en flujo libre $v_0 = 46$ m/seg, sobre una superficie lisa del terreno de 6.00 m de ancho y 3 m de longitud, con las siguientes consideraciones: *a)* la capa límite permanece laminar sobre toda la superficie; *b)* la transición ocurre para $Re_{x\,crít} = 5 \times 10^5$; *c)* la capa límite es turbulenta sobre la totalidad de la superficie. Suponga para el aire una temperatura de 2°C.

Solución a). Para el aire a 2°C, $\rho = 0.131$ kg-seg²/m⁴ y $\nu = 0.147 \times 10^{-4}$ m²/seg. El número de Reynolds es:

$$Re_x = \frac{46 \times 3 \times 10^4}{0.147} = 9.39 \times 10^6$$

Para la capa límite laminar, de la ecuación (11.10) o de la Fig. 11.4, $C_f = 0.000434$. De la Ec. (11.4) el arrastre por fricción es:

$$D_f = 0.000434 \times 0.131\,\frac{(46)^2}{2} \times 6 \times 3 =$$
$$= 1.08 \text{ kg}$$

Solución b). Si la transición ocurre para $(Re_x)_{crít} = 5 \times 10^5$, el coeficiente de arrastre por fricción se obtiene de la Ec. (11.11) o de la Fig. 11.4; vale $C_f = 0.0028$. La fuerza de arrastre total de la Ec. (11.4) se obtiene del resultado anterior, es decir:

$$D_f = \frac{0.0028}{0.000434} \times 1.08 = 6.97 \text{ kg}$$

Solución c). Para $Re_x = 9.39 \times 10^6$ de la Fig. 11.4 o de la Ec. (11.12) se obtiene: $C_f = 0.003$ y la fuerza de arrastre vale:

$$D_f = \frac{0.003}{0.000434} \times 1.08 = 7.47 \text{ kg}$$

Problema 11.3. Un flujo de agua a temperatura de 20°C y con velocidad de 6 m/seg, ocurre sobre una superficie lisa de 3 m de ancho y 30 m de longitud. Determinar la fuerza de arrastre sobre el total de la superficie.

Solución. Para el agua a 20°C, $\rho = 101.8$ kg seg²/m⁴ y $\nu = 1.01 \times 10^{-6}$ m²/seg. Para toda la superficie ($x = 30$ m) el número de Reynolds es:

$$Re_x = \frac{6 \times 30 \times 10^6}{1.01} = 1.78 \times 10^8$$

De la Fig. 11.4, $C_f = 0.002$ y la fuerza de arrastre total (Ec. 11.4) es:

$$D_f = 0.002 \times 101.8 \frac{(6)^2}{2} 3 \times 30 = 330 \text{ kg}$$

Problema 11.4. Un modelo liso de un trasatlántico tiene 4.50 m de longitud y se prueba arrastrándolo sobre agua dulce a una velocidad de 2.85 m/seg; se mide un arrastre total de 7.7 kg. La superficie mojada del casco es de 3.54 m². Estimar el arrastre por fricción, considerando el agua a 15°C (Prob. 11.1).

Solución. El arrastre por fricción se puede estimar si consideramos la superficie mojada del casco como una placa plana de 4.50 m de longitud y con una área total de 3.54 m². El número de Reynolds es entonces (datos del Prob. 11.1):

$$Re_x = \frac{v_0 x}{\nu} = \frac{2.85 \times 4.5 \times 10^6}{1.15} = 1.115 \times 10^7$$

De la Fig. 11.4, $C_f = 0.0029$ y el arrastre por fricción es:

$$D_f = 0.0029 \times 101.86 \frac{(2.85)^2}{2} \times 3.54 = $$
$$= 4.25 \text{ kg}$$

El arrastre por presión y por onda sería entonces:

$$D_p = 7.7 - 4.25 = 3.45 \text{ kg}$$

11.4 Arrastre total de cuerpos bidimensionales

En la Fig. 11.5 se presenta la variación del coeficiente de arrastre total de cuerpos bidimensionales de diferentes formas de sección, contra el número de Reynolds, que ha sido obtenida experimentalmente.

En particular, para el cilindro se muestran diferentes tipos de régimen, encontrados entre números de Reynolds muy bajos y muy altos; éstos son consecuencia de la modificación en la distribución de presiones del flujo irrotacional a bajas velocidades y de la distribución de presiones que se obtiene para el flujo real (aquí se presentan efectos viscosos de importancia). En el intervalo de números de Reynolds muy bajos ($Re = v_0 D/\nu < 0.5$) se tiene un comportamiento similar al de un flujo muy lento en el que "las fuerzas de inercia son despreciables". Para este tipo de flujo, Lamb dedujo analíticamente la siguiente expresión para el coeficiente de arrastre:

$$C_D = \frac{8\pi}{2\,Re - Re \ln Re} \quad (11.14)$$

A partir de números de Reynolds mayores de 5 se inicia la separación del flujo, por efecto de un gradiente de presión adverso y de la curvatura de la frontera, la cual se observa en la misma distribución de presiones del flujo con potencial (figura 11.7) para $\theta = 90°$. Dentro del intervalo $5 \leqslant Re < 50$, la zona de separación encierra un vórtice localizado en la parte posterior del cilindro, seguido de una capa ondulada de vorticidad. Las modificaciones —aguas abajo— del cilindro que por la presencia de éste sufre el flujo, se conocen como *la estela del cuerpo*; es laminar si está comprendida en el intervalo de números de Reynolds antes indicado. Para números de Reynolds mayores ($60 < Re < 5\,000$), las ondas en la estela se incrementan en amplitud y se desprenden formando dos líneas de vórtices alternados (Fig. 11.6), que confieren un movimiento oscilante de un lado al otro. Este fenómeno se conoce como *línea de vórtices de von Kármán* y se caracteriza por una periodicidad en la formación vorticosa que induce vibraciones en el cilindro.

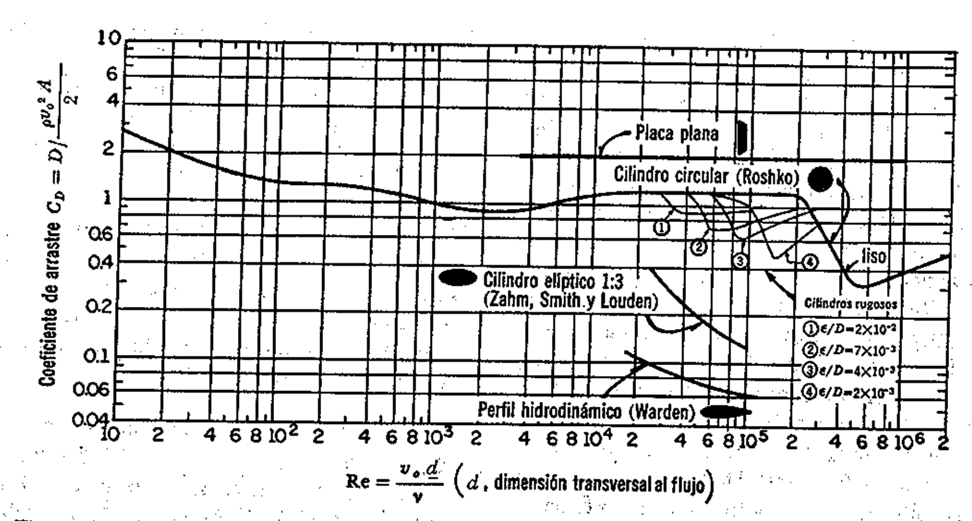


Figura 11.5. Coeficientes de arrastre total para cuerpos bidimensionales (Refs. 17, 20 y 64).

A través del intervalo de formación de vórtices periódicos, el coeficiente de arrastre es prácticamente constante, $C_D \simeq 1$. En tanto que el límite inferior de $Re = 50$ marca el final del movimiento muy lento, el límite superior $Re = 5\,000$ corresponde a la terminación de las condiciones periódicas laminares en la estela. La formación de vórtices asimétricos —detrás del cilindro— da lugar a un empuje lateral o de sustentación que se alterna con una frecuencia f. Si el cilindro no está soportado rígidamente, entonces se desarrolla un movimiento oscilatorio normal a la velocidad del flujo libre, especialmente si la frecuencia de formación de los vórtices está próxima a la frecuencia natural de vibración del cuerpo.

Para números de Reynolds mayores de 5 000 la estela se puede considerar completamente turbulenta, aunque la capa límite sobre la porción anterior del cilindro permanezca laminar. El punto de separación del flujo está muy próximo al punto donde el gradiente de presión adverso principia para $\theta = 90°$ —o ligeramente arriba de éste— de acuerdo con algunas mediciones. La distribución real de presiones para $Re = 1.86 \times 10^5$ se muestra en la Fig. 11.7.

En el intervalo de números de Reynolds, entre $5 \times 10^3 < Re < 2 \times 10^5$, se mantiene el aspecto del flujo descrito y puede decirse que el coeficiente de arrastre es constante con $C_D \cong 1.2$. La caída



Figura 11.6. Vórtices en la estela de un cilindro, $Re = 60$ (Ref. 39).

brusca en éste, en la vecindad de $Re = 2 \times 10^5$ ocurre cuando se convierte en turbulenta la capa límite adherida sobre la mitad trasera del cilindro. Sin embargo, la separación de tal capa se retrasa debido al incremento de energía cinética cerca de la frontera y porque mantiene su adhesión a una zona de presión creciente. Un aspecto de la distribución de presiones para $Re = 6.7 \times 10^5$ se muestra en la misma Fig. 11.7, donde se observa que se reduce el arrastre total, ya que la presión negativa en la estela es más pequeña. El punto de separación, obtenido experimentalmente para la capa límite turbulenta, queda para $\theta = 99°$. Un método analítico para obtenerlo se incluye en la Ref. 65.

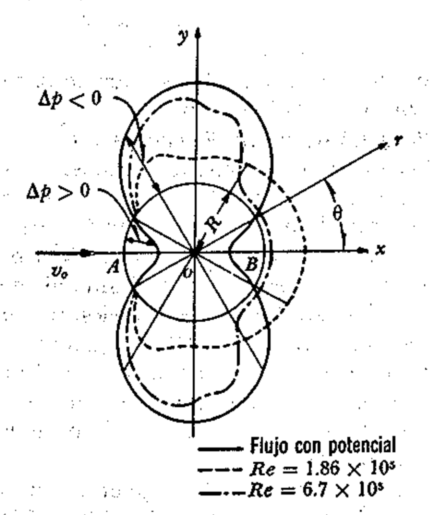


Figura 11.7. Distribución de presiones alrededor de un cilindro.

El número de Reynolds crítico para el cual toma lugar la separación, se encuentra bajo la influencia de dos factores: el nivel de turbulencia de la corriente libre en el flujo de llegada y la rugosidad de la superficie del cilindro. Un incremento en ambos aspectos tiene el efecto de disminuir el número de Reynolds crítico (referencia 17).

En la Fig. 11.5 se presenta la influencia que tiene la rugosidad del cilindro (a través de la rugosidad relativa ε/D) sobre el coeficiente de arrastre.

Problema 11.5. Determinar la fuerza que ejerce un viento de 80 km/h sobre cada metro de un cable de transmisión de energía eléctrica, de 2.54 cm de diámetro (1 plg), suponiendo que la temperatura del aire es de 10°C.

Solución. Para 10°C la viscosidad cinemática del aire (Fig. 1.8) es $\nu = 0.155$ stokes $= 15.5 \times 10^{-6}$ m²/seg; y de la Fig. 1.4 la densidad $\rho = 0.127$ kg seg²/m⁴. La velocidad del flujo libre es $v_0 = 80$ km/h $= 22.2$ m/seg y el número de Reynolds vale:

$$Re = \frac{v_0 D}{\nu} = \frac{22.2 \times 0.0254 \times 10^6}{15.5} = 3.64 \times 10^4$$

De la Fig. 11.5, el coeficiente de arrastre es $C_D = 1.2$ y, de la Ec. (11.6), la fuerza de arrastre total vale:

$$D = 1.2 \times 0.127 \frac{(22.2)^2}{2} \times 0.0254 = 0.954 \text{ kg/m}$$

Problema 11.6. En una chimenea cilíndrica de 0.92 m de diámetro, expuesta a un viento con velocidad de 58 km/h, determinar el momento flexionante en su base —en función de la altura de la misma— suponiendo despreciables los cambios de velocidad debidos al efecto de la capa límite turbulenta en toda la altura. Utilizar las propiedades de aire del problema 11.5.

Solución a). La velocidad del flujo libre es $v_0 = 58$ km/h $= 16.1$ m/seg y el número de Reynolds vale:

$$Re = \frac{v_0 D}{\nu} = \frac{16.1 \times 0.92 \times 10^6}{15.5} = 9.56 \times 10^5$$

De la Fig. 11.5, $C_D = 0.39$ y de la ecuación (11.6) la fuerza de arrastre total es:

$$D = 0.39 \times 0.127 \times \frac{(16.1)^2}{2} \times 0.92 = 5.906 \text{ kg/m}$$

El momento flexionante en la base de la chimenea, en función de la altura h, resulta ser:

$$M = \frac{5.906\, h^2}{2} = 2.953\, h^2 \text{ (kg m)}$$

Otro ejemplo de separación y formación de estela es el del flujo alrededor de una placa plana bidimensional, normal a la dirección del de llegada. En este caso, el arrastre por fricción es cero, debido a que los esfuerzos tangenciales no tienen componentes en la dirección del flujo. La superficie de separación de éste alrededor de la placa y la distribución de presiones se muestran en la Fig. 11.8. El punto de separación es obvio y su distribución de presiones estable. La independencia del coeficiente de arrastre respecto del número de Reynolds, es evidente, debido a que el arrastre por fricción es nulo y a que el punto de separación de la capa límite siempre es el mismo. Lo anterior es válido no únicamente para placas, sino también para cualquier cuerpo que presente cantos afilados en dirección transversal a la corriente. (Se exceptúan flujos con números de Reynolds pequeños.)

El coeficiente de arrastre para placas bidimensionales de longitud infinita, tiene un valor constante $C_D = 2$ para cualquier número de Reynolds (Fig. 11.5).

Para considerar un cuerpo efectivamente bidimensional, su longitud debe ser grande en comparación con su ancho, pues de lo contrario se modifica la distribución de presiones y con ello el coeficiente de arrastre. Las Figs. 11.9 y 11.10 presentan el efecto de la longitud en cilindros y placas planas rectangulares, para dos números de Reynolds en particular (se han elaborado con datos de la Ref. 14). En la Fig. 11.11 se presentan las curvas típicas de coeficientes de arrastre y sustentación para un determinado perfil de ala bidimensional; en este caso, la variación es mayor con el ángulo de ataque α de la corriente (Fig. 11.2). Para el cálculo de las fuerzas de arrastre y sustentación, en las Ecs. (11.6) y (11.9) el área A corresponde al producto de la cuerda por la longitud del ala, en el caso de un perfil de ala de avión.

Problema 11.7. Calcular la fuerza de arrastre de un viento de 80 km/h, sobre

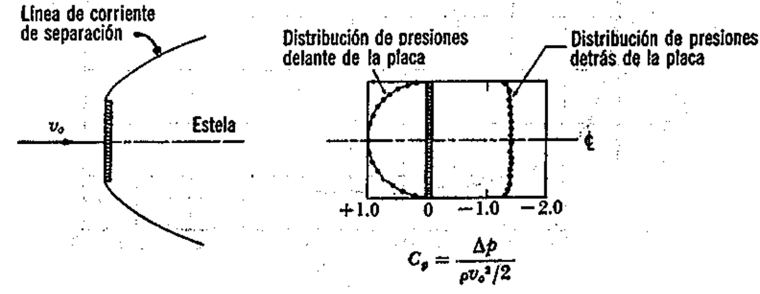


Figura 11.8. Aspecto del flujo y distribución de presiones sobre una placa normal a un flujo, según Fage y Johansen.

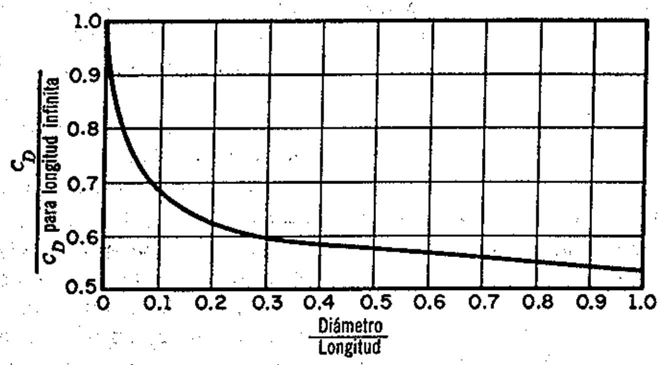


Figura 11.9. Efecto de la longitud de un cilindro en el coeficiente de arrastre total, para $Re = 88\,000$.

un anuncio comercial de 3 × 15 m, a una altura suficiente para despreciar los cambios de velocidad por efecto de la capa límite. Suponer que la temperatura del aire es de 15°C.

Solución. Como para el aire a 15°C, $\rho = 0.125$ kg seg²/m⁴ y $\nu = 0.16$ stokes $= 16 \times 10^{-6}$ m²/seg, así como la velocidad del viento $v_0 = 22.2$ m/seg, el número de Reynolds vale entonces:

$$Re = \frac{22.2 \times 3 \times 10^6}{16} = 4.16 \times 10^6$$

De la Fig. 11.5, para una placa de longitud infinita $C_D = 2$ y para una relación ancho/longitud $= 3/15 = 0.2$, el coeficiente de corrección de la Fig. 11.10 vale 0.6. De lo anterior se deduce que el verdadero coeficiente de arrastre es:

$$C_D = 0.6 \times 2 = 1.2$$

La fuerza de arrastre de la Ec. (11.6) resulta:

$$D = 1.2 \times 0.125 \times \frac{(22.2)^2}{2} \times 3 \times 15 = 1663 \text{ kg.}$$

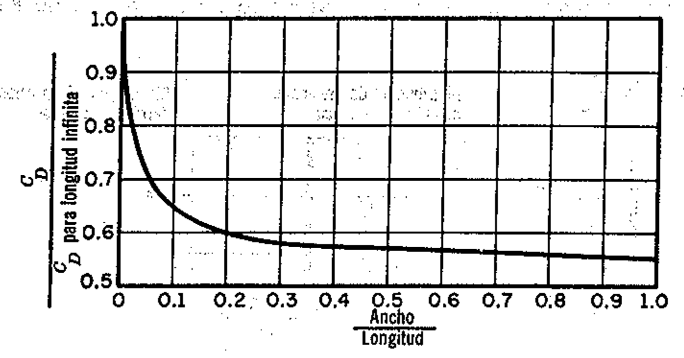


Figura 11.10. Efecto de la longitud de una placa en el coeficiente de arrastre total, para $Re = 68\,000$ a $170\,000$ (mediciones de Wieselsberger y Flachsbart).



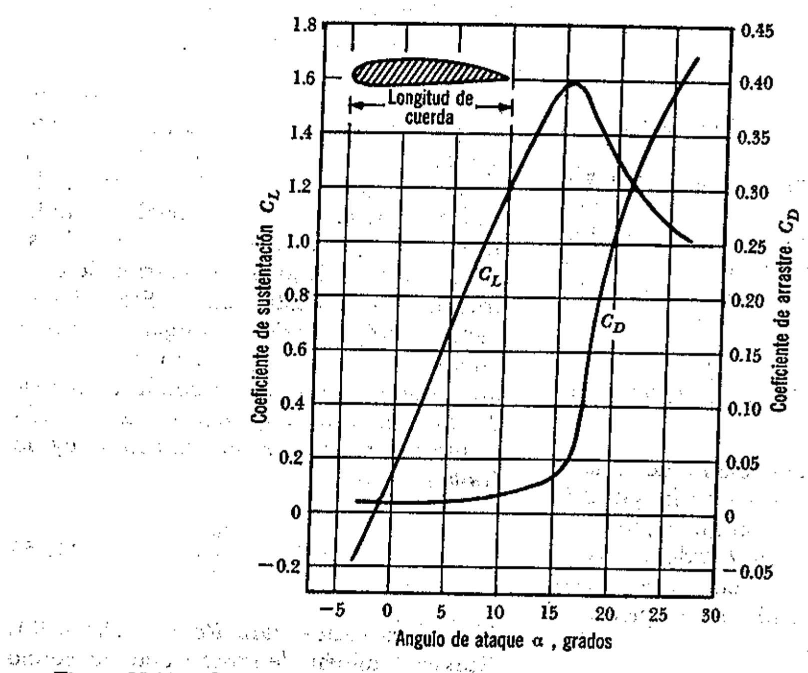


Figura 11.11. Coeficientes típicos de sustentación y arrastre, para un perfil de ala, para $Re = 3 \times 10^6$.

Problema 11.8. El túnel de la figura 11.12 descarga a la atmósfera bajo una carga de 31 m que obra sobre la entrada de forma rectangular y de dimensiones 4.60 m × 3.50 m. Para una obturación provisional del paso del agua se usan "agujas", construidas con secciones laminadas de acero con longitud igual al ancho de la sección y de 0.90 m de altura, las cuales se dejan caer sobre ranuras verticales en las paredes a los lados del túnel. Determinar la fuerza de arrastre máxima sobre una aguja localizada a la mitad de la altura de la sección de entrada y compararla, con la producida por la presión hidrostática resultante, una vez que el túnel quede completamente obturado.

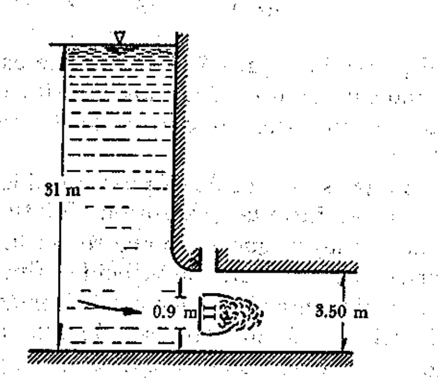


Figura 11.12. Ilustración del problema 11.8.

Solución. A partir de la ecuación de Bernoulli (4.21), la velocidad de las partículas de agua —sobre el eje del túnel— resulta:

$$31 = 1.75 + \frac{v_0^2}{2g}$$

$$v_0 = \sqrt{2g\,(31 - 1.75)} = 23.94 \text{ m/seg}$$

Considerando la aguja como una placa bidimensional interpuesta al paso de la corriente y para el agua a 15°C, $\rho = 101.86$ kg seg²/m⁴ y $\nu = 1.15 \times 10^{-6}$ m²/seg; el número de Reynolds vale:

$$Re = \frac{23.94 \times 0.90 \times 10^6}{1.15} = 1.874 \times 10^7$$

De la Fig. 11.5 el coeficiente de arrastre es $C_D = 2$ para una placa de longitud infinita y para una relación ancho/longitud igual a $0.90/4.60 = 0.1957$; además, como de la Fig. 11.10 el coeficiente de corrección es 0.6, el verdadero coeficiente de arrastre resulta ser:

$$C_D = 0.6 \times 2 = 1.2$$

De la Ec. (11.6) la fuerza de arrastre tiene el valor siguiente:

$$D = 1.2 \times 101.86 \times \frac{(23.96)^2}{2} \times 0.90 \times$$
$$\times 4.60 = 145\,254 \text{ kg}$$

La presión hidrostática media, medida al centro de gravedad del túnel una vez terminada la obturación, vale:

$$p = \gamma h = 1\,000 \times 29.25 = 29\,250 \text{ kg/m}^2$$

por lo que el empuje hidrostático total resulta:

$$P = pA = 29\,250 \times 0.90 \times 4.60 =$$
$$= 121\,095 \text{ kg}$$

es decir, menor que el arrastre dinámico.

11.5 Arrastre total de cuerpos tridimensionales

El arrastre de cuerpos tridimensionales, particularmente de cuerpos de revolución, también resulta de interés. Un problema típico es el de la esfera, en la cual el movimiento irrotacional es válido para números de Reynolds bajos. El aspecto de este flujo y su distribución de presiones se muestra en la Fig. 11.13*a*. Tiene interés cuando se compara con una esfera de diámetro pequeño al caer en un líquido, lo que corresponde al llamado *movimiento muy lento*, cuyo coeficiente de arrastre se calcula con la ley de Stokes:

$$C_D = \frac{24}{Re} \qquad (11.15)$$

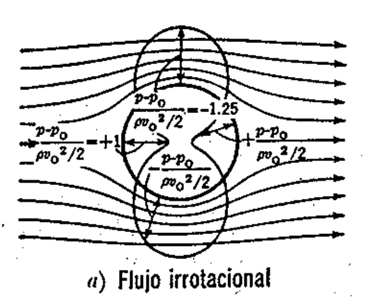
la cual es válida para $Re = v_0 D/\nu < 0.1$. Stokes también demostró que un tercio del arrastre en estas condiciones se debe a la presión y, los otros dos tercios, a esfuerzos cortantes sobre la superficie.

Oseen mejoró la solución de Stokes al incluir —en parte— los términos de inercia omitidos y obtuvo que (Ref. 14):

$$C_D = \frac{24}{Re}\left(1 + \frac{3}{16} Re\right) \qquad (11.16)$$

válida también para $Re < 1$. Es interesante indicar que los resultados experimentales quedan entre las curvas de Stokes y Oseen.

Si una esfera cae dentro de un fluido de extensión infinita (extensión del fluido mucho mayor que el diámetro de la esfera), al establecerse la velocidad final v_s en movimiento permanente, las fuerzas de flotación y de arrastre son iguales a la fuerza de peso de la misma; esto es, para $Re < 0.1$ se aplica la ley de Stokes:



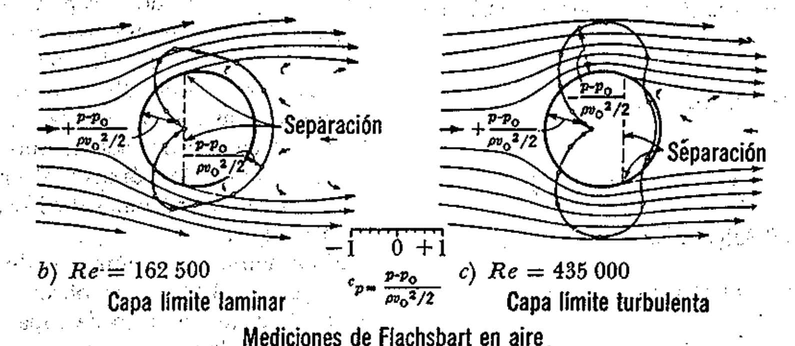


Figura 11.13. Aspecto del flujo y distribución de presiones alrededor de una esfera. (Ref. 20.)

$$\gamma_f \frac{\pi d^3}{6} + 3\,\mu\, v_s \pi d = \gamma_s \frac{\pi d^3}{6}$$

Entonces, si la velocidad final de caída es v_s y γ_f y γ_s los pesos específicos de fluido y esfera, respectivamente, además de conocerse el diámetro de la misma, la viscosidad del fluido resulta:

$$\mu = \frac{d^2(\gamma_s - \gamma_f)}{18\, v_s} \qquad (11.17)$$

La ecuación anterior proporciona un método muy simple para medir la viscosidad dinámica del fluido, que es de extensión finita, la influencia de las fronteras del depósito es tal, que indica un coeficiente de arrastre aparente superior al de un fluido infinito. Si, por ejemplo, la esfera cae en el centro de un cilindro vertical de diámetro d_c, la velocidad relativa del fluido adyacente a la esfera se incrementa y con ella el coeficiente de arrastre. En estas condiciones, la caída de la esfera será más lenta que en un fluido infinito; la velocidad medida v_m debe corregirse a fin de obtener la velocidad equivalente en un fluido infinito v_s por la ecuación (referencia 14) siguiente:

$$v_s = \left(1 + 2.4\, \frac{d}{d_c}\right) v_m \qquad (11.18)$$

Con un número de partículas uniformemente distribuidas que caen en un fluido, se presenta la interferencia mutua entre ellas haciendo lenta su caída, pero más de como lo hiciera cada una por separado. La velocidad de caída de partículas naturales —como arena y grava— es me-

nor que para esferas equivalentes, debido a que el coeficiente de arrastre se hace mayor.

Problema 11.9. Una esfera de acero de 1.59 mm de diámetro (γ_s = 7 800 kg/m³) cae, con una velocidad— en movimiento permanente— de 0.322 cm/seg, dentro de un aceite de peso específico γ_f=868 kg/m³ contenido en un cilindro vertical de 9.5 cm de diámetro, ¿cuál es la viscosidad del aceite?

Solución. De la Ec. (11.18) tenemos:

$$v_s = \left(1 + 2.4 \times \frac{0.159}{9.5}\right) \times$$

$\times$ 0.322 = 0.335 cm/seg

y, de la Ec. (11.17), lo siguiente:

$$\mu = \frac{(0.00159)^2 (7\,800 - 868)}{18 \times 0.00335} =$$

$$= 0.291 \text{ kg seg/m}^2$$

La Ec. (11.17) es válida debido a que el número de Reynolds es:

$$Re = \frac{v_s\, d\, \rho_f}{\mu} =$$

$$= \frac{0.00335 \times 0.00159 \times 868}{0.291 \times 9.807} = 0.001612 < 0.1$$

Con números de Reynolds moderados, el flujo alrededor de una esfera se aparta considerablemente del caso —con potencial (como se observa en las Figs. 11.13*b* y 11.13*c*)— en el que la separación ocurre antes del plano de simetría y la zona de baja presión se extiende sobre la mayor área de la superficie. En estas condiciones se observa asimetría en la distribución de presiones dentro del tiempo, por efecto de la línea de vórtices alternados, lo cual produce vibraciones debido a las fuerzas resultantes.

Finalmente, para números de Reynolds mayores de 3 × 10⁵ se observa en la figura 11.13 que el flujo de capa límite turbulenta tiende a restaurar las condiciones de irrotacionalidad; además, la zona de separación se presenta después del plano de simetría normal al flujo, con la formación apreciable de vórtices alternados. La Fig. 11.14 muestra la variación del coeficiente de arrastre para diversos cuerpos

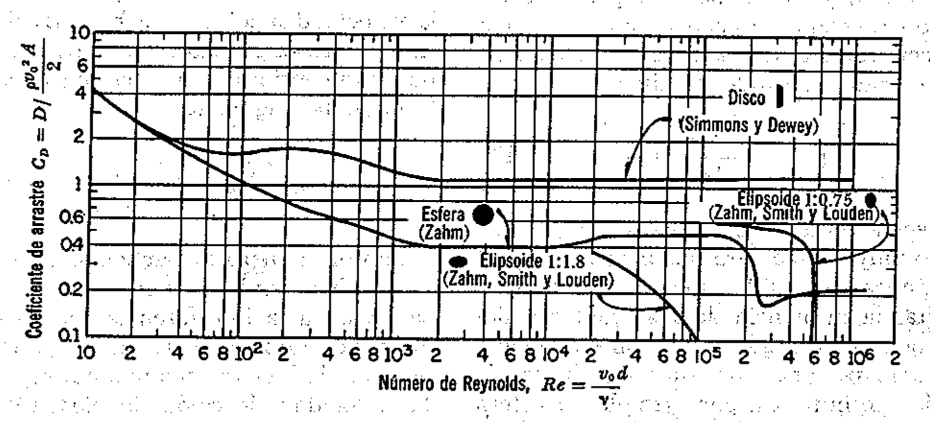


Figura 11.14. Coeficiente de arrastre total para cuerpos tridimensionales de revolución.

TABLA 11.1. Coeficientes de arrastre

Forma del cuerpo	c/d	L/d	$Re = \frac{v_0 d}{\nu}$	C_D
Cilindro circular (eje paralelo al flujo)		0	> 10³	1.12
		1	> 10³	0.91
		2	> 10³	0.85
		4	> 10³	0.87
		7	> 10³	0.99
Cilindro elíptico (eje normal al flujo)	2	∞	4 × 10⁴	0.60
	2	∞	10⁵	0.46
	4	∞	2.5 × 10⁴ hasta 10⁵	0.32
	8	∞	2.5 × 10⁴	0.29
	8	∞	2.0 × 10⁵	0.20
Cilindro cuadrado →		∞	3.5 × 10⁴	2.0
(eje normal al flujo) →		∞	10⁴ a 10⁵	1.6
→ θ = 120°		∞	10⁴	2.0
→ θ = 120°		∞	10⁴	1.72
→ θ = 90°		∞	10⁴	2.15
Cilindros triangulares → θ = 90°		∞	10⁴	1.6
(eje normal al flujo) → θ = 60°		∞	10⁴	2.2
→ θ = 60°		∞	10⁴	1.39
→ θ = 30°		∞	10⁵	1.8
→ θ = 30°		∞	10⁵	1.0
Cilindros semitubulares →		∞	4 × 10⁴	2.3
(eje normal al flujo) →		∞	4 × 10⁴	1.12
Cuerpo aerodinámico		0	> 10³	1.12
		1	> 10³	0.93
→		2	> 10³	1.04
		3	> 10³	1.54
Semiesfera:				
lado plano frente al flujo →			> 10³	1.33
lado plano al otro lado del flujo →			> 10³	0.34
Elipsoide:				
1:2, eje mayor paralelo al flujo			> 2 × 10⁵	0.07
1:3, eje mayor paralelo al flujo			> 2 × 10⁵	0.06

c longitud del eje mayor del elipsoide;
d ancho máximo del objeto medido en dirección del flujo (igual al eje menor del elipsoide);
L longitud.

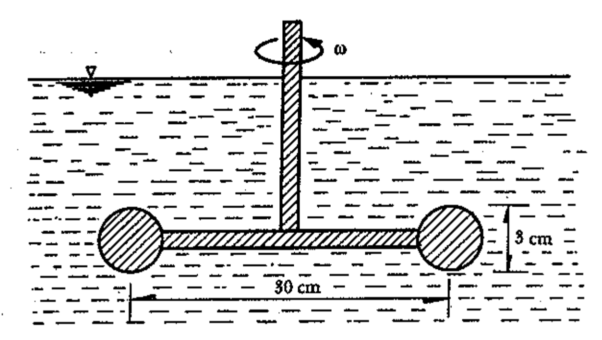


Figura 11.15. Del problema 11.11.

tridimensionales de revolución, en función del número de Reynolds. (Ref. 20.)

En la tabla 11.1 se comparan casos bi y tridimensionales, que pueden ser de interés en el empuje de viento sobre estructuras, los cuales se han integrado con datos de diversas publicaciones, principalmente de las señaladas en las referencias 17, 20 y 5.

Problema 11.10. Calcular la fuerza de arrastre producida por un viento de 72 km/h, sobre un tanque de agua de forma esférica y 1.20 m de diámetro, montado sobre una columna a gran altura. Suponer en 15°C la temperatura del aire.

Solución. Con los datos de ρ y ν para el aire —tomados del problema 11.1— y para v_0 = 72 km/h = 20 m/seg, el número de Reynolds resulta:

$$Re = \frac{20 \times 1.2 \times 10^6}{16} = 1.5 \times 10^6$$

De la Fig. 11.14, el coeficiente de arrastre resulta $C_D = 0.21$ y la fuerza de arrastre:

$$D = 0.21 \times 0.125 \times \frac{(20)^2}{2} \times$$

$$\times \frac{\pi \times (1.2)^2}{4} = 5.938 \text{ kg}$$

Problema 11.11. Un dispositivo mezclador de líquidos formado por dos discos circulares delgados —de 3 cm de diámetro— unidos a una barra vertical (figura 11.15), gira a una velocidad angular constante de 50 rpm, en agua a 15°C. Estimar el parmotor (en kg m) necesario para que gire a dicha velocidad (Ref. 17).

Solución. La velocidad tangencial de los discos, para una velocidad angular ω =

$$50 \text{ rpm} = \frac{50 \times 360}{60} = 300 \text{ rad/seg, es:}$$

$$v_0 = \omega\, r = 300 \times 0.15 = 45 \text{ m/seg}$$

Para agua a 15°C, $\rho = 101.86$ kg seg²/m⁴ y $\nu = 1.15 \times 10^{-6}$ m²/seg; el número de Reynolds vale:

$$Re = \frac{45 \times 0.03 \times 10^6}{1.15} = 1.174 \times 10^6$$

De la Fig. 11.14 el coeficiente de arrastre $C_D = 1.12$ y la fuerza de arrastre sobre cada disco es:

$$D = 1.12 \times 101.86 \times \frac{(45)^2}{2} \times$$

$$\times \frac{\pi \times (0.03)^2}{4} = 81.65 \text{ kg}$$

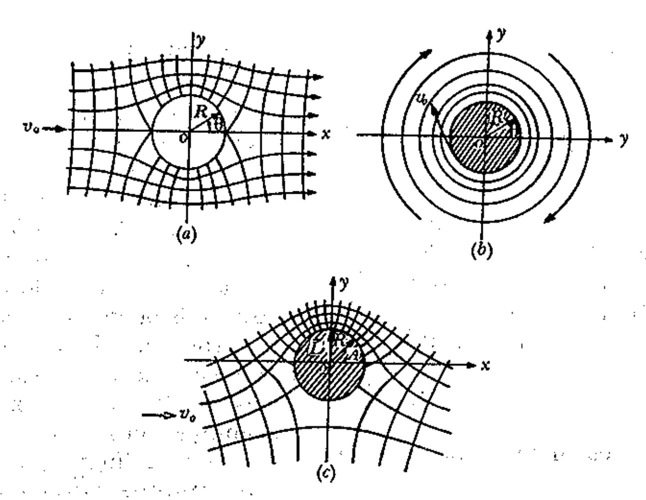


Figura 11.16. Efecto de la circulación sobre el flujo irrotacional alrededor de un cilindro.

luego, el parmotor resulta ser:

$$T = 81.65 \times 0.3 = 24.49 \text{ kg m}$$

11.6 Sustentación y vibración

De acuerdo con la teoría básica del flujo con potencial, el movimiento ejerce presiones balanceadas alrededor de un cuerpo, en dirección longitudinal y transversal, debido a que las líneas de corriente se conforman de acuerdo a las fronteras. La teoría de la separación de la capa límite permite explicar y, en algunos casos evaluar, la fuerza real de arrastre sobre el cuerpo.

Sin embargo, si se acepta la superposición de movimientos irrotacionales, es posible conocer y determinar —por lo menos cualitativamente— el empuje transversal o sustentación, experimentado en muchos cuerpos.

El problema bidimensional más simple es el de un cilindro de radio R, en torno al cual se produce un flujo irrotacional (Fig. 11.16*a*) cuya función de corriente está dada por la Ec. (10.64). Suponemos que a su alrededor se presenta un vórtice irrotacional, que gira en el sentido de las manecillas del reloj para el cual la circulación es $-\Gamma$ (Fig. 11.16*b*). Su función de corriente se define por la Ec. (10.49).

La combinación de las funciones de corriente, para ambos flujos superpuestos, conduce a otro (con el aspecto mostrado en la Fig. 11.16*c*) cuya función de corriente es:

$$\psi = v_0\left(r - \frac{R^2}{r}\right)\operatorname{sen}\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \quad (11.19)$$

Observamos que el desarrollo de la circulación incrementa la velocidad en uno de los lados del cilindro y la disminuye en el otro; lo que trae consigo un cambio en la presión y una fuerza lateral en la dirección del espaciamiento disminuido de las líneas de corriente. En efecto, la velocidad sobre la superficie del cilindro está dada por:

$$v_\theta = -\left[\frac{\partial\psi}{\partial r}\right] = v_a$$

$$= -\left[2\, v_0 \operatorname{sen}\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}\right] \qquad (11.20)$$

el signo menos indica que v_a está dirigida en el sentido de las manecillas del reloj.

La presión sobre la superficie del cilindro se obtiene de la ecuación de Bernoulli (10.3) que, escrita en términos de la componente de presión dinámica, resulta:

$$p_a = p_d + p_s \qquad (11.21)$$

donde p_d es la presión dinámica y p_s la presión estática.

Para las condiciones ambientes de $p_1 = 0$ y $v_1 = v_0$ se tiene:

$$\frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_a^2}{2g} + \frac{p_{da}}{\gamma}$$

Substituyendo de la Ec. (11.20) la magnitud de v_a y despejando p_a (se suprime el subíndice d) resulta:

$$p_a = \rho\frac{v_0^2}{2}\left[1 - \left(2\operatorname{sen}\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R\, v_0}\right)^2\right] \qquad (11.22)$$

Debido a que se considera un fluido ideal, el arrastre por fricción vale cero y el de forma es:

$$D_p = -\int_0^{2\pi} p_a R\cos\theta\, d\theta = 0$$

Sin embargo, la fuerza de sustentación es finita y está dada por la ecuación simple de Kutta (Ref. 66), como sigue:

$$L = -\int_0^{2\pi} p_a R \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \rho\, v_0\, \Gamma \qquad (11.23)$$

donde se ha considerado que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta = 0$$

Si bien el concepto de circulación es principalmente un artificio matemático para obtener la modificación deseada del flujo con potencial, el flujo circulatorio se puede simular experimentalmente, en uno real, girando el cilindro. Además, toda vez que la magnitud de Γ se produce por la transmisión de esfuerzos cortantes desde la frontera del cilindro hacia el fluido, este efecto no es constante alrededor de todas las líneas de corriente, sino que disminuye con la distancia desde la frontera. La capa límite que resulta causa un movimiento de rotación en el fluido —el cual se superpone con el del cilindro en traslación— y crea un empuje de sustentación proporcional a la circulación y a la velocidad de traslación. Esto se conoce como *efecto Magnus* y su efecto depende del número de Reynolds, así como de las velocidades de traslación y de rotación del cilindro. Con los fluidos reales el arrastre no es cero y está formado por componentes de fricción y de forma.

En la práctica no es necesario que el cilindro gire con el fin de producir un empuje transversal o sustentación sobre él mismo, pues el flujo presenta el aspecto que se muestra en la Fig. 11.16*c* aun cuando esto no ocurra. Lo anterior se debe al efecto de un movimiento pendular lateral de la zona de separación, en forma de vórtices alternados (Fig. 11.6), a ambos lados de la línea de simetría del flujo, para pasar a la estela. Es más, cualquier cuerpo con estas características genera una línea de vórtices de von Kármán con las características de la figura 11.17, que concuerda con el primer teorema de Helmholtz (Ref. 18); el cual establece que la circulación alrededor de cualquier curva cerrada dentro de un fluido debe permanecer constante con el tiempo. Es decir, la circulación alrededor del cilindro en cualquier instante será igual y opuesta a la suma algebraica de las circulaciones iniciales de todos los vórtices que se han formado. El espaciamiento l, de los vórtices en la estela, es constante.

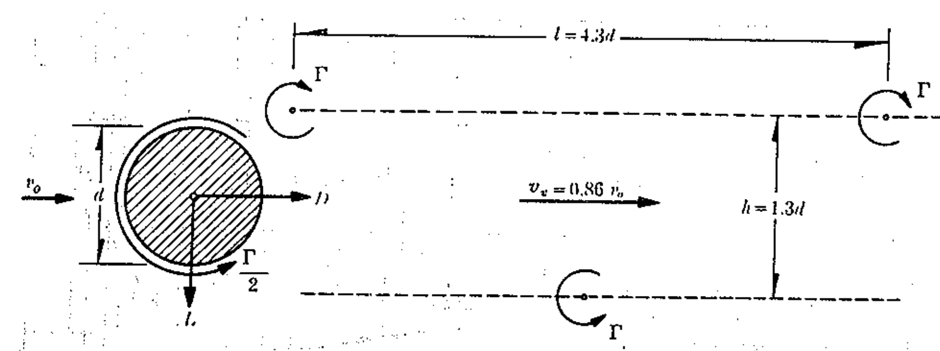


Figura 11.17. Características de la línea de vórtices de von Kármán, detrás de un cilindro (Ref. 4).

Debido a que cada vórtice tiene la intensidad inicial $\pm\Gamma$, la circulación alrededor del cilindro varía continuamente de $-\Gamma/2$ a $+\Gamma/2$. El resultado es un empuje lateral oscilante sobre el cilindro, dirigido hacia el lado del último vórtice generado, y en concordancia con la teoría de circulación irrotacional ya discutida. La frecuencia f (en ciclos/seg) de los vórtices que originan el empuje transversal se puede estimar de las características de la Fig. 11.17 o bien, por mediciones directas en términos del parámetro sin dimensiones, conocido como número de Strouhal (subcapítulo 5.3):

$$S = f\, d/v$$

La Fig. 11.18 muestra los resultados de diferentes autores que realizaron mediciones en estelas turbulentas detrás de cilindros y placas de longitud infinita; además, relaciona el número de Reynolds con el de Strouhal.

La magnitud aproximada de la fuerza transversal se puede obtener de las ecuaciones siguientes:

$$L = \rho\, v_0\, (\Gamma/2)$$

$$\Gamma \simeq 2.8\, l\,(v_0 - v_v) \simeq 1.7\, v_0\, d$$

Este fenómeno evidentemente causa la vibración forzada de cuerpos cilíndricos, como las chimeneas industriales, cables colgantes, mástiles, etc., cuando se exponen al empuje del viento. La amplitud de la vibración puede llegar a ser estructuralmente peligrosa, si la frecuencia natural de vibración elástica y la de formación de los vórtices están en resonancia. A este respecto, se observa que el diámetro efectivo del cilindro se incrementa por el desplazamiento lateral que ocurre durante la vibración; la suma del diámetro real y dicho desplazamiento será entonces la longitud característica en las distintas relaciones. El lateral tenderá a incrementar, tanto el periodo de oscilación como la fuerza ejercida; sin embargo, la naturaleza del fenómeno es tal que la amplitud de la vibración (la mitad del des-

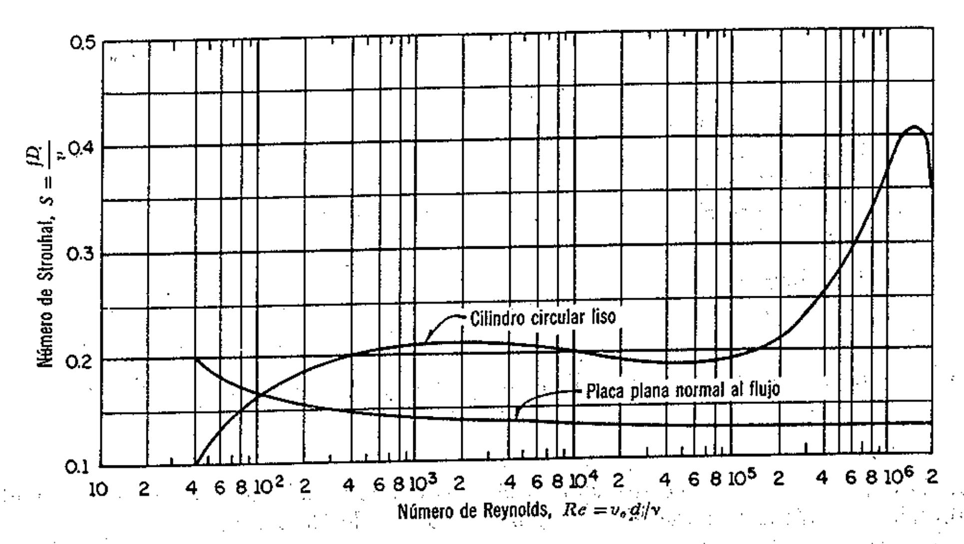


Figura 11.18. Número de Strouhal como una función del número de Reynolds para cuerpos bidimensionales, de acuerdo con las mediciones de Roshko, Scruton, Baird y ASCE realizadas en 1955 (Ref. 64).

plazamiento lateral) nunca excederá el diámetro del cilindro.

Problema 11.12. Un cilindro rotatorio de 15 cm de diámetro, sujeto a una fuerza de sustentación de 182 kg/m de longitud, se traslada dentro del agua a una velocidad de 6 m/seg. Determinar el coeficiente de sustentación y la velocidad teórica de rotación del cilindro, en revoluciones por minuto.

Solución. De la Ec. (11.9) el coeficiente de sustentación vale:

$$C_L = \frac{L}{\rho \frac{v_0^2}{2} A} = \frac{2 \times 182}{101.97\,(6)^2\,0.15} = 0.661$$

De la Ec. (11.23) se deduce que la circulación del cilindro es:

$$\Gamma = \frac{L}{\rho\, v_0} = \frac{182}{101.97 \times 6} = 0.2975\ \mathrm{m^2/seg}$$

De la Ec. (10.50) tenemos:

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi R} = \frac{0.2975}{2 \times 3.1416 \times 0.075} =$$

$$= 0.6315\ \mathrm{m/seg}$$

Una vez que se ha conocido la velocidad tangencial sobre la frontera del cilindro, la velocidad de rotación resulta ser:

$$\omega = \frac{v_\theta}{R} = \frac{0.6315}{0.075} = 8.42\ \mathrm{rad/seg}$$

o bien:

$$n = \frac{60\ \omega}{2\pi} = \frac{60 \times 8.42}{2 \times 3.14} = 80.4\ \mathrm{rpm}$$

Problema 11.13. *a)* Determinar la velocidad que debe tener un flujo de agua, para que un cable de 2.5 cm de diámetro vibre con un periodo de 0.02 seg; *b)* determinar la velocidad del aire para que el cable vibre con el mismo periodo.

Solución a). Suponiendo —inicialmente— que el número de Strouhal tiene poca variación con el de Reynolds y, además, con $\nu = 1.4 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/seg}$ para el agua, de la Fig. 11.18 $S \approx 0.2$, se concluye que:

$$v_0 = \frac{d}{TS} = \frac{0.025}{0.02 \times 0.20} = 6.25\ \mathrm{m/seg}$$

Como el número de Reynolds vale:

$$Re = \frac{6.25 \times 0.025 \times 10^6}{1.4} = 1.116 \times 10^5$$

de la Fig. 11.18 se comprueba que el número de Strouhal vale 0.19 y la velocidad real es:

$$v_0 = \frac{0.025}{0.02 \times 0.19} = 6.58\ \mathrm{m/seg}$$

Solución b). En la misma manera, con $\nu = 16 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/seg}$ para el aire, v_0 sería igual que para el agua, por lo que el número de Reynolds resulta ser:

$$Re = \frac{6.58 \times 0.025 \times 10^6}{16} = 1.028 \times 10^4$$

de donde se deduce que el número de Strouhal vale 0.20, y $v_0 = 6.25$ m/seg.

11.7 Empuje de viento sobre estructuras

11.7.1 Determinación experimental

En ingeniería civil son frecuentes (en especial para cálculos de estabilidad y resistencia de estructuras) no sólo el arrastre total de una estructura por efecto del viento, sino también por la distribución de presiones sobre su superficie y las solicitaciones a que está sujeta. Es el caso de los problemas que se presentan en cuerpos cuyas formas tienen cantos afilados transversales al flujo, en los que el coeficiente de arrastre es —de hecho— independiente del número de Reynolds. Por esta razón, los resultados obtenidos al ensayar un modelo pueden, sin más, ser aplicables a la estructura real. Existen inevitables fuentes de error en la conversión, debidas principalmente a que el flujo alrededor de la estructura real no es constante ni uniforme, como se considera en la Ec. 11.6 y en los ensayes efectuados con un modelo; es decir, es variable en forma tridimensional o, muchas veces, en forma de ráfagas, de manera que es difícil aceptar una velocidad media v_0. Por otra parte, la rugosidad del suelo, en la proximidad del edificio, juega también un papel muy importante en la forma de la capa límite, lo que es difícil de representar al efectuar las pruebas. La Fig. 11.19*a* muestra el esquema del flujo de aire alrededor de un edificio sencillo.

La distribución de presiones sobre la superficie del modelo de una estructura (geométricamente semejante), se puede obtener de mediciones de alguno que se halle expuesto al flujo generado en un túnel de viento o bien, si la estructura ya existe, directamente de las medidas efectuadas en ella. La manera de presentar los resultados se hace determinando el coeficiente de presión C_p (definido por la ecuación (10.6) o bien, por la Ec. (5.22a), a saber:

$$C_p = \frac{p - p_0}{\rho \frac{v_0^2}{2}} = 1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \qquad (11.24)$$

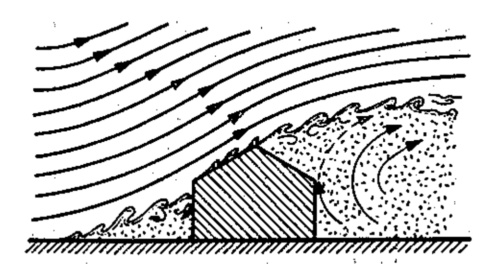


Figura 11.19a. Configuración del viento alrededor de un edificio.

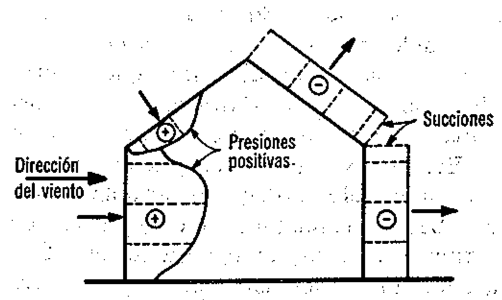
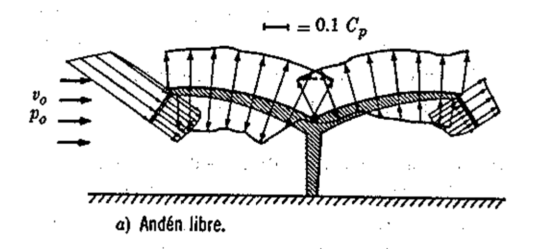
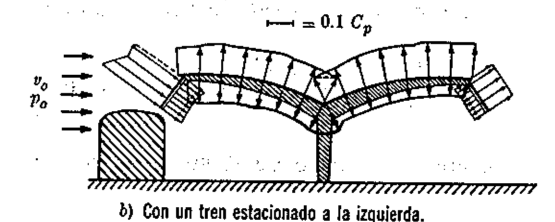


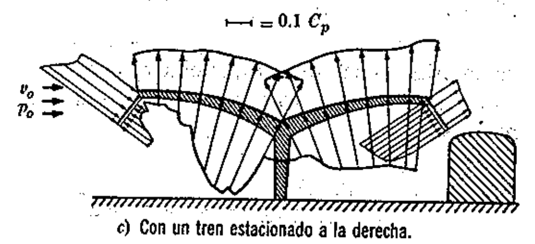
Figura 11.19b. Distribución del coeficiente de presión sobre un edificio.



a) Andén libre.



b) Con un tren estacionado a la izquierda.



c) Con un tren estacionado a la derecha.

Figura 11.20. Distribución de las presiones del viento sobre la cubierta de un andén.

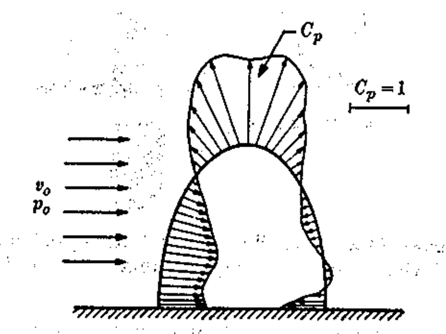
donde p_0 y v_0 representan la presión y velocidad dentro del flujo uniforme, antes de llegar al cuerpo; p y v son iguales magnitudes en un punto sobre la frontera del mismo y ρ la densidad del aire. La Fig. 11.19*b* muestra la distribución del coeficiente de presión sobre el edificio de la Fig. 11.19*a*.

En la Fig. 11.20 se muestran las distribuciones del coeficiente de presión sobre la cubierta de un andén de ferrocarril; en los tres casos el viento sopla de izquierda a derecha. En tanto que la 11.20*a* muestra la distribución de C_p con los andenes libres, en la 11.20 (*b* y *c*) se presenta la fuerte influencia al respecto, cuando un tren se estaciona en uno de los lados del andén.

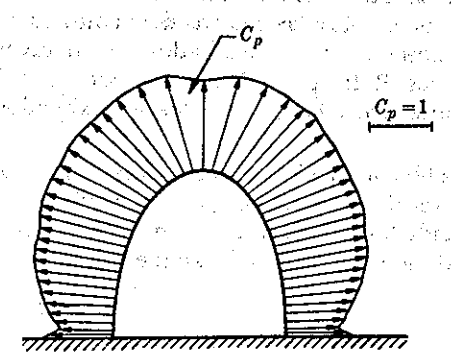
La Fig. 11.21a muestra la distribución de coeficientes de presión, por el viento sobre un plano meridiano en dirección del flujo, alrededor de una cúpula semejante a un semielipsoide. Las irregularidades que se observan se deben a la influencia de la capa límite en el piso, así como a las fuertes succiones (presiones negativas). La Fig. 11.21*b* presenta la distribución de dicho coeficiente, sobre un plano meridiano de la cúpula, en la dirección normal al flujo con observaciones semejantes.

Finalmente, en la Fig. 11.22 se incluye la variación de los coeficientes totales de arrastre y sustentación, de la misma estructura, con el número de Reynolds $Re = v_0\, d/\nu$. En este caso, los dos coeficientes se han calculado tomando como área característica el área máxima transversal de la cúpula, de valor $A = \pi\, d^2/4$ en las Ecs. (11.6) y (11.9); así también se ha hecho para el número de Reynolds como longitud característica al diámetro máximo horizontal d de la cúpula, correspondiente al nivel del piso.

Conviene observar la clara transición entre la zona de flujo laminar y la de turbulento, lo cual ocurre aproximadamente para $Re = 4 \times 10^5$.



a) Distribución del coeficiente de presión, por viento sobre el meridiano en dirección del flujo, de un semielipsoide (Ref. 67).



b) Distribución de los coeficientes de presión por viento sobre el meridiano normal al flujo, de un semielipsoide (Ref. 67).

Figura 11.21.

Problema 11.14. Calcular las fuerzas de arrastre y sustentación generadas por un viento de 50 m/seg, sobre la cúpula de la Fig. 11.21, la cual tiene un diámetro máximo horizontal al nivel del piso $d = 30$ m.

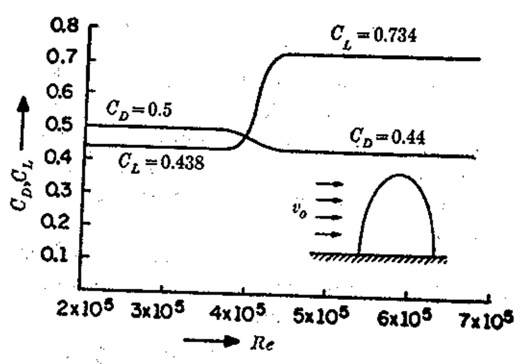


Figura 11.22. Coeficientes de arrastre total y sustentación, en función del número de Reynolds, para el semielipsoide de la figura 11.21*a*.

Solución. El número de Reynolds, con $\nu = 16 \times 10^{-6}$ m²/seg para el aire, es:

$$Re = \frac{50 \times 30 \times 10^6}{16} = 93.75 \times 10^6 > 4 \times 10^5$$

luego entonces, de la Fig. 11.22 los coeficientes de arrastre y sustentación son $C_D = 0.4$ y $C_L = 0.734$. El área característica usada en el cálculo de estos coeficientes vale:

$$A = \frac{\pi}{4} d^2 = 0.7854\,(30)^2 = 706.86 \text{ m}^2$$

y de las ecuaciones (11.6) y (11.9) las fuerzas de arrastre y sustentación, con $\rho = 0.125$ kg seg²/m⁴, respectivamente, resultan:

$$D = 0.4 \times 0.125 \times \frac{(50)^2}{2} \times 706.86 = $$
$$= 44.178 \times 10^3 \text{ kg}$$

$$L = 0.734 \times 0.125 \frac{(50)^2}{2} \times 706.86 = $$
$$= 81.07 \times 10^3 \text{ kg}$$

Leutheusser y Douglas (Ref. 68) han demostrado que en la determinación experimental de los coeficientes de presión, arrastre y sustentación, se cometen errores —hasta del 60 %— por seguir el método clásico de considerar una distribución uniforme de velocidades en las pruebas dentro del túnel de viento. Por otra parte, es muy importante el grado de inmersión del edificio dentro de la capa límite.

Con referencia a la Fig. 11.23, dichos autores indican que el coeficiente de presión se da por la relación:

$$C_p = f\left(\theta, \text{forma}, Re, \frac{\varepsilon}{\delta}, \frac{\delta}{h}\right)$$

donde C_p es el coeficiente de presión local definido por la Ec. (11.24), en la cual v_0 se reemplaza por el valor de la velocidad correspondiente a $y = h$; θ el ángulo de ataque del viento; $Re = v_h h/\nu$ el número de Reynolds; ε/δ la rugosidad relativa del terreno y, por último, δ/h el grado de inmersión del cuerpo dentro de la capa límite. También es conveniente observar el mismo grado de turbulencia dentro del flujo. Como en la práctica es difícil cuantificar la rugosidad ε del terreno, la cual se ve influenciada por la vegetación y construcciones vecinas al edificio y hace un poco difícil realizar una simulación exacta en la zona de pruebas, se puede entonces aproximar la ley de variación de velocidades (Fig. 11.23) por la ley de Prandtl (Ec. B.34):

$$v = v_0\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}$$

en la cual se elige para n el intervalo de valores: de 3 en el caso de superficies muy rugosas y de 7 para superficies lisas.

En el caso de capa límite turbulenta, su espesor se puede determinar de las siguientes expresiones:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.38}{Re_x^{0.20}} \quad \text{para } 5 \times 10^4 < Re_x < 10^6$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0.22}{Re_x^{0.167}} \quad \text{para } 10^6 < Re_x < 5 \times 10^8$$

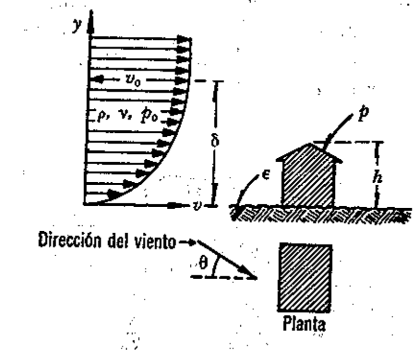


Figura 11.23. Distribución real de velocidades del viento antes de llegar a una construcción.

En el año de 1961 el Comité sobre Solicitaciones y Esfuerzos de Estados Unidos de Norteamérica, emitió un informe acerca de los resultados de sus investigaciones sobre las fuerzas del viento en estructuras, cuyos resultados se incluyen en las Refs. 69 y 70; éstos pueden utilizarse para hacer cálculos aproximados.

Problema 11.15. La ecuación (B.23) de Prandtl von Kármán para el perfil de velocidades —en una capa límite turbulenta bidimensional— es la siguiente:

$$\frac{v}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 2.5 \ln y + C$$

donde $v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$ es la velocidad al esfuerzo cortante, y la distancia normal a la pared y C una constante. Las velocidades del viento —sobre un terreno plano cubierto de pasto— medidas a 3 y 6 m de altura, fueron de 3 m/seg y 3.30 m/seg, respectivamente. Calcular la velocidad del viento a una altura de 24.40 m sobre el terreno a partir de: *a)* la ecuación antes dada; *b)* la ecuación exponencial de Prandtl (B.34) para $n = 7$.

Solución a). Con la ecuación de Prandtl y von Kármán, para los valores medidos de la velocidad, resulta:

$$\frac{3}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 2.5 \ln 3 + C$$

$$\frac{3.30}{\sqrt{\tau_0/\rho}} = 2.5 \ln 6 + C$$

Restando la primera ecuación de la segunda y despejando v_* resulta:

$$\sqrt{\tau_0/\rho} = \frac{3.30 - 3}{2.5 \ln(6/3)} = 0.1765 \text{ m/seg}$$

a partir del cual se podría calcular el esfuerzo cortante τ_0, sobre el piso.

De la primera ecuación, al substituir $\sqrt{\tau_0/\rho}$, resulta $C = 14.5$; la ley de distribución de velocidades resulta:

$$v = 0.1765 \times 2.5 \log y + 0.1765 \times 14.5$$

$$v = 1.015 \log y + 2.56$$

de la cual, para $y = 24.4$ m, resulta $v = 3.97$ m/seg.

Solución b). En la misma forma, con $v = 3$ m/seg para $y = 3$ m, de la ecuación (B.34) se obtiene:

$$\frac{v_0}{\delta^{1/7}} = 3^{6/7} = 2.6$$

y la ley de distribución de velocidades es $v = 2.6\, y^{1/7}$; de tal modo que para $y = 24.4$ m, nos da:

$$v = 2.6\,(24.4)^{1/7} = 4.09 \text{ m/seg}$$

11.7.2 Efectos de vibración

Las estructuras pueden quedar a merced de vibraciones de gran amplitud, inducidas por el viento, que puedan producir esfuerzos severos cuando la amortiguación es pequeña o bien, si se presenta una o más de las siguientes condiciones.

a) Si la estructura (o las componentes de la misma) es esbelta o relativamente flexible.

b) Si se presenta una fuerza excitadora producida por el viento.

c) Si la sección transversal de la estructura (o de sus componentes) es tal que promueve la creación de vórtices; o si exhibe características de sustentación o de momento inestable.

d) Si la estructura (o componentes de la misma) puede oscilar libremente, de acuerdo a un modo de flexión y de torsión simultáneo.

Bajo esta última condición los dos modos se pueden acoplar según un movimiento compuesto que aparece como una torsión excéntrica; en ciertas condiciones, éste puede llegar a ser muy violento y alcanzar amplitud catastrófica en unos cuantos ciclos de oscilación.

La formación de vórtices puede causar fuerzas periódicas alternadas, perpendiculares a la dirección del viento, las cuales inducen vibración en la estructura. Este fenómeno se ha observado en objetos cilíndricos expuestos a la acción del viento.

Por lo que respecta a la excitación producida en la estructura por los vórtices, se pueden hacer las siguientes observaciones:

a) Mientras la estructura esté libre de vibraciones, la frecuencia de los vórtices queda controlada por el viento.

b) Ciertas velocidades discretas del viento son críticas, debido a lo cual la frecuencia de los vórtices coincide o constituye el múltiplo de una de las de oscilación de la estructura, de modo que al coincidir conducen a oscilaciones autoexcitadas.

c) Más allá de las velocidades críticas del viento, son las oscilaciones de la estructura —y no la velocidad del viento— las que controlan la frecuencia de los vórtices. En ese caso, el intervalo de oscilación se extiende sobre ciertos intervalos finitos de la velocidad del viento. El límite infinito de éstos es una velocidad crítica; sin embargo, entre el límite superior y la velocidad crítica, la estructura se encuentra prácticamente libre de vibraciones.

Existe información sobre la frecuencia de los vórtices que se desprenden de un cilindro circular expuesto al viento. Al tratarse de un flujo rectilíneo uniforme, la frecuencia de los vórtices, para números de Reynolds subcríticos, es:

$$f = S\left(1 - \frac{19.7}{Re}\right)\frac{v_0}{d}$$

y para números de Reynolds altos:

$$f = \frac{S\,v_0}{d}$$

donde S es el número de Strouhal que depende del de Reynolds, tal como se muestra en la Fig. 11.18. También aquí se observa que el número de Strouhal —en miembros circulares— aumenta desde 0.21 para $Re = 2 \times 10^5$ a 0.41 para $Re = 1.5 \times 10^6$; es decir, que para números de Reynolds grandes la frecuencia f es el doble que para números de Reynolds bajos. En el caso de una estructura cuya superficie plana se interpone al viento, en la figura mencionada se observa una completa independencia entre S y Re, para $Re > 10^5$. En las Refs. 69 y 70 se presentan los números de Strouhal para una gran variedad de perfiles estructurales.

Según Davenport, el período natural de vibración, de la mayoría de las estructuras, es del orden de 0.1 a 0.3 seg; para el caso de que estén próximas a las playas y se hallen rígidamente soportadas, el período es del orden de 0.5 a 3 seg. El efecto de resonancia es más importante en el caso de construcciones esbeltas; sin embargo, siempre es conveniente verificar que la estructura no se encuentre en la zona peligrosa, sobre todo tratándose de puentes colgantes y de antenas. Cuando la estructura tiene alguna forma especial conviene experimentar —con modelos— en túneles de viento.

11.8 Empuje hidrodinámico sobre pilas de puente

Las solicitaciones ocasionadas por el empuje dinámico del agua sobre las pilas de apoyo de un puente, en los códigos y especificaciones referentes a su análisis estructural, siempre se consideran como de importancia secundaria; ello es cierto cuando la dirección principal de la corriente en el río coincide con el eje longitudinal de la pila. Sin embargo, Apelt e Isaacs (Ref. 71) han demostrado que, ante la presencia de un ángulo pequeño de esviajamiento entre la corriente y la pila, pueden ocurrir sobre ésta grandes componentes del empuje, normales a la dirección del flujo. En este caso concurren las dos componentes de arrastre y sustentación: la primera se refiere a la que va en dirección del flujo; la segunda, en sentido perpendicular al mismo. Si una pila de puente se desplanta sobre el lecho de un río donde pueden ocurrir grandes avenidas, ignorar estas fuerzas o estimarlas demasiado puede conducir a consecuencias desastrosas debido —principalmente— a que la resistencia al volteo, de la mayoría de las pilas convencionales, es menor en dirección de la sustentación que en la del arrastre.

Apelt e Isaacs han realizado pruebas para estimar los coeficientes de arrastre y sustentación en los tipos de pila convencionales; están incluidas en la Ref. 71.

Los resultados de los ensayes mencionados permiten hacer una estimación preliminar de las fuerzas hidrodinámicas que han de esperarse sobre una pila, así como verificar la importancia que tengan en el análisis estructural de la misma; a la vez permiten cerciorarse si conviene realizar un estudio en modelo reducido para un problema particular. En dicho estudio se necesita determinar el efecto que tiene la distribución real de velocidades, en el flujo sobre los coeficientes de empuje, ya que de acuerdo con Masch y Moore esto puede ser de importancia.

11.9 Cavitación

Es un fenómeno (exclusivo de los líquidos) producido por la baja que sufre la presión debida a los efectos dinámicos de un líquido al escurrir, siguiendo fronteras curvas o alrededor de cuerpos sumergidos. Consiste en un cambio —rápido y explosivo— de la fase de líquido a vapor, al ocurrir en algún punto baja de la presión, hasta un valor crítico o por debajo de él. Por lo común, la presión crítica es igual o ligeramente inferior a la de vaporización (subcapítulo 1.7).

Inicialmente, en virtud del citado fenómeno se presentan cavidades de vapor de agua que crecen rápidamente, viajan con el flujo y se colapsan al entrar a regiones de mayor presión. Si éste fenómeno ocurre cerca o en contacto de una pared sólida, las fuerzas ejercidas por el líquido al empujar sobre las cavidades crean presiones muy grandes y localizadas, que causan deterioro en la superficie, pues se acompaña al fenómeno un golpeteo y fuertes vibraciones. Es el caso de las turbinas hidráulicas de reacción en las que se produce cavitación en el rodete, al trabajar con fuertes cargas de succión.

La posibilidad de cavitación puede evaluarse en términos del coeficiente σ de cavitación (Ec. 5.22c) definido por:

$$\sigma = \frac{p - p_v}{\rho\dfrac{v_0^2}{2}}$$

donde p es la presión absoluta en el punto de interés; p_v es la presión de vaporización del líquido; ρ su densidad; y v_0 la velocidad de referencia, comúnmente en la zona sin disturbios. El coeficiente de cavitación es una forma de coeficiente de presión (subcapítulo 5.3), de tal modo que dos sistemas geométricamente similares tendrían las mismas posibilidades o igual grado de cavitación para el mismo valor de σ; cuando $\sigma = 0$, la presión se reduce a la de vaporización, y es el caso de la ebullición del líquido.

En un sistema hidráulico la protección contra la cavitación se puede lograr mediante un buen diseño a fin de evitar, en lo posible, presiones muy bajas. En otros casos se pueden también usar pequeñas cantidades de aire inyectadas en la zona en la que se produzca el fenómeno; otros

estudios recientes indican que también es útil la protección catódica.

En la División de Investigaciones de la Facultad de Ingeniería de la UNAM (Ref. 72), G. Echávez ha realizado estudios para explicar la erosión que produce el agua, en revestimientos de concreto, cuando fluye a grandes velocidades en túneles y canales. El fenómeno se atribuye a la cavitación y se presentan criterios para cuantificar la magnitud de los daños en futuras obras, en las que se espera este tipo de fenómeno.

PROBLEMAS

1. Una placa plana y lisa, de 0.61 m × 2.44 m, es arrastrada a profundidad en agua dulce a 16°C y a 3.00 m/seg. Debido a la profundidad a que se efectúa, el arrastre por onda es despreciable. Calcular la fuerza de arrastre: *a)* cuando la placa es normal a la dirección del movimiento; *b)* cuando el plano de la placa y el lado de 0.61 m son paralelos a la dirección del movimiento; *c)* cuando el plano de la placa y el lado de 2.44 m son paralelos a la dirección del movimiento. Suponer que la transición de la capa límite ocurre para $Re_x = 5 \times 10^5$, para las partes *b)* y *c)*. Despreciar los efectos del canto de la placa.

2. Repetir el problema 1 en sus partes (*b*) y (*c*), para una capa límite completamente turbulenta, despreciando nuevamente los efectos del canto de la placa.

3. Un avión de 61 m de longitud tiene un área superficial de 1 400 m² y vuela a 96 km/h en el aire estándar. Determinar la potencia requerida para vencer la resistencia por fricción, suponiendo que el arrastre es equivalente al de una placa plana lisa de la misma longitud y área.

4. Un barco de 49 m de longitud tiene un área de casco de 300 m². Un modelo liso a escala 1:16 se mueve a 12 m/seg en agua dulce a 16°C. *a)* Determinar el arrastre por fricción en el modelo; *b)* si el modelo probado se basa en la ley de similitud de Froude, determinar el arrastre por fricción en el prototipo en agua salada a 16°F, así como a la velocidad que tenga similitud con la del modelo.

5. Un cuerpo de perfil aerodinámico cae a velocidad permanente en la atmósfera y tiene una capa límite laminar sobre la mayor parte de su longitud. Debido a una disturbio externo, la capa límite pasa a ser predominantemente turbulenta. Si la velocidad de caída aumentara, indicar si la capa sería la misma o cambiaría; explique la respuesta.

6. El modelo en cera y liso de un barco se remolca en agua dulce a 19°C. El arrastre total, a una velocidad de 1.39 m/seg, es de 2.71 kg; la superficie mojada del casco —en el modelo— es de 7.2 m². *a)* Determinar el arrastre por fricción en el modelo; *b)* calcular el arrastre de onda residual para el modelo (suponiendo que la ley de similitud es la de Froude) y la potencia que debe ser proporcionada por la hélice de un barco semejante (de 122 m de longitud en agua salada a 15°C) para vencer dicho efecto; *c)* determinar el arrastre por fricción para el prototipo; *d)* obtener el arrastre de onda para el prototipo; *e)* calcular la potencia requerida en la hélice del prototipo.

7. Una barcaza de 30 m de longitud y 12 m de ancho, sumergida a la profundidad de 0.90 m se mueve a una velocidad de 1.03 m/seg en agua a 17°C. Dar una estimación de la fuerza de resistencia —por fricción— al movimiento.

8. Un objeto tiene un área proyectada de 0.9 m² en la dirección de su movimiento. Tiene un coeficiente de arrastre total de 0.4 para un número de Reynolds de 10⁷, al utilizar una longitud característica de 1.5 m. Para este número de Reynolds: *a)* ¿cuál es el arrastre sobre el objeto cuando se mueve en agua a 17°C? *b)* ¿cuál es el arrastre cuando se mueve en el aire a 17°C y 1.033 kg/cm² de presión absoluta?

9. Un cuerpo viaja en el aire a 17°C, con una velocidad de 30 m/seg y se necesitan 8 CV para la operación. Si el área proyectada es

de 0.9 m² en la dirección del movimiento, determinar el coeficiente de arrastre.

10. Un submarino de 92 m de longitud tiene un área superficial de 1 800 m² y viaja a 10 nudos (5.15 m/seg), sumergido en agua salada a 10°C. Determinar el arrastre por fricción considerándolo equivalente al de una placa plana, de la misma longitud y área, con una rugosidad equivalente a la del casco típico de un barco.

11. Dos cilindros largos de 0.30 m de diámetro son arrastrados en agua (20°C) con sus ejes normales a la dirección del movimiento. A una velocidad de 2.66 m/seg el arrastre de un cilindro fue de 120.5 kg/m de longitud y en el otro, de 65.5 kg/m. Estimar la rugosidad de los dos cilindros.

12. Explicar por qué el coeficiente de arrastre para una placa cuadrada (considerada normal a la dirección de la corriente), es menor que el de una placa larga (longitud/ancho = 20) del mismo ancho y también normal a la dirección de la corriente. ¿Cuál es la relación entre las fuerzas de arrastre de las dos placas, para un número de Reynolds mayor que 10³?

13. Una sección de ala tiene las características mostradas en la Fig. 11.11 y se pretende usar como ala de un avión; tiene una cuerda de 2.44 m y 14.65 m de longitud en cada ala. Las alas tendrán que soportar un aeroplano de 6 500 kg de peso. *a)* Determinar el ángulo de ataque necesario para volar a 112 km/h en atmósfera estándar. *b)* Determinar la potencia necesaria para vencer el arrastre de las alas, en estas condiciones.

14. Determinar el momento flexionante máximo sobre una pila cilíndrica, de 0.35 m de diámetro y 12 m de altura, dentro de agua de mar en una corriente de marea cuya velocidad promedio es de 2.6 m/seg.

15. ¿Qué potencia se requiere para vencer el arrastre sobre una antena de radio —de 1.20 m de longitud y 6mm de diámetro— montada sobre un automóvil que viaja a 100 km/h en aire estándar?

16. Representar la distribución de presiones, en el problema 11.1, mediante el coeficiente de presión C_p en cada punto. Calcular el coeficiente de sustentación.

17. Sea una pila de puente vertical de sección transversal elíptica con una relación 1:3 entre los ejes menor y mayor. El eje mayor está alineado en dirección paralela al flujo y mide 1.83 m. El coeficiente de arrastre para esta sección elíptica depende del número de Reynolds como sigue:

Número de Reynolds (long. característica = = eje menor)	C_D
10^4	0.50
10^5	0.12
10^6	0.12
10^7	0.14

Determinar la fuerza de arrastre sobre la pila, en 6 m de altura, en agua —a 16°C —que fluye a 1.83 m/seg.

18. Un anuncio de 3 × 15 m está expuesto libremente al viento. Estimar la fuerza total de presión debida a un viento de 68 km/h usando: *a)* la curva de distribución de presiones de la Fig. 11.8; *b)* el coeficiente de arrastre de la Fig. 11.5 con la corrección de la Fig. 11.10; explicar por qué no son iguales las dos respuestas.

19. Un perfil aerodinámico —en forma de ala de avión —de 0.074 m², es probado en un túnel de viento a presión (p = 5 kg/cm², T = 27°C y ρ = 0.117 kg seg²/m⁴) y con una velocidad de 67 m/seg. La sustentación medida es de 9.5 kg y el arrastre de 4.3 kg. Determinar los coeficientes de sustentación C_L y de arrastre C_D.

20. Una esfera de 0.30 m de diámetro, con una densidad 1.5 veces la del agua, se deja caer en agua (16°C) de extensión muy grande. Determinar la velocidad terminal que alcanza la esfera.

21. Suponga que el granizo está formado por esferas lisas de γ = 750 kg/m³; determinar la velocidad final de las mismas en aire estándar para diámetros de: *a)* 2.5 mm;

b) 18 mm; y *c)* 25 mm. Hacer una hipótesis que considere a la velocidad final del granizo como una función del diámetro, para el rango involucrado de número de Reynolds (Ver prob. 29)

22. ¿Cuál es la velocidad de caída de un grano de arena esférico, de 0.18 mm de diámetro y un peso específico $\gamma = 2\,650$ kg/m³, en agua estancada a 21°C? *Nota.* Si se considera la Ley de Stokes, se debe verificar que $R_e > 0.1$ para que pueda usarse la Ec. (11.15).

23. Determinar el diámetro de una esfera para medir la velocidad de las corrientes litorales, a una altura de 0.30 m desde el fondo del mar, haciendo uso del arrastre de la esfera. Por ejemplo, suponga que la esfera se monta sobre una barra vertical y que el momento flexionante se mide con dispositivos de deformación. Use la esfera lisa más grande, que resulte práctica para agua a 10°C que fluye a velocidades de 0.30 a 1.50 m/seg.

24. El coeficiente de arrastre de un paracaídas es $C_D = 1.33$. Determinar el tamaño requerido del paracaídas para limitar la velocidad final del sistema hombre (de 91 kg)-paracaídas, a un valor no mayor que la velocidad de caída libre, desde una altura de 2.75 m.

25. Durante una gran avenida, el agua de un río cargada de sedimento entra a un gran vaso de almacenamiento, el cual tiene una profundidad máxima de 6 m. Suponiendo que las partículas más finas tienen un diámetro de 0.009 mm y un peso específico de 2 650 kg/m³, estimar el tiempo requerido para que todo el sedimento se deposite en el fondo del embalse (la viscosidad del agua es de 9.76×10^{-5} kg seg/m²).

26. Una esfera de aluminio ($\gamma = 2.81$ ton/m³) y una de magnesio ($\gamma = 1.82$ ton/m³) caen libremente en agua. ¿Cuál sería la relación entre sus diámetros con el fin de que el movimiento permanente alcanzado para ambas, fuese dinámicamente semejante?

27. Cuando se determina la viscosidad dinámica de un fluido midiendo la velocidad final v_s de una esfera que cae dentro de él, el número de Reynolds puede ser superior a 0.1, hasta el cual vale la ley de Stokes. Cuando $0.1 < R_e < 100$, demostrar que si se usa la Ec. (11.16) para el coeficiente de arrastre, la viscosidad se puede encontrar de la ecuación

$$\mu^2 + \left(\frac{3\,D\rho v_s}{16}\right)\mu - \mu_1{}^2 = 0,$$

donde μ_1 es la viscosidad si fuera válida la ley de Stokes (Ec. 11.15).

28. Una esfera lisa de acero, de 3.2 mm de diámetro ($\rho = 800$ kg seg²/m⁴), cae en movimiento permanente —a una velocidad de 0.366 m/seg— en un gran recipiente de aceite cuya densidad es de 86.9 kg seg²/m⁴. Determinar la viscosidad del aceite bajo las siguientes condiciones: *a)* suponiendo flujo laminar, de modo que sea válida la ley de Stokes; *b)* suponiendo que el número de Reynolds es mayor que 0.1, hasta el cual es válida la ley de Stokes (refiérase al problema 27).

29. Demostrar que para una esfera que cae dentro de un fluido, la velocidad final se puede obtener de la ecuación:

$$C_D\,v_s{}^2 = \frac{4\,d\,g}{3}\left(\frac{\rho_e}{\rho_f} - 1\right)$$

para $R_e > 0.1$: por iteraciones (se supone v_s, se calcula R_e, se obtiene C_D, se calcula $C_D\,v_s{}^2$ y se compara con el valor requerido).

30. Un instrumento de investigación oceanográfica tiene la forma de un elipsoide con un diámetro máximo de 0.15 m y una longitud de 1.20 m. El instrumento es remolcado en la dirección de su eje mayor —a velocidades que varían de 0.60 m/seg a 2.4 m/seg— a una profundidad de 0.12 m (desde la superficie del agua sin disturbios hasta la línea de simetría del elipsoide). Las pruebas realizadas en túnel de viento, sobre un objeto de forma similar dentro del rango de números de Reynolds, indican un coeficiente de arrastre (basado sobre el área de la sección transversal máxima) de 0.10. Representar gráficamente la fuerza de arrastre como una función de la velocidad en agua de mar a 20°C.

31. La forma de un submarino se puede aproximar por un elipsoide que tiene una longitud de 30 m y un diámetro máximo de 3 m. Determinar la velocidad de crucero óptima, cuando el submarino opere cerca de la superficie, si la velocidad máxima posible es de 10.7 m/seg.

32. Las pruebas de arrastre de un elipsoide de 0.03 m de diámetro se han realizado en un túnel de viento de gran velocidad, operado con aire a la presión atmosférica y temperatura estándar. La siguiente tabla resume los resultados experimentales para el coeficiente de arrastre, contra el número de Reynolds, para este elipsoide:

R_e	C_D
6×10^4	0.50
2×10^5	0.50
3×10^5	0.18
5×10^5	0.20
6.6×10^5	0.80
1×10^6	1.00

a) Determinar el arrastre en kg para un elipsoide, geométricamente similar, de 0.12 m de diámetro, viajando en aire estándar a una velocidad de 60 m/seg. *b)* Representar gráficamente los datos indicados arriba y explicar el significado de la forma de las distintas porciones de la curva. *c)* Estimar el arrastre en kg para un elipsoide similar, de 0.12 m de diámetro, viajando en agua (temperatura estándar) con una velocidad de 5.5 m/seg. La profundidad de sumersión es muy grande en comparación con el diámetro del elipsoide.

33. Un cilindro rotatorio, de 0.15 m de diámetro, se mueve en agua con una velocidad de 6 m/seg y está sujeto a una fuerza de sustentación de 595 kg/m de longitud. Determinar el coeficiente de sustentación y la velocidad teórica de rotación del cilindro (en r.p.m.).

34. Suponga que la distribución de velocidades, alrededor de la mitad frontal de una esfera en un fluido real, se puede aproximar por $v_\theta = 3/2\ v_0$ sen θ; y que la separación de la capa límite ocurre para $\theta = 90°$. *a)* Determinar la magnitud del coeficiente de arrastre si la presión resultante en la estela es p_0 y representa la presión estática dentro del flujo sin disturbios. Considerar que $v_0 = 6$ m/seg en agua a 20°C y que el diámetro de la esfera es de 0.30 m. *b)* Determinar la presión p_0 para la cual es de esperarse cavitación en la esfera para la misma v_0.

35. Obtener una expresión para la presión $(p - p_0)\ /\ (\rho\,v_0{}^2/2)$ en términos de θ, ρ, v_0, R y Γ, alrededor de la superficie de un cilindro para un flujo permanente e incompresible, alrededor del cilindro: *a)* sin circulación; *b)* con puntos de estancamiento para $\theta = 5\pi/4$ y $7\pi/4$; *c)* con puntos de estancamiento que coinciden con $\theta = 3\pi/2$ (refiérase a la Fig. 11.16); *d)* determinar la magnitud de la fuerza de sustentación por unidad de longitud del cilindro, así como el valor de θ para el cual la presión sobre la superficie del cilindro es la misma que la presión estática p_0 para el flujo sin disturbios.

36. Aire estándar fluye libremente con velocidad $v_0 = 30$ m/seg, en torno a un cilindro cuyo eje es normal al flujo. Una circulación de 18.6π m²/seg rodea al cilindro, el cual tiene un radio de 0.30 m. Determinar sobre la superficie del cilindro: *a)* la velocidad tangencial debida a la circulación, *b)* la velocidad máxima del aire; *c)* los puntos de estancamiento; *d)* la diferencia entre las presiones máxima y mínima, y *e)* la sustentación por m de longitud del cilindro.

37. Un cilindro de 1.80 m de diámetro y 3 m de altura gira alrededor de su eje horizontal, a 120 rpm, en una corriente de aire estándar que fluye en torno al cilindro, con velocidad de 9 m/seg. La rotación produce una circulación con el 50 % de efectividad, respecto de la de un vórtice irrotacional que tiene la misma velocidad periférica sobre la superficie del cilindro. Determinar la fuerza de sustentación sobre el cilindro.

38. Comprobar que el empuje total del viento sobre una cartelera circular es —esencialmente— la misma que sobre una cartelera

cuadrada de igual área, para el viento que sopla en dirección normal al plano de la cartelera.

39. *a)* Determinar la velocidad final de un paracaidista de 91 kg de peso que cae en aire estándar. El paracaídas es de 4.30 m de diámetro y tiene un coeficiente de arrastre $C_D = 1.1$. *b)* ¿Desde qué altura tendría que saltar el citado hombre para alcanzar la misma velocidad que el caso anterior, si se desprecia la resistencia del aire?

APÉNDICES

APÉNDICE A.

ANALISIS DIMENSIONAL

A.1 Introducción

Antes de proceder a discutir el análisis dimensional debe ser bien entendida la relación entre una magnitud física, sus dimensiones y la unidad usada para cuantificarla.

Cualquier observación directa de la naturaleza, ordinariamente se puede relacionar con la magnitud de la cantidad física medida; cuando dicha magnitud depende de la unidad de medida elegida, se dice que la cantidad tiene dimensiones: *fundamentales* o *derivadas*. Si entre las dimensiones de las magnitudes físicas —factibles de medirse— algunas se eligen como fundamentales (esto es, independientes de cualquier otra), entonces las restantes se pueden expresar en términos de estas dimensiones fundamentales y adquieren el nombre de dimensiones derivadas.

La longitud y el tiempo son considerados como fundamentales en todos los sistemas dimensionales en la Mecánica. En algunos de éstos la masa se considera dimensión fundamental y la fuerza como dimensión derivada; en otros sistemas se adopta lo contrario. Existe en ingeniería una gran variedad de sistemas de unidades de medida, pero los indicados a continuación son los más comúnmente usados.

A.2 Sistemas de unidades

Las magnitudes físicas se cuantifican en términos de las dimensiones fundamentales y, para ello, se utilizan dos sistemas de unidades de medida: *absoluto* y *gravitacional*. En el primer sistema las dimensiones fundamentales son masa, longitud, tiempo $[M, L, T]$; en el segundo, fuerza, longitud, tiempo $[F, L, T]$. En lo que sigue se utilizará la notación $[\ ]$ para indicar las dimensiones fundamentales usadas para medir una magnitud física.

El sistema gravitacional $[F, L, T]$ —llamado también *técnico*— es el más utilizado en los problemas de ingeniería, a pesar de que el peso de un cuerpo representa una fuerza que varía de un lugar a otro de acuerdo con la aceleración de la gravedad. Por el contrario, la masa del cuerpo es siempre constante y por esta razón el sistema absoluto $[M, L, T]$ ha sido elegido como el sistema científico internacional.

Para relacionar las unidades de medida entre los sistemas absoluto y gravitacional, se usa la segunda ley de Newton del movimiento:

$$F \backsim M a$$

o bien,

$$F = \frac{M}{g_c} a \qquad (A.1)$$

donde a es la aceleración $[LT^{-2}]$ y g_c es un factor de conversión, entre las distintas unidades, que tiene dimensiones dependientes de las elegidas para la masa, fuerza, longitud y tiempo. No tiene relación alguna con la aceleración estándar de la gravedad, pues su magnitud y dimensiones dependen del sistema de unidades que se elija. Para establecer las unidades de medida se emplean diferentes convenciones que pueden agruparse en dos grandes sistemas: el métrico y el inglés, los cuales pueden ser absolutos o gravitacionales. Dentro del sistema de unidades métricas hay cuatro sistemas básicos en la Mecánica.

Sistema MKS absoluto. Las unidades fundamentales son el metro (m) para la longitud, el kilogramo masa (kg_m) para la masa, y el segundo (seg) para el tiempo. La unidad derivada para la fuerza es el newton (N) definido como la fuerza que aplicada sobre 1 kg_m— le produce una aceleración de 1 m/seg².

De acuerdo con esta definición, en la Ec. (A.1) se tiene que

$$[1 \text{ N}] = \frac{1}{g_c} [1 \text{ kg}_m][1 \text{ m/seg}^2]$$

donde:

$$g_c = 1 \frac{\text{kg}_m \text{ m}}{\text{N seg}^2}$$

y, de la definición, resulta:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg}_m \text{ m/seg}^2 \qquad (A.2)$$

Sistema MKS gravitacional. Las unidades fundamentales son el metro (m) para la longitud, el kilogramo fuerza (kg) para la fuerza, y el segundo (seg) para el tiempo. La unidad derivada de masa es el kg_m que adquiere la aceleración gravitacional estándar, $a = 9.80665$ m/seg², cuando se le aplica una fuerza de 1 kg. De la Ec. (A.1) resulta:

$$[1 \text{ kg}] = 1/g_c [1 \text{ kg}_m][9.80665 \text{ m/seg}^2]$$

por lo tanto:

$$g_c = 9.80665 \frac{\text{kg}_m \text{ m}}{\text{kg seg}^2}$$

y, de la definición, nos da:

$$1 \text{ kg}_m = \frac{1}{9.80665} \text{ kg seg}^2/\text{m} =$$

$$= 0.101972 \text{ kg seg}^2/\text{m} \qquad (A.3)$$

Combinando las Ecs. (A.2) y (A.3), tenemos que:

$$1 \text{ kg} = 9.80665 \text{ N}$$

Sistema CGS absoluto. Las unidades fundamentales son el centímetro (cm) (1 cm = 10^{-2} m) para la longitud, el gramo masa (g_m) (1 g_m = 10^{-3} kg_m) para la masa, y el segundo (seg) para el tiempo. La unidad derivada para la fuerza es la dina, fuerza que —aplicada sobre un g_m— le imparte una aceleración de 1 cm/seg². De acuerdo con esta definición, en la Ec. (A.1) se tiene:

$$[1 \text{ dina}] = 1/g_c [1 \text{ g}_m][1 \text{ cm/seg}^2]$$

y por lo tanto

$$g_c = 1 \frac{\text{g}_m \text{ cm}}{\text{dina seg}^2}$$

entonces:

$$1 \text{ dina} = 1 \frac{\text{g}_m \text{ cm}}{\text{seg}^2} \qquad (A.4)$$

Sistema CGS gravitacional. Las unidades fundamentales son el centímetro (cm) para la longitud, el gramo fuerza (g) (1 g = 10^{-3} kg) para la fuerza, y el segundo (seg) para el tiempo. La unidad derivada para la masa es el gramo masa (g_m) que, al aplicarle la fuerza de 1 g, adquiere la aceleración gravitacional estándar $a = 980.665$ cm/seg².

De la Ec. A.1 resulta:

$$1 \text{ g} = \frac{1}{g_c} \text{g}_m \times 980.665 \text{ cm/seg}^2$$

La constante g_c en este sistema es

$$g_c = 980.665 \frac{\text{g}_m \text{ cm}}{\text{g seg}^2}$$

y, de la definición, nos da:

$$1 \text{ g}_m = \frac{1}{980.665} \frac{\text{g seg}^2}{\text{cm}} \qquad (A.5)$$

Por comparación de las Ecs. (A.4) y (A.5), resulta entonces:

$$1 \text{ g} = 980.665 \text{ dinas}$$

Dentro del sistema de unidades inglesas existen tres sistemas básicos de unidades usados en la Mecánica, cuyo análisis se puede hacer en la misma forma que el de los sistemas de unidades métricas presentado anteriormente. En la tabla A.1 se presenta una síntesis de los sistemas antes mencionados.

Cuando la magnitud física es muy grande o muy pequeña, respecto de la unidad de medida, se suelen adoptar unidades proporcionales a las antes indicadas anteponiendo, al nombre de la unidad de medida, los términos que a continuación se indican. La unidad se aumenta o disminuye de acuerdo con el factor de proporcionalidad que aparece a la derecha del término usado:

G = Giga —— (10^9)
M = Mega —— (10^6)
k = Kilo —— (10^3)
d = Deci —— (10^{-1})
c = Centi —— (10^{-2})
m = Mili —— (10^{-3})

por ejemplo:

1 kilómetro = 1 km = 10^3 m
1 kilonewton = 1 kN = 10^3 N
1 megawatt = 1 MW = 10^6 W

Por lo que respecta a la medida de la temperatura [T], en el sistema métrico se utiliza la escala centecimal, cuya unidad es el grado centígrado (°C); en el sistema inglés la escala es de grados Fahrenheit (°F). La conversión para ambas escalas es como sigue:

$$°F = \frac{9}{5}(°C + 32) \text{ (grados Fahrenheit)}$$

$$°C = \frac{5}{9}(°F - 32) \text{ (grados centígrados)}$$

La aceleración gravitacional en un punto sobre la Tierra varía con su latitud geográfica ϕ y con su elevación h, en me-

tros sobre el nivel del mar, de acuerdo con la siguiente ley (Ref. 30):

$$g = 9.781\,(1 + 0.00524\,\text{sen}^2\,\phi) \times$$

$$\times\,(1 - 0.000000315\,h)\ (\text{en m/seg}^2)$$

El valor estándar de g es 9.80665 m/seg², determinada al nivel del mar y a 45° de latitud geográfica. En el observatorio de Tacubaya, D. F., $g = 9.779$ m/seg² y, para uso práctico, se puede considerar que en la República Mexicana $g = 9.8$ m/seg².

En el sistema inglés la aceleración gravitacional estándar es $g = 32.174$ pies/seg².

Problema A.1. Determinar el peso W de un cuerpo cuya masa es de 1 kg_m, en un punto sobre la Tierra donde la aceleración gravitacional es $g = 9.144$ m/seg².

Solución. De la Ec. (A.1), tenemos que:

$$W = \frac{1}{g_o} Mg$$

Para el sistema MKS gravitacional, $g_o = 9.80665\ kg_m$ m/kg seg² y, entonces:

TABLA A.1. Sistemas de unidades

Sistema	*Longitud [L]*	*Masa [M]*	*Fuerza [F]*	g_o
MKS absoluto	metro (m)	kilogramo masa (kg_m) (fundamental)	Newton (N) (derivada)	$1\,\frac{kg_m\,m}{N\,seg^2}$
MKS gravitacional	metro (m)	kg seg²/m (derivada)	kilogramo fuerza (kg) (fundamental)	$9.80665\,\frac{kg_m\,m}{kg\,seg^2}$
CGS absoluto	centímetro (cm)	gramo masa (g_m) (fundamental)	dina (derivada)	$1\,\frac{g_m\,cm}{dina\,seg^2}$
CGS gravitacional	centímetro (cm)	g seg²/cm (derivada)	gramo fuerza (g) (fundamental)	$980.665\,\frac{g_m\,cm}{g\,seg^2}$
inglés absoluto	pie	libra masa (lb_m) (fundamental)	poundal (pdl) (derivada)	$1\,\frac{lb_m\,pie}{pdl\,seg^2}$
inglés gravitacional	pie	slug (derivada)	libra fuerza (lb) (fundamental)	$1\,\frac{slug\,pie}{lb\,seg^2}$
inglés ingeniería	pie	libra masa (lb_m) (fundamental)	libra fuerza (lb) (fundamental)	$32.174\,\frac{lb_m\,pie}{lb\,seg^2}$

$$W = \frac{1}{9.80665\ kg_m\ m/kg\ seg^2} \times$$

$$\times\ (1\ kg_m)\ (9.144\ m/seg^2)$$

por tanto:

$$W = 0.9324\ kg$$

Esto significa que cuando el kg_m se toma en un punto sobre la Tierra para el cual no corresponde la aceleración gravitacional estándar, su peso no es de 1 kg. Observamos que mientras g_o es una constante (no una aceleración), la aceleración gravitacional g varía según el lugar considerado sobre la superficie de la Tierra.

Para medir otras magnitudes físicas se utilizan unidades derivadas de los sistemas antes mencionados; algunos se indican en seguida.

La unidad del trabajo mecánico o de la energía, en el sistema MKS absoluto, es el joule (J), que vale:

$$1\ J = 1\ N\ m = 1\ kg_m\ m^2/seg^2 =$$

$$= 0.101972\ kg\ m$$

y en el gravitacional:

$$1\ kg\ m = 9.80665\ J = 9.80665\ N\ m =$$

$$= 9.80665\ kg_m\ m^2/seg^2$$

el equivalente mecánico del calor es la kilocaloría, a saber:

$$1\ kcal = 426.935\ kg\ m \approx 427\ kg\ m$$

$$1\ kcal = 4186.8\ J \approx 4187\ N\ m$$

$$1\ N\ m = 1\ J = 0.23884 \times 10^{-3} kcal \approx$$

$$\approx 0.239 \times 10^{-3}\ kcal$$

o bien, el kilojoule cuya equivalencia es:

$$1\ kJ = 10^3\ J = 101.972\ kg\ m = 0.239\ kcal$$

Para la potencia en watts (W) o en kilowatts (kW), tenemos:

$$1\ \ W = 1\ J/seg = 1\ N\ m/seg =$$

$$= 1\ kg_m\ m^2/seg^3 =$$

$$= 0.1019716\ kg\ m/seg$$

$$1\ kW = 10^3\ W = 1\ kJ/seg =$$

$$= 10^3\ kg_m\ m^2/seg^3 =$$

$$= 101.9716\ kg\ m/seg$$

A.3 Factores de conversión

Con frecuencia es necesario hacer transformaciones de las unidades de una magnitud física —en un determinado sistema— a las unidades de otro. Esto se puede hacer utilizando factores de conversión que relacionen las diferentes unidades de la misma clase, para lo cual es necesario cerciorarse de las unidades que intervienen en la medición de la magnitud física.

Por ejemplo, considere la identidad siguiente (pulgada plg):

$$1\ plg \equiv 2.54\ cm$$

que también se puede escribir como un factor de conversión, así:

$$\frac{1\ plg}{2.54\ cm} \equiv 1$$

El cambio de unidades no puede afectar, esencialmente, alguna ecuación de la física, ya que sólo equivale a multiplicar por uno. Además, como el recíproco de uno es también uno, entonces puede emplearse el recíproco de cualquier factor de conversión para obtener el resultado que se desea.

Así, la identidad que sigue se puede ampliar tanto como sea necesario:

$$1 = \frac{1 \text{ plg}}{2.54 \text{ cm}} = \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ plg}} =$$

$$= \frac{32.174 \text{ pdl}}{1 \text{ lb}} = \frac{1 \text{ lb}}{32.174 \text{ pdl}} =$$

$$= \frac{1 \text{ HP}}{746 \text{ W}} = \frac{1 \text{ milla}}{1\,760 \text{ yd}} =$$

$$= \frac{453.6 \text{ g}_m}{1 \text{ lb}_m} = \frac{4.18 \text{ J}}{1 \text{ cal}}$$

La aplicación de los factores de conversión permite expresar en newtons —por ejemplo— una fuerza de 4.6 lb, a saber:

$$4.6 \text{ lb} = 4.6 \text{ lb} \frac{32.174 \text{ pdl}}{1 \text{ lb}} = 4.6 \times 32.174 \text{ pdl} =$$

$$= 4.6 \times 32.174 \frac{\text{lb}_m \text{ pie}}{\text{seg}^2} =$$

$$= 4.6 \times 32.174 \frac{\text{lb}_m \text{ pie}}{\text{seg}^2} \times$$

$$\times \frac{0.4536 \text{ kg}_m}{1 \text{ lb}_m} \times \frac{0.3048 \text{ m}}{1 \text{ pie}} =$$

$$= 4.6 \times 32.174 \times 0.4536 \times$$

$$\times 0.3048 \frac{\text{kg}_m \text{ m}}{\text{seg}^2} =$$

$$= 4.6 \times 32.174 \times 0.4536 \times$$

$$\times 0.3048 \text{ N} = 20.46 \text{ N}$$

El procedimiento detallado que se muestra aquí es, por lo común, innecesario, pero esta secuela de operaciones es la base lógica del uso de factores de conversión, el cual queda implícito en toda conversión correcta de unidades.

Problema A.2. La aceleración de la gravedad en St. Michael, Alaska, es de 9.821 m/seg² y, en la zona del canal de Panamá, de 9.782 m/seg². Calcular —para cada uno de estos puntos— el peso de un cuerpo cuya masa es de 3 slugs.

Solución. Siendo 1 slug = 1.488 kg seg²/m, los pesos en St. Michael y en el canal de Panamá son, respectivamente:

$$W = 3 \times 1.488 \times 9.821 = 43.841 \text{ kg}$$

$$W = 3 \times 1.488 \times 9.782 = 43.667 \text{ kg}$$

Problema A.3. Hacer las siguientes transformaciones:

a) Obtener la masa, en g_m, de un cuerpo que pesa una dina en un lugar donde $g = 980$ cm/seg².

Solución:

$$M = \frac{1}{980} \text{ g}_m$$

b) Obtener la masa, en kg_m, de un cuerpo que pesa un newton en el mismo lugar del punto *a)*.

Solución:

$$M = \frac{1}{9.80} \text{ kg}_m$$

c) Obtener la masa, en slugs, de un cuerpo cuyo peso es de una libra en un lugar donde $g = 32$ pie/seg².

Solución:

$$M = \frac{1}{32} \text{ slugs}$$

Problema A.4. Expresar, en m³/seg, el gasto $Q = 120$ gal/min.

Solución. Son válidas las siguientes conversiones:

$$1 \text{ gal} = 0.13368 \text{ pie}^3$$

$$1 \text{ pie}^3 = 0.028317 \text{ m}^3$$

$$1 \text{ min} = 60 \text{ seg}$$

además:

$$Q = 120 \frac{\text{gal}}{\text{min}} \times 0.13368 \frac{\text{pie}^3}{\text{gal}} \times$$

$$\times 0.0283170 \frac{\text{m}^3}{\text{pie}^3} \times \frac{1}{60} \frac{\text{min}}{\text{seg}}$$

por tanto:

$$Q = 0.00757 \text{ m}^3/\text{seg}$$

Problema A.5. Transformar la fórmula de Manning —que abajo se escribe en sistema inglés— al sistema métrico MKS.

$$V = \frac{1.486}{n} R_h^{2/3} S^{1/2}$$

donde:

- n coeficiente de rugosidad, sin dimensiones;
- V velocidad media, en pies/seg;
- R_h radio hidráulico, en pies;
- S pendiente, sin dimensiones;

Solución. El coeficiente $c = 1.486$ tiene las dimensiones siguientes:

$$\left[\frac{\text{pie}}{\text{seg}}\right] = c\,[\text{pie}^{2/3}]$$

$$[c] = \left[\frac{\text{pie}^{1/3}}{\text{seg}}\right]$$

Por lo tanto:

$$1.486 \frac{\text{pie}^{1/3}}{\text{seg}} (0.3048)^{1/3} \frac{\text{m}^{1/3}}{\text{pie}^{1/3}} =$$

$$= 1.000 \frac{\text{m}^{1/3}}{\text{seg}}$$

La fórmula es, entonces:

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} S^{1/2}$$

donde V se expresa en m/seg y R_h en m.

A.4 Análisis dimensional

El teorema fundamental en que se basa el análisis dimensional es el llamado teorema π o de Vaschy-Buckingham, el cual puede enunciarse como sigue: toda relación dimensionalmente homogénea * —como la representada por la ecuación $F(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m) = 0$— entre m magnitudes físicas A_i susceptibles de ser expresadas en términos de n dimensiones fundamentales de medida (por ejemplo, en el sistema absoluto son: masa, longitud, tiempo), implica la existencia de otra relación de la forma $f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{m-n}) = 0$, entre $m-n$ parámetros π_i. Dichos parámetros tienen la propiedad de ser funciones monómicas, adimensionales e independientes entre sí, y que son los productos de grupos distintos de las potencias de $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$, de la forma

$$\pi_i = A_1^{k_1} A_2^{k_2} A_3^{k_3} \ldots A_m^{k_m}$$

* Una relación es dimensionalmente homogénea cuando se verifica independientemente de la elección de sus unidades fundamentales de medida. Es el caso de las ecuaciones fundamentales de las distintas ramas de la Mecánica.

Los exponentes k_i se relacionan entre sí de acuerdo con las dimensiones de cada magnitud variable A_i, de tal manera que con las n dimensiones fundamentales se obtiene un sistema de n ecuaciones con m incógnitas: $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_m$. Podrán, entonces elegirse arbitrariamente los valores de un número $m-n$ de las incógnitas k_i, para lo cual conviene seleccionar n de las m magnitudes variables A_i, para que aparezcan en cada uno de los $m-n$ parámetros π_i, que se llamarán variables repetitivas. Éstas tendrán las siguientes características:

a) Deben contener, en conjunto, las n dimensiones fundamentales.

b) En el caso de un fluido, las variables repetitivas más importantes serán: una dimensión geométrica importante, una propiedad del fluido y una característica del flujo.

c) Si se desea despejar una de las variables de la función $f(\pi_i) = 0$ ésta no deberá usarse como variable repetitiva.

De esta manera se pueden obtener los exponentes k de las variables repetitivas, a partir de los correspondientes a las variables restantes, los que se eligen arbitrariamente en el sistema de ecuaciones antes mencionado. La demostración del teorema de Vaschy-Buckingham sale del alcance de este libro, pero puede consultarse en la Ref. 73. Para utilizar dicho teorema es necesario conocer con seguridad las variables más importantes en el fenómeno por estudiar, pues una apreciación errónea puede conducir, aun con el análisis dimensional, a aplicaciones falsas. La identificación de esas magnitudes físicas debe hacerse después de un análisis físico y de un completo entendimiento del problema.

En resumen, un análisis dimensional es útil para:

a) comprobar cualitativamente las ecuaciones;

b) determinar las dimensiones de los coeficientes empíricos;

c) establecer y realizar experimentos generalizando los resultados;

d) formular leyes de similitud de considerable importancia en la investigación experimental.

La técnica del análisis dimensional se aclara mejor mediante los siguientes problemas.

Problema A.6. El gasto Q, a través de un tubo capilar horizontal, depende principalmente de la caída de presión por unidad de longitud $\Delta p/l$, del diámetro D del tubo y de la viscosidad dinámica μ del fluido. Mediante el análisis dimensional encontrar la forma de la ecuación para el gasto.

Solución. La función F es: $F(Q, \Delta p/l, D, \mu) = 0$. Las $m = 4$ variables físicas se expresan en términos de las $n = 3$ dimensiones fundamentales, según lo indica la siguiente tabla, donde los números representan los exponentes de dichas unidades.

Dimensiones fundamentales	*Magnitudes variables*			
	Q	$\Delta p/l$	D	μ
M	0	1	0	1
L	3	—2	1	—1
T	—1	—2	0	—1

Habrá entonces $m - n = 1$ parámetro adimensional; esto es, existe la relación:

$$f(\pi_1) = 0$$

Si se eligen como variables repetitivas $\Delta p/l$, D y μ, el parámetro adimensional es de la forma:

$$\pi_i = \left[\frac{\Delta p}{l}\right]^{k_1} D^{k_2} \mu^{k_3} Q$$

esto equivale a elegir arbitrariamente el exponente de Q igual a 1. Por tanto —de acuerdo con la tabla— se debe satisfacer el sistema:

Para M: $k_1 + k_3 = 0$

Para L: $-2k_1 + k_2 - k_3 + 3 = 0$

Para T: $-2k_1 - k_3 - 1 = 0$

cuya solución es

$$k_1 = -1, \quad k_2 = -4, \quad k_3 = 1$$

El único parámetro adimensional es entonces:

$$\pi_1 = \frac{\mu Q}{D^4 \dfrac{\Delta p}{l}}$$

y la función f del único parámetro, la siguiente:

$$f\left[\frac{\mu Q}{D^4 \dfrac{\Delta p}{l}}\right] = 0$$

o bien,

$$\mu Q/(D^4 \Delta p/l) = C$$

y, de aquí:

$$Q = C \frac{\Delta p}{l} \frac{D^4}{\mu}$$

El análisis dimensional no da información acerca del valor numérico de la constante adimensional C. Un análisis matemático o bien, experimental, muestra que $C = \pi/128$. (Ec. B.6).

Problema A.7. Un vertedor triangular de pared delgada consiste en una placa vertical con una escotadura de ángulo central θ, practicada en la frontera superior de la placa (Fig. A.1) y colocada transversalmente en un canal, de modo que el líquido fluye a través de la escotadura. La descarga Q del vertedor es una función de la carga h sobre la cresta (desnivel entre la superficie libre del líquido antes del vertedor y la cresta), de la aceleración g de la gravedad, del ángulo θ y de la velocidad V_0 de llegada del líquido al vertedor. Determinar la ecuación para el gasto.

Solución. Las $m = 5$ variables físicas se expresan en términos de sólo $n = 2$ dimensiones fundamentales, por lo que hay sólo tres parámetros adimensionales, siendo $\pi_1 = \theta$ uno de ellos, por ser adimensional. Resulta entonces:

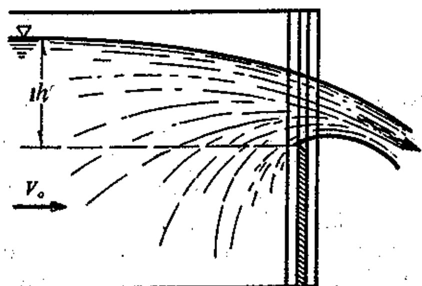
Dimensiones fundamentales	*Magnitudes variables*				
	Q	h	g	V_0	θ
L	3	1	1	1	0
T	—1	0	—2	—1	0

El sistema de ecuaciones es:

$$3k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$$

$$-k_1 - 2k_3 - k_4 = 0$$

Si se eligen como variables repetitivas h y g, conviene expresar k_2 y k_3 en términos de k_1 y k_4, a partir del sistema. De la segunda ecuación, tenemos:



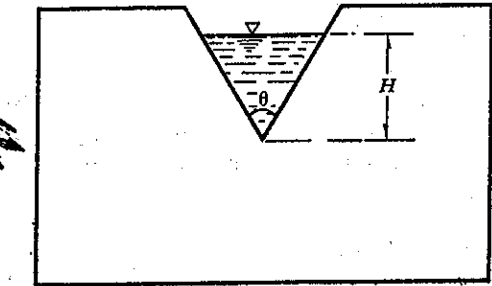


Figura A.1. Vertedor triangular.

$$k_3 = \left(-\frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{2}k_4\right)$$

substituida en la primera, resulta entonces:

$$k_2 = -\frac{5}{2}k_1 - \frac{1}{2}k_4$$

Así, se puede escribir finalmente:

$$\pi_i = Q^{k_1} h^{(-5k_1/2 - k_4/2)} g^{(-k_1/2 - k_4/2)} \times$$

$$\times V_0^{k_4} \theta^{k_5} = \left(\frac{Q}{\sqrt{g}\, h^{5/2}}\right)^{k_1} \left(\frac{V_0}{\sqrt{g h}}\right)^{k_4} \theta^{k_5}$$

Cada parámetro adimensional se obtiene eligiendo arbitrariamente las ternas de valores de k_1, k_4 y k_5. Así, por ejemplo:

con $k_1 = 1, k_4 = k_5 = 0;\quad \pi_1 = \dfrac{Q}{\sqrt{g}\, h^{5/2}}$.

con $k_1 = 0, k_4 = 1, k_5 = 0;\quad \pi_2 = \dfrac{V_0}{\sqrt{g h}}$;

con $k_1 = k_4 = 0;\quad k_5 = 1;\quad \pi_3 = \theta$.

Se puede entonces escribir:

$$f\left(\frac{Q}{\sqrt{g}\, h^{5/2}}, \frac{V_0}{\sqrt{g h}}, \theta\right) = 0$$

o bien:

$$\frac{Q}{\sqrt{g}\, h^{5/2}} = f_1\left(\frac{V_0}{\sqrt{g H}}, \theta\right)$$

despejando Q, resulta:

$$Q = \sqrt{g}\, h^{5/2} f_1\left(\frac{V_0}{\sqrt{g h}}, \theta\right)$$

Para obtener la función f_1 es necesario un análisis matemático o bien, mediciones experimentales (subcapítulo 7.2).

Otra forma de la función f se obtiene eligiendo h y V_0, como variables repetitivas, en lugar de h y g. De este modo, conviene expresar k_2 y k_4 en términos de k_1 y k_3; entonces, de la segunda ecuación del mismo sistema $k_4 = -k_1 - 2k_3$, que substituida en la primera, resulta ser:

$$k_2 = k_3 - 2k_1$$

Se obtiene entonces:

$$\pi_i = Q^{k_1} h^{(k_3 - 2k_1)} g^{k_3} V_0^{(-k_1 - 2k_3)} \theta^{k_5} =$$

$$= \left(\frac{Q}{h^2 V_0}\right)^{k_1} \left(\frac{g h}{V_0^2}\right)^{k_3} \theta^{k_5}$$

Si elegimos los valores arbitrarios $k_1 = 1$, $k_3 = -1/2$ y $k_5 = 1$, se puede escribir, análogamente:

$$f\left(\frac{Q}{h^2 V_0}, \frac{V_0}{\sqrt{g h}}, \theta\right) = 0$$

o bien,

$$Q = V_0\, h^2 f_2\left(\frac{V_0}{\sqrt{g h}}, \theta\right)$$

La función desconocida f_2 tiene los mismos parámetros que f_1, pero las dos no son iguales. Esta segunda ecuación para Q no es muy útil, debido a que con frecuencia V_0 se puede despreciar en los vertedores triangulares. Esto demuestra que un término de segunda importancia no se debe elegir como variable repetitiva.

Problema A.8. Con base en el análisis dimensional determinar los parámetros adimensionales más importantes, en el fenómeno de descarga de un orificio circular practicado en la pared de un recipiente, donde las variables físicas más importantes son: V velocidad en el chorro; Δp diferencia de presiones antes y después del orificio; D (diámetro); μ (viscosidad del líquido); ρ (densidad).

Solución. Las $m = 5$ variables físicas se expresan en términos de las $n = 3$ dimensiones fundamentales, según lo indica la siguiente tabla, donde los números representan los exponentes de dichas dimensiones.

Dimensiones fundamentales	*Magnitudes variables*				
	V	Δp	D	μ	ρ
F	0	1	0	1	1
L	1	−2	1	−2	−4
T	−1	0	0	1	2

Habrá entonces $m - n = 2$ parámetros adimensionales; esto es, la relación:

$$f(\pi_1, \pi_2) = 0$$

y cada parámetro adimensional es de la expresión:

$$\pi_i = V^{k_1} \Delta p^{k_2} D^{k_3} \mu^{k_4} \rho^{k_5}$$

y, por tanto, de acuerdo con la tabla se debe satisfacer:

para F: $\quad k_2 + k_4 + k_5 = 0;$

para L: $\quad k_1 - 2k_2 + k_3 - 2k_4 -$
$\quad -4k_5 = 0;$

para T: $\; -k_1 + k_4 + 2k_5 = 0.$

Se utilizan como variables repetitivas V, D y ρ; conviene, entonces, escribir k_1, k_3 y k_5 en términos de k_2 y k_4.

De la primera ecuación:

$$k_5 = -k_2 - k_4$$

Substituyendo la tercera ecuación, obtenemos:

$$k_1 = -2k_2 - k_4$$

y, substituyendo en la segunda ecuación, resulta:

$$-2k_2 - k_4 - 2k_2 + k_3 -$$
$$-2k_4 + 4k_2 + 4k_4 = 0$$

por tanto:

$$k_3 = -k_4$$

De este modo, se puede escribir así:

$$\pi_i = V^{(-2k_2-k_4)}\,\Delta p^{k_2}\,D^{(-k_4)}\,\mu^{k_4}\,\rho^{(-k_2-k_4)} =$$

$$= \left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}\right)^{k_2} \left(\frac{\mu}{VD\rho}\right)^{k_4}$$

Se eligen: $k_2=1$, $k_4=0$, $k_2=0$, $k_4=-1$, con objeto de tener números adimensionales como los definidos en el capítulo 5; y con $\nu = \mu/\rho$, resulta:

$$f\left(\frac{\Delta p}{\rho V^2}, \frac{VD}{\nu}\right) = 0$$

o bien,

$$f(Eu, Re) = 0$$

donde *Eu* es el número de Euler y *Re* el de Reynolds.

Resulta también que para $\rho = \gamma/g$ y con $\Delta p/\gamma = H$ (profundidad del centro de gravedad del orificio) se tiene:

$$\sqrt{\frac{Eu}{2}} = \frac{V}{\sqrt{2\,gH}} = f_1(Re) = C_d$$

donde C_d es el coeficiente de gasto del orificio, es función del número de Reynolds y representa a la raíz cuadrada de la mitad del número de Euler. Su obtención es posible sólo gracias a una investigación experimental que ha sido realizada por diferentes autores. El valor teórico del coeficiente para el caso bidimensional (orificio rectangular de ancho infinito) es de 0.611 y fue obtenido por Kirchhoff a través de un procedimiento de transformación conforme.

Si *A* es el área del orificio ($A = \pi D^2/4$) y *V* la velocidad media, de la ecuación anterior se concluye que:

$$Q = C_d A \sqrt{2\,gH}$$

o sea, la fórmula general para la descarga de un orificio. El coeficiente de gasto C_d, es función del número de Reynolds cuando éste es inferior a 10^5; para $Re \geqslant 10^5$, C_d es constante y vale 0.60 (subcapítulo 6.2).

Problema A.9. De la experiencia en el diseño de turbinas hidráulicas se ha deducido que la potencia mecánica *P*, en kg m/seg, entregada por una turbina (o bien la eficiencia η de la misma) dependen de la densidad ρ y viscosidad μ del agua; del diámetro *D* del rodete; de la velocidad angular de rotación ω de la misma; del gasto *Q*; de la carga total *H* sobre la máquina; y de la aceleración gravitacional *g*. Determinar los parámetros adimensionales que intervienen en el fenómeno.

Solución. El problema se puede plantear con dos funciones *F* distintas, a saber:

$$F_1(P, \rho, \mu, D, \omega, Q, H, g) = 0$$

$$F_2(\eta, \rho, \mu, D, \omega, Q, H, g) = 0$$

Esto es, en ambos casos existen $m = 8$ variables físicas y sólo $n = 3$ dimensiones fundamentales, según lo indica la siguiente tabla, donde los números representan los exponentes de dichas dimensiones. La eficiencia no tiene dimensiones y por ello no aparece en la tabla.

Magnitudes variables	Dimensiones fundamentales *F*	*L*	*T*
P	1	1	—1
ρ	1	—4	2
μ	1	—2	1
D	0	1	0
ω	0	0	—1
Q	0	3	—1
H	0	1	0
g	0	1	—2

Hay, entonces, una relación entre $m-n = 5$ parámetros adimensionales, pues en ambos casos interviene μ que contiene las tres dimensiones fundamentales. Dicha relación es:

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5) = 0$$

Si se eligen como variables repetitivas ρ, *D* y ω, éstas intervienen en los 5 parámetros adimensionales. Sin embargo, uno de ellos es, por supuesto, *H/D* como se vió en los problemas anteriores. Entonces, se deberán encontrar sólo cuatro parámetros que contengan —cada uno de ellos— las tres variables repetitivas y una de las restantes variables. Así, otra alternativa en la solución es:

$$\pi_1 = \rho^{x_1}\ D^{y_1}\ \omega^{z_1}\ P$$

$$\pi_2 = \rho^{x_2}\ D^{y_2}\ \omega^{z_2}\ \mu$$

$$\pi_3 = \rho^{x_3}\ D^{y_3}\ \omega^{z_3}\ Q$$

$$\pi_4 = \rho^{x_4}\ D^{y_4}\ \omega^{z_4}\ g$$

Cada parámetro es adimensional; para el primero resulta entonces:

para F: $x_1 + 1 = 0$;

para L: $-4x_1 + y_1 + 1 = 0$;

para T: $2x_1 - z_1 = 0$.

cuya solución es:

$$x_1 = -1, \quad y_1 = -1, \quad z_1 = -3$$

Entonces, el primer parámetro vale:

$$\pi_1 = \frac{P}{\rho\omega^3 D^5}$$

Para el segundo parámetro, tenemos:

para F: $x_2 + 1 = 0$;

para L: $-4x_2 + y_2 - 2 = 0$;

para T: $2x_2 - z_2 + 1 = 0$.

cuya solución es:

$$x_2 = -1, \quad y_2 = -2, \quad z_2 = -1$$

por tanto:

$$\pi_2 = \frac{\mu}{\rho\omega D^2}$$

Para el tercer parámetro, será:

para F: $x_3 = 0$;

para L: $-4x_3 + y_3 + 3 = 0$;

para T: $2x_3 - z_3 - 1 = 0$.

cuya solución es:

$$x_3 = 0, \quad y_3 = -3, \quad z_3 = -1$$

y el tercer parámetro viene a ser:

$$\pi_3 = \frac{Q}{\omega D^3}$$

Finalmente, para el cuarto parámetro, resulta:

para F: $x_4 = 0$;

para L: $-4x_4 + y_4 + 1 = 0$;

para T: $2x_4 - z_4 - 2 = 0$.

cuya solución es:

$$x_4 = 0, \quad y_4 = 1, \quad z_4 = -2$$

y el cuarto parámetro es:

$$\pi_4 = \frac{g}{\omega^2 D}$$

el cual puede englobar H/D si lo multiplicamos; lo que resulta:

$$\pi'_4 = \frac{g\,H}{\omega^2 D^2}$$

entonces, resulta que:

$$f\left(\frac{P}{\rho\omega^3 D^5}, \frac{\mu}{\rho\omega D^2}, \frac{Q}{\omega D^3}, \frac{g\,H}{\omega^2 D^2}\right) = 0$$

o bien,

$$\frac{P}{\rho\omega^3 D^5} = f_1\left(\frac{\mu}{\rho\omega D^2}, \frac{Q}{\omega D^3}, \frac{g\,H}{\omega^2 D^2}\right)$$

Para el segundo caso, determinar η; el único parámetro que cambia es π_1; así, nos da:

$$\pi_1 = \rho^{x_1}\ D^{y_1}\ \omega^{z_1}\ \eta$$

y, además:

para F: $x_1 = 0$;

para L: $-4\,x_1 + y_1 = 0$;

para T: $2\,x_1 - z_1 = 0$.

por tanto:

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0$$

luego $\pi_1 = \eta$, y se tiene que

$$\eta = \Phi\left(\frac{\mu}{\rho\omega D^2}, \frac{Q}{\omega D^3}, \frac{g\,H}{\omega^2 D^2}\right)$$

Hemos encontrado que en el caso de una turbina donde el flujo es turbulento la viscosidad juega un papel secundario, por lo cual se puede eliminar el parámetro donde influye; resulta finalmente:

$$\frac{P}{\rho\omega^3 D^5} = f_1\left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{g\,H}{\omega^2 D^2}\right)$$

$$\eta = \Phi\left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{g\,H}{\omega^2 D^2}\right)$$

Con el análisis dimensional se demuestra, entonces, que para una turbina dada, donde no es posible cambiar ρ y D, si H y ω permanecen constantes, P y η sólo dependen de Q.

Problema A.10. En general, la resistencia al flujo de un fluido depende de la velocidad V; la densidad ρ; varias dimensiones lineales l, l_1, l_2; la caída de presión Δp; la gravedad g; la viscosidad μ; la tensión superficial σ y el módulo de elasticidad E_v. Encontrar los parámetros adimensionales que intervienen.

Solución. Las $m = 10$ variables físicas se expresan en términos de las $n = 3$ dimensiones fundamentales, según lo indica la tabla anterior donde los números representan los exponentes de dichas dimensiones.

Magnitudes variables	*Dimensiones fundamentales*		
	F	*L*	*T*
V	0	1	−1
ρ	1	−4	2
l	0	1	0
l_1	0	1	0
l_2	0	1	0
Δp	1	−1	0
g	0	1	−2
μ	1	−2	1
σ	1	−1	0
E_v	1	−2	0

Existen, por tanto, $m - n = 7$ parámetros adimensionales y se puede escribir el sistema de ecuaciones siguiente:

$$k_2 + k_6 + k_8 + k_9 + k_{10} = 0$$

$$k_1 - 4\,k_2 + k_3 + k_4 + k_5 - k_6 + k_7 - 2\,k_8 - k_9 - 2\,k_{10} = 0$$

$$-k_1 + 2\,k_2 - 2\,k_7 + k_8 = 0$$

Como variables repetitivas se eligen a V, ρ y l; luego, conviene expresar k_1, k_2 y k_3 en términos de las restantes k. Del sistema resulta entonces:

$$k_1 = -2\,k_6 - 2\,k_7 - k_8 - 2\,k_9 - 2\,k_{10}$$

$$k_2 = -k_6 - k_8 - k_9 - k_{10}$$

$$k_3 = -k_4 - k_5 + k_6 + k_7 - k_8 - k_9$$

El primer parámetro se obtiene escogiendo arbitrariamente $k_4 = 1$ y, los restantes, $k = 0$ (con excepción de k_1, k_2 y k_3), a saber:

$$\pi_1 = V^{k_1}\ \rho^{k_2}\ l^{\,k_3}\ l_1 = V^0\ \rho^0\ l^{-1}\ l_1$$

$$\pi_1 = \frac{l_1}{l}$$

Con $k_5 = 1$ y, los restantes, $k = 0$ (con excepción de k_1, k_2 y k_3), se obtiene:

$$\pi_2 = \frac{l_2}{l}$$

Con $k_6 = -1$ y, las restantes, $k = 0$ (con excepción de k_1, k_2 y k_3), nos da:

$$\pi_3 = V^2\ \rho\ l^0\ \Delta p^{-1} = \frac{\rho\,V^2}{\Delta p}$$

que es el número de Euler, *Eu* (Cap. 5).

Con $k_7 = -1/2$ y, las restantes, $k = 0$ (con excepción de k_1, k_2 y k_3), será:

$$\pi_4 = V\ \rho^0\ l^{-1/2}\ g^{-1/2} = \frac{V}{\sqrt{l\,g}}$$

que es el número de Froude, *Fr* (Cap. 5).

Con $k_8 = -1$ y, las restantes, $k = 0$ (con excepción de k_1, k_2 y k_3), resulta:

$$\pi_5 = V\ \rho\ l\ \mu^{-1} = \frac{V l}{\nu}$$

que es el número de Reynolds, *Re*.

Con $k_9 = -1$ y, las restantes, $k = 0$ (con excepción de k_1, k_2 y k_3), tenemos:

$$\pi_6 = V^2\ \rho\ l\ \sigma^{-1} = \frac{V^2 \rho\, l}{\sigma}$$

que es el número de Weber, *We*.

Finalmente, con $k_{10} = -1/2$ y, las restantes, $k = 0$ (con excepción de k_1, k_2 y k_3), queda:

$$\pi_7 = V\ \rho^{1/2}\ l^0\ E_v^{\,1/2} = \frac{V}{\sqrt{E_v/\rho}}$$

que es el número de Mach, *Ma*. Así, resulta entonces:

$$f_1\,(Eu, Fr, Re, We, Ma, l/l_1, l/l_2) = 0$$

o bien,

$$\Delta p = \rho\,V^2\,f_2\,(Fr, Re, We, Ma, l_1/l, l_2/l) \qquad \text{(A.6)}$$

donde la función f debe obtenerse de un

estudio experimental. Si se exceptúa el número de Weber, los restantes números han sido encontrados en el análisis de las ecuaciones del movimiento (Cap. 5). Esto se debe a que dichas ecuaciones no incluyen en su estructura los efectos de tensión superficial.

Cuando se trata de un conducto a presión donde se desea encontrar similitud en lo que se refiere a las pérdidas de energía por fricción, no es suficiente con establecer la similitud sólo con el número de Reynolds. Así, en la Ec. (A.6) los números Fr, We, Ma, carecen de importancia. Si se hace l igual al diámetro del conducto D; l_1 igual a la longitud L del conducto; y l_2 igual a la dimensión ε, que representa la altura efectiva de la rugosidad superficial del tubo (Cap. 8), se tiene que:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = f_3\,(Re,\ L/D,\ \varepsilon/D)$$

o bien:

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = L/D\ f_4(Re,\ \varepsilon/D)$$

la cual se escribe más comúnmente así:

$$h_f = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{V^2}{2g}\frac{L}{D} f_4(Re, \varepsilon/D) \qquad (A.7)$$

es decir, el término de pérdida de energía por fricción que aparece en la fórmula de Darcy-Weisbach. La función $f_4(Re, \varepsilon/D)$ se acostumbra representar por f y se conoce como factor de fricción y no es más que una forma del número de Euler. Entonces, la conocida fórmula de Darcy-Weisbach es:

$$h_f = \frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{V^2}{2g}\frac{L}{D} f \qquad (A.8)$$

donde h_f es el término de pérdida de carga (en este caso sólo por fricción) de la ecuación de Darcy-Weisbach.

Para obtener semejanza dinámica la relación de fuerzas de fricción en prototipo debe ser constante. De la Ec. (A.8), con similitud en cargas de velocidad, resulta:

$$F_e = \Delta p_e A_e = \rho_e A_e V_e^2 \frac{L_e}{D_e} f_e$$

Substituyendo en esta ecuación a las Ec. (5.9) y (5.12), resulta entonces:

$$\frac{\mu_e^2}{\rho_e} = \rho_e A_e \frac{\mu_e^2 L_e}{\rho_e^2 L_e^2 D_e} f_e$$

$$\frac{A_e}{L_e D_e} f_e = 1$$

lo cual admite distorsión en la dimensión longitudinal del conducto. Si el modelo tiene similitud geométrica exacta ($A_e = L_e^2$, $L_e = D_e$), entonces

$$f_e = 1 \qquad (A.9)$$

Esto es, el factor de fricción f debe ser igual en modelo y prototipo; ello se puede lograr aun con números de Reynolds y relaciones ε/D distintas. En el Cap. 8 se muestra que para $Re \leqslant 2000$, f es independiente de ε/D y lo contrario acontece para números de Re muy grandes. En el caso de flujo compresible (gases a grandes velocidades) f depende además del número de Mach Ma; entonces, el número de Reynolds carece de importancia, sobre todo cuando $Ma \to 1$ o es mayor que 1.

PROBLEMAS

1. Demostrar que las Ecs. (4.5*d*), (4.19) y (4.33) son dimensionalmente homogéneas.

2. La velocidad de propagación de las ondas del sonido —en un líquido— depende de su módulo de elasticidad E_v y y de la densidad ρ. Establecer, por análisis dimensional, una relación posible entre estas magnitudes y comparar con la Ec. (1.13).

3. Encontrar, por análisis dimensional, una fórmula racional para la resistencia D al movimiento de cuerpos geométricamente similares, que se mueven parcialmente sumergidos en un fluido viscoso y compresible, de densidad ρ, viscosidad dinámica μ, módulo de elasticidad volumétrica E_v, velocidad V y longitud característica l del cuerpo, en el campo de gravedad g.

4. Demostrar que el parmotor T friccionante, requerido para girar un disco de diámetro d a una velocidad angular ω en un fluido de viscosidad μ y densidad ρ, está dado por:

$$\frac{T}{d^5 \omega^2 \rho} = f_i\left(\frac{\rho\, d^2 \omega}{\mu}\right)$$

5. El gasto Q a través de un orificio de pared delgada depende del diámetro d del orificio, la diferencia de presiones Δp entre los dos lados del orificio, la densidad ρ y la viscosidad cinemática ν del gas. Demostrar —por análisis dimensional— que:

$$Q = d^2 \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}\ f_i\left(\frac{\nu}{d}\sqrt{\frac{\rho}{\Delta p}}\right)$$

6. Experimentos con agua, realizados por Gourley y Crimp en un vertedor triangular con ángulo en el vértice de 90°, condujeron a la ecuación del gasto $Q = 1.32\,h^{2.48}$ (tabla 7.2); Q está dado en m³/seg y h es la carga sobre la cresta, en m. De acuerdo con los resultados obtenidos en el problema A.7, estimar el porcentaje de error que se tendría al usar la fórmula de Gourley y Crimp, para aforar con este vertedor el gasto de un aceite de viscosidad cinemática diez veces mayor que la del agua.

7. La velocidad c de propagación de ondas superficiales, cuya altura es pequeña en comparación con el tirante y de un canal, se supone depende de y, de la densidad ρ y la aceleración de gravedad g. Expresar estas variables como un grupo adimensional.

8. La velocidad al esfuerzo cortante v_* (Apéndice B) se puede expresar en términos del esfuerzo cortante en la frontera τ_0 y la densidad del fluido ρ. Encontrar el tipo de esta expresión.

9. El tirante y_2 —aguas abajo— de un salto hidráulico depende del tirante —aguas arriba— y_1, la velocidad V_1 y la aceleración de gravedad g. Expresar estas variables en forma adimensional.

10. La resistencia F de la superficie del casco de un barco depende de la velocidad V del barco, la longitud L, la rugosidad superficial ε del casco, la densidad ρ del líquido, la viscosidad μ y la aceleración g de la gravedad en conexión con la resistencia de onda. Expresar estas variables en forma adimensional.

11. El tamaño del rocío formado al salir el agua de un chiflón depende de la velocidad V característica en el chiflón, el diámetro D de la boquilla, la densidad ρ del líquido, la viscosidad μ, la tensión superficial entre el líquido y aire σ, así como la aceleración de la gravedad g. Expresar estas variables en forma adimensional.

12. Una placa rectangular de dimensiones $b \times h$ está colocada frente a una corriente fluida de velocidad uniforme V; el ángulo de inclinación entre la placa y la dirección de la velocidad es θ. El fluido tiene una densidad ρ y una viscosidad absoluta μ. Mediante el análisis dimensional, encontrar la expresión de la fuerza ejercida por la corriente sobre la placa.

13. ¿Cuál es el esfuerzo ejercido —sobre una esfera inmóvil con un diámetro d— por una corriente fluida de velocidad V; el fluido de densidad ρ y viscosidad absoluta μ?

14. De acuerdo con los resultados del problema 13 encontrar la velocidad permanente de caída, de una esfera de densidad ρ', en un fluido de densidad ρ.

15. Una bomba centrífuga de radio exterior r

y de proporciones dadas k', k'',... bombea un líquido de densidad ρ; gira a N rpm y entrega un gasto Q a una presión de rebombeo $p = \rho g H$. Encontrar la relación entre las diferentes magnitudes.

16. El momento de cabeceo máximo provocado por el agua en un hidroavión al amarizar, se representa por $C_{máx}$. En esta acción intervienen las siguientes variables:

α = Angulo de la trayectoria de vuelo del avión con la horizontal.
β = Angulo que define la posición del avión.
M = Masa del avión.
L = Longitud del casco.
ρ = Densidad del agua.
g = Aceleración de la gravedad.
R = Radio de giro del avión respecto del eje de cabeceo.

¿De acuerdo con el teorema π de Buckingham, ¿cuántos grupos adimensionales independientes caracterizarían este problema?

17. Dos experiencias efectuadas en diferentes laboratorios —sobre la caída de presión en conductos rectilíneos— dan los resultados que se indican en la tabla siguiente. Reportar dichos datos sobre un diagrama único, tal que los puntos se coloquen sobre una misma curva. Las diferentes notaciones significan:

D diámetro del conducto en mm;
γ peso específico del fluido, en kg/m³;
μ viscosidad absoluta en kg seg/m²;
Q gasto en lt/seg;
Δp caída de presión en g/cm² por m de longitud del conducto.

Nº	D	Fluido	γ	μ	Q	Δp
1	100	agua 20°C	998	1.024×10^{-4}	15	2.63
					22.5	5.36
2	150	aire 20°C	1.22	1.88×10^{-6}	300	0.181
					600	0.610
3	250	aceite 20°C	886	5.77×10^{-3}	500	42
					750	85.1

18. Un modelo de turbina Francis —con un diámetro de rodete de 42.07 cm— se prueba bajo una carga de 5.643 m, a una velocidad de rotación de 374 rpm. La potencia medida es de 22.15 HP a una eficiencia de 89.3 %. El diámetro del rodete en prototipo es de 409 cm. Use los resultados del problema A.9 para determinar la carga de bombeo, velocidad, gasto y potencia entregada por el prototipo para un flujo dinámicamente similar. (En realidad, la eficiencia de la unidad prototipo —en este caso— es, aproximadamente, 3 % mayor que en el modelo.)

19. El parmotor desarrollado por una turbina depende del gasto Q, carga H, peso específico γ, velocidad angular ω y eficiencia η. Determinar la ecuación del parmotor.

20. Se desean realizar experimentos para encontrar las relaciones que hay entre la profundidad de socavación producida por un chorro de agua que cae libremente sobre una plantilla horizontal formada por un suelo de ciertas propiedades. Mediante el análisis dimensional determinar los parámetros sin dimensiones, que intervienen en el fenómeno. Para ello, considere las variables que crea más adecuadas.

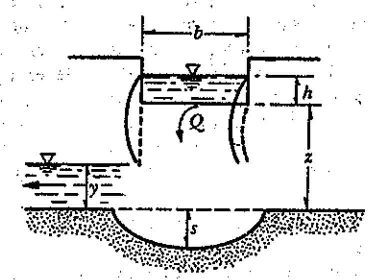


Figura del problema 20.

21. Los siguientes datos experimentales se han obtenido para la fuerza de arrastre ejercida por el flujo, sobre una esfera en un túnel de viento. Presentar los datos en forma gráfica para mostrar la fuerza de arrastre como función de las distintas variables: *a)* sin usar análisis dimensional; *b)* usando análisis dimensional de acuerdo con los resultados del problema 13.

Prueba	v (m/seg)	d (m)	ρ (kg seg²/m⁴)	F_D (kg)
1	0.055	0.03	0.117	1.28×10^{-7}
2	0.55	0.03	0.117	0.60×10^{-5}
3	5.5	0.03	0.117	0.60×10^{-3}
4	55	0.03	0.117	0.60×10^{-1}
5	30	0.55×10^{-1}	0.117	0.60×10^{-1}
6	30	0.55	0.117	1.28
7	30	5.5	0.117	2.57×10^{-2}
8	30	0.03	2.1×10^{-4}	0.714×10^{-4}
9	30	0.03	2.1×10^{-3}	3.35×10^{-4}
10	30	0.03	2.1×10^{-2}	3.35×10^{-3}
11	30	0.03	2.1×10^{-1}	3.35×10^{-2}
12	30	0.03	2.1×10^{-1}	0.714×10^{-1}
13	30	0.03	2.1×10^{-1}	1.43

APÉNDICE B

TEORÍA DE LOS FLUJOS VISCOSOS

B.1 Concepto de capa límite y rugosidad superficial

Debido a que la viscosidad del agua y del aire es muy pequeña, la mayoría de los problemas de flujo a los que se enfrenta el ingeniero civil es con números de Reynolds grandes; esto es, flujos turbulentos donde los efectos viscosos son despreciables. Sin embargo (aun para este tipo de flujo), los efectos de viscosidad se confinan a una capa muy delgada, en la inmediata vecindad de las fronteras sólidas, que se conoce como *capa límite*.

Aun cuando Reynolds fue el primero que concibió la idea anterior al observar detenidamente el flujo de transición entre el laminar y el turbulento, el concepto —tal como hoy se conoce— se debe a Ludwig Prandtl (1904). Ha sido a tal grado importante que su advenimiento, además de permitir la explicación de muchos fenómenos, propició el nacimiento de la moderna mecánica de fluidos.

Una mejor explicación del concepto de capa límite se consigue al suponer la existencia de un flujo uniforme horizontal, de velocidad constante V_0, al cual se interpone un cuerpo agudo, como se muestra en la Fig. B.1.

El campo de velocidades del flujo se adapta a la forma del cuerpo y modifica su carácter de uniformidad. Además, las fuerzas viscosas que retardan el movimiento del fluido en una capa muy delgada (de espesor cero) en el punto en el que la corriente toca al cuerpo, se manifiestan

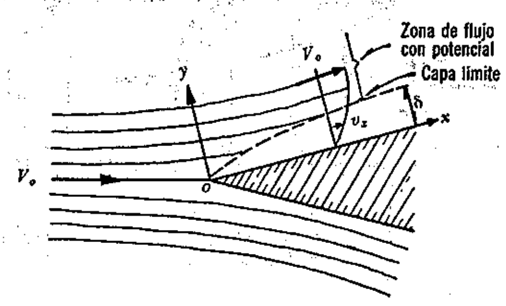


Figura B.1. Concepto de capa límite.

sobre una capa de espesor creciente al transmitir progresivamente el efecto de filete en filete. La región interior de la capa límite presenta las siguientes características.

a) La velocidad del fluido, en el punto de contacto con la frontera, vale cero.

b) El gradiente transversal de velocidades y, por lo mismo, el esfuerzo cortante, tienen valores máximos en la frontera; disminuye a medida que el punto se aleja de ésta.

c) Fuera de la capa límite, el gradiente de velocidad es prácticamente cero, porque también lo es el esfuerzo cortante y los efectos viscosos.

d) Fuera de la capa límite las líneas de corriente se conforman, según un flujo con potencial, sufriendo un ligero desplazamiento hacia el exterior de la pared.

La descripción anterior es la de una capa límite bidimensional. En el caso tridimensional los vectores velocidad, dentro de la capa límite y a diferentes distancias de la frontera, tienen componentes en las tres direcciones coordenadas que dificultan su estudio; éste es el caso de la Fig. B.2 que muestra la entrada a un tubo donde se desarrolla la capa límite alrededor de toda la frontera. Después de cierta distancia, desde la entrada, la capa límite converge para establecerse inmediatamente en una manera uniforme. Boussinesq determinó por vía experimental que en un ducto cilíndrico esto ocurre para $L \approx 0.065\ D\ Re$; con la cual para $Re = 2\,000$, $L = 130\,D$.

La *capa límite laminar* de la Fig. B.3 actúa, por sí misma, como un disturbio; de tal modo que a una distancia x_o, desde el principio de la pared, se torna turbulenta con un comportamiento distinto.

Cuando la capa límite laminar se adelgaza hasta alcanzar un espesor muy pequeño, adquiere el nombre de *subcapa laminar*. La turbulencia originada en la capa límite es posible debido al efecto de alguna irregularidad sobre la superficie de la pared, produciendo el disturbio que se transmite hacia afuera. A partir de x_o el espesor de la *capa límite turbulenta* crece más rápidamente que en el caso laminar (Fig. B.3).

Por lo que respecta a la velocidad, se observa que el efecto de fricción se presenta en la capa límite por la modificación de su distribución, según la línea *ABC*, variando su velocidad de cero —en la pared— al valor medio V_0. Las fuerzas de viscosidad son importantes dentro de la capa límite; fuera de ésta, la distribución de velocidades es prácticamente uniforme y las fuerzas de viscosidad son despreciables.

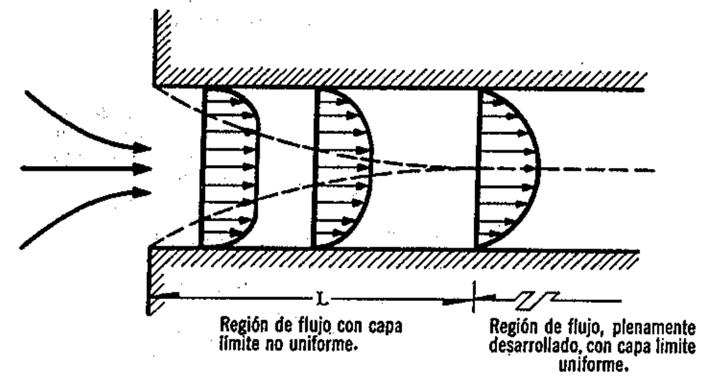


Figura B.2. Capa límite a la entrada de un tubo.

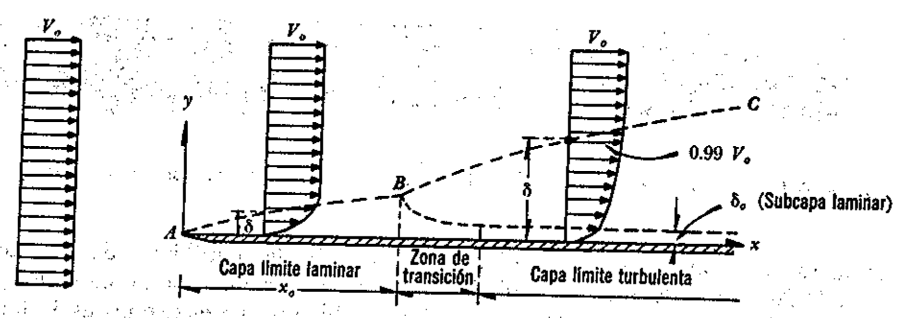


Figura B.3. Zonas de la capa límite.

El espesor δ, de la capa límite turbulenta, no es posible definirlo con exactitud debido a que su curva de distribución de velocidades se aproxima asintóticamente al valor V_0; sin embargo, es común aceptar como espesor la magnitud de la distancia normal a la pared de un nivel en el que la velocidad difiere —en 1 %— de la velocidad que existiría sin pared (V_0).

En el punto *A* donde se inicia la perturbación el flujo próximo a la placa es enteramente laminar y se desarrolla una capa límite laminar a lo largo de la superficie de la pared, siguiendo la línea *AB*. La distribución transversal de velocidades es aproximadamente parabólica y, a partir de *B*, el flujo se torna turbulento, desarrollándose una capa turbulenta limitada por la pared y la línea *BC*.

Si la superficie de la pared es relativamente lisa, en la proximidad de ella se forma una película delgada, dentro de la cual el flujo se conserva más o menos laminar, la cual se conoce como subcapa laminar.

Si la pared es rugosa la capa límite turbulenta se puede establecer muy cerca del punto en el que el flujo hace su primer contacto con la placa, sin existir el tramo inicial de flujo laminar.

Si la rugosidad absoluta es menor que una cierta fracción del espesor de la subcapa laminar, adherida a la pared del conducto, las irregularidades de la superficie son tan pequeñas que quedan cubiertas por la subcapa laminar. En esas condiciones la rugosidad no tiene efecto sobre la zona exterior y se dice que la superficie de la pared se comporta como *hidráulicamente lisa* o simplemente *lisa* (Fig. B.4a); sin embargo, puede ser *ondulada* si el perfil medio de la superficie sigue una curva regular (Fig. B.4b).

Si las rugosidades son muy grandes, extienden su efecto más allá de la subcapa laminar y producen disturbios en el flujo; entonces se dice que la superficie es *hidráulicamente rugosa* o simplemente *rugosa* (Fig. B.4c).

B.2. Flujo laminar

Considere un flujo laminar, permanente e incompresible, en un conducto cilíndrico alimentado por un recipiente (Fig. B.5a), en el cual se producen las

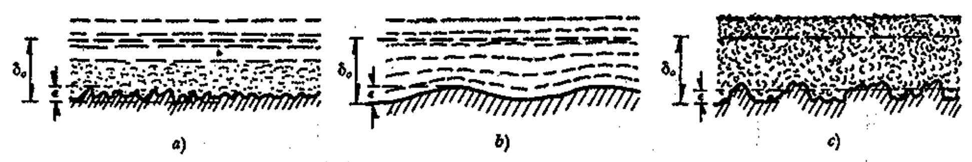


Figura B.4. Espesor de la subcapa laminar comparado con la rugosidad absoluta.

transformaciones de la energía indicadas por la Ec. (4.20). La velocidad v tendrá cierta distribución a través de una sección transversal y será función únicamente del radio r, debido a la simetría axial del flujo. Además, de acuerdo con la ecuación de continuidad, esta distribución no puede cambiar de una sección a otra porque implicaría una variación del gasto; esto es, $\partial v/\partial s = 0$. Por el contrario, se considera que p representa la presión media sobre todos los puntos de una misma sección transversal y que únicamente cambia con s ($\partial p/\partial r = 0$; $\partial p/\partial s \neq 0$).

Considere el elemento de fluido de forma cilíndrica, con radio r (desde el eje del conducto) y longitud ds (Fig. B.5b).

El análisis del equilibrio de las fuerzas que actúan sobre dicho elemento, por las condiciones antes expuestas, indica que vale cero la suma de las componentes en la dirección $+s$, debidas a la presión sobre las áreas transversales del elemento, a las del peso propio, así como a las del esfuerzo cortante de viscosidad sobre la superficie lateral del elemento. Lo anterior resulta porque existe flujo sólo a través de las bases del elemento cilíndrico y no a través de su superficie lateral, además de no presentarse cambio en la cantidad de movimiento.

La resultante, de las fuerzas debidas a la presión en la dirección $+s$, vale

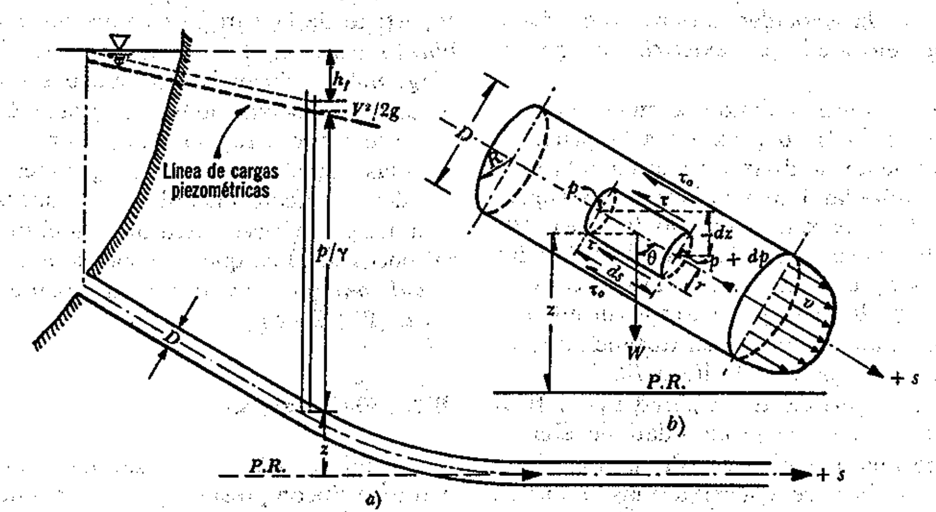


Figura B.5. Condiciones de equilibrio, para el flujo laminar permanente, en un conducto cilíndrico.

$$P=\pi r^2 p-\pi r^2(p+dp)=-\pi r^2\,dp \qquad \text{(B.1a)}$$

La componente del propio peso, en la misma dirección $+s$, con $\cos\theta = -dz/ds$ (el signo menos se debe a que z disminuye con $+s$) es:

$$W\cos\theta=-\gamma\pi r^2\,ds\cos\theta = -\gamma\pi r^2\,dz \qquad \text{(B.1b)}$$

y la correspondiente al esfuerzo cortante viscoso, sobre la superficie lateral del elemento, será:

$$T=-2\pi r\tau\,ds=2\pi\mu\frac{dv}{dr}r\,ds \qquad \text{(B.1c)}$$

en la cual se ha considerado la ley de la Ec. (1.1), $\tau=-\mu\frac{dv}{dr}$, en la cual el cambio de signo se debe a que r es el radio del tubo y no la distancia a la pared, como en la Ec. (1.1).

La suma de estas fuerzas es entonces

$$-\pi r^2\,dp-\gamma\pi r^2\,dz+2\pi\mu\frac{dv}{dr}r\,ds=0 \qquad \text{(B.2a)}$$

Al simplificar y dividir entre $\gamma\pi r^2\,ds$, sobre la base de que el flujo es incompresible, se tiene:

$$S_f=\frac{2}{\gamma}\frac{1}{r}\left(-\mu\frac{dv}{dr}\right) \qquad \text{(B.2b)}$$

donde $S_f=-d(p/\gamma+z)\,ds$ se llama pendiente hidráulica o de fricción y representa la pendiente local del gradiente de fricción (esta pendiente no tiene relación con la geométrica del conducto).

La integración de la Ec. (B.2b) conduce a que

$$v=-\frac{\gamma S_f}{4\mu}r^2+C_1$$

La constante de integración se obtiene de la condición de frontera: $r=R$, $v=0$ (velocidad cero en la pared); la ecuación anterior se describe así:

$$v=\frac{\gamma S_f}{4\mu}(R^2-r^2) \qquad \text{(B.3)}$$

es decir, la ecuación de un paraboloide de revolución, donde la velocidad máxima se presenta sobre el eje del tubo ($r=0$), que vale:

$$v_{máx}=\frac{\gamma S_f R^2}{4\mu}=\frac{\gamma S_f D^2}{16\mu} \qquad \text{(B.4)}$$

La velocidad media se obtiene de

$$V=\frac{1}{A}\iint_A v\,dA=\frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi v\,r\,dr$$

$$V=\frac{\gamma S_f}{2\mu R^2}\int_0^R (R^2 r-r^3)\,dr$$

que al integrar resulta

$$V=\frac{\gamma S_f R^2}{8\mu}=\frac{\gamma S_f D^2}{32\mu} \qquad \text{(B.5)}$$

Esto es, la mitad de la velocidad máxima.

La pendiente del gradiente de fricción depende de la primera potencia de la velocidad media.

Con la Ec. (B.4) vemos que la (B.3) resulta también así:

$$v=v_{máx}\left[1-(r/R)^2\right]$$

la cual justifica la ecuación del problema 4.6 y, principalmente, que los coeficientes $\alpha=2$, y $\beta=1.33$.

Asimismo, el gasto en el conducto vale

$$Q = A\,V = \frac{\pi D^2}{4}\,\frac{\gamma S_f D^2}{32\mu} =$$

$$= \frac{\pi}{128}\,\frac{D^4}{\mu}\,\gamma S_f \qquad \text{(B.6)}$$

donde el coeficiente $C = \pi/128$ corresponde al buscado en el problema A.6 del Apéndice A.

Substituyendo S_f de la Ec. (B.5), en la (8.2b) de Darcy-Weisbach, resulta

$$f = \frac{64\mu}{\rho V D} = \frac{64}{Re} \qquad \text{(B.7)}$$

fórmula llamada de Poiseuille, donde *Re* representa el número de Reynolds en el tubo. Esta ley de resistencia es independiente de la rugosidad del tubo, pero depende de la viscosidad cinemática del líquido. Cabe aclarar que ha sido bien comprobada con los resultados experimentales de diferentes investigadores.

B.3 Flujo turbulento

B.3.1 Introducción

El flujo laminar se presenta únicamente en casos excepcionales (flujo de líquidos muy viscosos). En general, el estado natural del movimiento tiene fluctuaciones irregulares de la velocidad (flujo de agua en ríos o el movimiento del aire cerca de la superficie de la tierra). Este tipo de movimiento se llama turbulento y se caracteriza porque el fluido continuamente se mezcla, de una manera caótica, como resultado de la ruptura de un flujo ordenado de vórtices que afectan zonas en dirección del movimiento.

De acuerdo con la definición sugerida por Taylor y von Kármán, la turbulencia puede generarse por el paso del fluido sobre superficies de frontera, o bien por el flujo de capas de fluido, a diferentes velocidades, que se mueven una encima de la otra. La definición anterior indica que existen dos tipos de turbulencia: una generada por efectos viscosos debidos a la presencia de paredes (conocida como *turbulencia de pared*; otra, que se produce en ausencia de la pared y que se genera por el movimiento de capas de fluidos a diferentes velocidades. Ésta se llama *turbulencia libre*.

El flujo turbulento, en condiciones naturales o artificiales y alrededor de cuerpos sólidos, es ejemplo de turbulencia de pared. Las regiones de mezclas de chorros turbulentos y estelas, corresponden a la categoría de turbulencia libre. En este caso, se demuestra experimentalmente que los efectos de viscosidad se confinan a la subcapa laminar, es decir, que dentro de esta capa el esfuerzo cortante se distribuye en idéntica manera que en un flujo laminar.

Diferentes teorías se han desarrollado para explicar el origen y estructura de la turbulencia. Algunas establecen que es la formación de vórtices en la capa límite, como resultado de disturbios ocasionados por discontinuidades bruscas en la pared; otras la atribuyen a la influencia del esfuerzo cortante cuando ocurre un gradiente de velocidades sin discontinuidades bruscas. Sin embargo, las investigaciones sobre la naturaleza física de la turbulencia y su desarrollo, todavía no han sido del todo satisfactorias, ya que sólo pueden estudiarse, experimental y teóricamente, como un fenómeno estadístico. Una vez establecido, el movimiento turbulento tiene una naturaleza aleatoria difícil de describir con exactitud y su aproximación es posible en base a una serie de propiedades estadísticas.

En la descripción matemática del flujo turbulento, el movimiento se estudia ba-

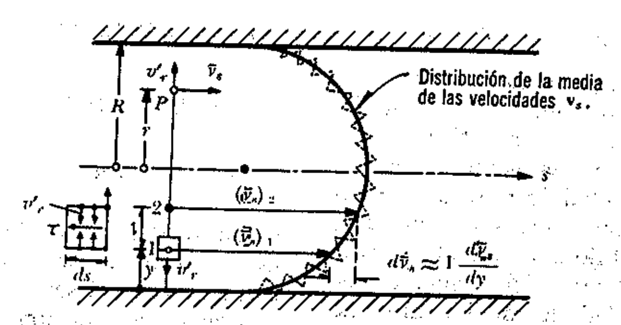


Figura B.6. Componentes de la velocidad del flujo turbulento en un conducto cilíndrico.

sándose en un valor medio de cualesquiera de sus características y en una fluctuación alrededor de ese valor medio. Por ejemplo, para el flujo permanente, en un conducto cilíndrico, la velocidad en un punto *P* tiene componentes en la dirección longitudinal v_s y en la radial v_r, que son función únicamente del radio del punto (Fig. B.6).

Sus valores medios se pueden tomar en relación con el tiempo en un punto fijo (*media temporal*) o con respecto al radio *r*, en un instante dado (*media espacial*); se puede decir que las componentes de velocidad turbulenta, en el instante t_0, son: $v_s = \bar{v}_s + v_s'$, $v_r = \bar{v}_r + v_r'$. Aquí, por definición, la media temporal (por ejemplo, para v_s en el instante t_0) es:

$$\bar{v}_s = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v_s\,dt$$

donde *T* es el período de muestreo, el cual debe ser lo suficientemente grande como para comprender un número adecuado de fluctuaciones; además, v_s y v_r son independientes de *T*. Las fluctuaciones de las componentes de velocidad pueden ser positivas o negativas (Fig. B.7) y sus valores medios deben ser nulos. Esto es, con $v_s' = v_s - \bar{v}_s$, se tiene que

$$\bar{v}_s' = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v_s'\,dt = \frac{1}{T}\times$$

$$\times\int_{t_0}^{t_0+T} v_s\,dt - \frac{\bar{v}_s}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} dt = \bar{v}_s - \bar{v}_s = 0$$

y de manera semejante $\bar{v}_r' = 0$.

Es más, en el caso de la componente radial en el flujo dentro de un conducto cilíndrico, la media no puede existir debido a que el movimiento general se efectúa en dirección $+s$. Esto es, $\bar{v}_r = 0$, por lo que las componentes de velocidad turbulenta, en el instante t_0, son:

$$v_s = \bar{v}_s + v_s' \qquad \text{(B.8a)}$$

$$v_r = v_r' \qquad \text{(B.8b)}$$

todavía más, la condición de adherencia en la pared implica que para $r=R$, $\bar{v}_s=0$; y también $v_s' = v_r' = 0$.

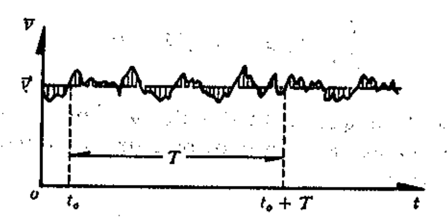


Figura B.7. Fluctuaciones turbulentas de la velocidad.

B.3.2 Esfuerzo cortante turbulento

El análisis del equilibrio dinámico del elemento cilíndrico (Fig. B.5b), realizado para el flujo laminar, se modifica al considerar que, si bien es igual a cero el cambio en la cantidad de movimiento entre las dos secciones, bases del cilindro, ahora existe un flujo transversal a través de la superficie lateral del mismo y, por tanto, una cantidad de movimiento que puede determinarse, de la Ec. (4.30), para el flujo permanente.

Las fuerzas que actúan sobre dicho elemento son las mismas del primer miembro de la Ec. (B.2a). Sin embargo, de acuerdo con la Ec. (4.30) la suma de dichas fuerzas es igual a la cantidad de movimiento, sobre la superficie lateral del cilindro, que puede determinarse como sigue: la cantidad de masa que circula a través del área elemental dA —de la superficie lateral del elemento cilíndrico— es $\rho\, v_r'\, dA$, con una velocidad v_s. Esto es, la cantidad de movimiento sería $\rho\, v_r'\, v_s\, dA$; y supuesto que el flujo es permanente, el segundo miembro de la ecuación (4.30) es:

$$\rho \int_A v_s v_r'\, dA = \rho \int_A (\bar{v}_s + v_s')\, v_r'\, dA =$$

$$= \rho\, \bar{v}_s \int_A v_r'\, dA + \rho \int_A v_s' v_r'\, dA$$

Puesto que

$$\int_A v_r'\, dA = \bar{v}_r'\, dA = 0$$

debido a que la media de las fluctuaciones v_r' es cero, la cantidad de movimiento será:

$$\rho \int_A v_s v_r'\, dA = \rho\, \overline{v_s' v_r'}\, 2\pi r\, ds$$

Entonces, la Ec. (B.2a) resulta así:

$$-\pi r^2 dp - \gamma \pi r^2 dz + 2\pi \mu \frac{dv}{dr} r\, ds =$$

$$= \rho\, \overline{v_s' v_r'}\, 2\pi r\, ds$$

donde $\overline{v_s' v_r'}$ es la media del producto de las fluctuaciones de la velocidad, la cual no tiene por qué ser cero. Al simplificar y ordenar la ecuación anterior, similarmente a la (B.2a), resulta que

$$-\frac{d(p/\gamma + z)}{ds} + \frac{2\mu}{\gamma} \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} =$$

$$= \frac{2\rho}{\gamma} \frac{1}{r}\, \overline{v_s' v_r'}$$

o bien, con $S_f = -d(p/\gamma + z)/ds$, tenemos:

$$S_f = \frac{2}{\gamma} \frac{1}{r} \left(-\mu \frac{dv}{dr} + \rho\, \overline{v_s' v_r'} \right) \quad \text{(B.9)}$$

Comparando las Ecs. (B.2b) para el flujo laminar y la (B.9) para el turbulento, se observa como única diferencia la adición del término

$$\tau' = \rho\, \overline{v_s' v_r'} \quad \text{(B.10)}$$

que corresponde al esfuerzo cortante característico de la turbulencia, conocido como esfuerzo cortante aparente o turbulento. De esta manera, el esfuerzo cortante total viene a ser (Ref. 17):

$$\tau = \rho\, \overline{v_s' v_r'} - \mu \frac{dv}{dr} \quad \text{(B.11)}$$

y de la Ec. (B.9) obtenemos lo siguiente:

$$\tau = \frac{\gamma}{2} r\, S_f \quad \text{(B.12)}$$

La Ec. (B.12) determina la variación del esfuerzo cortante total en una sección.

En la pared, $r = R = D/2$; $\tau = \tau_0 =$

$$= \left[-\mu \frac{dv}{dr} \right]_{r=R} \text{ y, además, } R_h = D/4.$$

Por tanto:

$$\tau_0 = \gamma \frac{R}{2} S_f = \gamma \frac{D}{4} S_f = \gamma R_h S_f \quad \text{(B.13)}$$

Si empleamos la Ec. (B.13) en la (B.12), ésta también puede escribirse así:

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{R} \quad \text{(B.14)}$$

Esto es, hay una variación lineal de τ con el radio que va del valor máximo en la pared, hasta cero en el eje del conducto.

Aun cuando la integración de la ecuación (B.9) permitiría encontrar la ley de distribución de velocidades medias, en flujo turbulento dentro de un conducto cilíndrico, dicha integración es posible si se dispone de una relación entre $\overline{v_s' v_r'}$ y el valor de la media $\bar{v}_s$; tal relación se puede obtener teórica o experimentalmente.

B.3.3 Longitud de mezclado

La hipótesis de la longitud de mezclado hace posible el tratamiento analítico del flujo turbulento. Prandtl adoptó este concepto en un intento de expresar el esfuerzo cortante aparente, en términos de la velocidad media. A pesar de que la teoría no es muy convincente, se ha comprobado al aplicarse a casos muy sencillos como el que sigue:

Considere, idealmente, una partícula de fluido que se encuentra en cierto instante a la distancia y de la pared (Fig. B.6) y que en esa posición tiene la velocidad $\bar{v}_s$ (función de y). Como resultado de la fluctuación transversal $-v_r'$ (negativa por ser en la dirección $+y$), la partícula se traslada de la distancia l sobre la dirección $+y$, hasta la nueva posición $y + l$, en la que la velocidad resulta $\bar{v}_s + d\bar{v}_s$. Por un desarrollo en serie de Taylor, un valor aproximado para $d\bar{v}_s$ sería $l \dfrac{d\bar{v}_s}{dy}$.

Como resultado del movimiento transversal la diferencia de velocidades se puede interpretar como la fluctuación longitudinal $\bar{v}_s'$, donde l designa a la longitud de mezclado y es función de y, es decir:

$$|\bar{v}_s'| = l \left| \frac{d\bar{v}_s}{dy} \right|$$

Por otra parte, dos partículas situadas sobre la misma capa se mueven con diferentes velocidades, como resultado de las fluctuaciones transversales. Si la partícula de atrás posee una velocidad mayor que la de adelante, se produce un choque entre ambas; en caso contrario se separan. Cuando ocurre el choque se produce la fluctuación transversal de valor v_r', la cual será proporcional o del mismo orden de magnitud que la diferencia de velocidades longitudinales $\bar{v}_s'$. Cuando se separan, entre ambas hay una entrada de partículas provenientes de las capas vecinas para llenar el espacio producido. Aun en este caso, $|\bar{v}_r'| \approx |\bar{v}_s'|$; esto es,

$$\bar{v}_r' = -\bar{v}_s' = -l \frac{d\bar{v}_s}{dy}$$

donde el signo menos indica que a un valor $+\bar{v}_r'$ corresponde otro negativo $(-\bar{v}_s')$ y viceversa. Por tanto, el esfuerzo cortante de la turbulencia en la Ec. (B.10) es:

$$\tau' = \rho\, l^2 \left| \frac{d\bar{v}_s}{dy} \right| \frac{d\bar{v}_s}{dy} \qquad \text{(B.15)}$$

donde $d\bar{v}_s/dy$ debe tomarse con el signo que le corresponde, a fin de obtener el correcto de τ'.

Debe observarse que se han eliminado las fluctuaciones v_s' y v_r' en la Ec. (B.15); también es conveniente substituir a $\bar{v}_s = v$; y $d\bar{v}_s/dy = dv/dy$. Por tanto:

$$\tau' = \rho\, l^2 \left| \frac{dv}{dy} \right| \frac{dv}{dy} \qquad \text{(B.16)}$$

De la Ec. (B.11) el esfuerzo cortante total es

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} + \rho\, l^2 \left| \frac{dv}{dy} \right| \frac{dv}{dy} \qquad \text{(B.17)}$$

Finalmente, conviene observar que todos estos desarrollos son válidos, tanto para un flujo bidimensional como para el de una tubería cilíndrica, dado que no se ha hecho alguna consideración especial en este sentido.

B.3.4 Ley universal de velocidades

La aplicación más importante de la evaluación del esfuerzo cortante turbulento, consiste en determinar la distribución de velocidades dentro de un flujo permanente. Se considera aquí, de modo simultáneo, el caso de un flujo cilíndrico; ambos turbulentos. La razón de esto es que el desarrollo para los dos es idéntico. Dichos movimientos se muestran en las Figs. B.8 y B.9, respectivamente.

Para el flujo bidimensional es válida la ecuación del movimiento (4.10a), en lugar de la (B.9), que es para el conducto cilíndrico. De acuerdo con el sistema de ejes, elegido en la Fig. B.8, la Ec. (4.10a) se expresa así:

$$-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

o bien,

$$S_f = -\frac{\partial (p/\gamma)}{\partial s} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

donde S_f es la pendiente de fricción. Si se considera que S_f es constante, de la ecuación anterior resulta que

$$\tau = \gamma\, S_f\, y + C_1$$

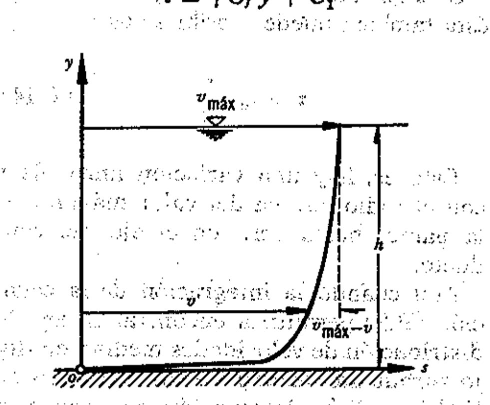


Figura B.8. Distribución de velocidades en un flujo bidimensional a superficie libre.

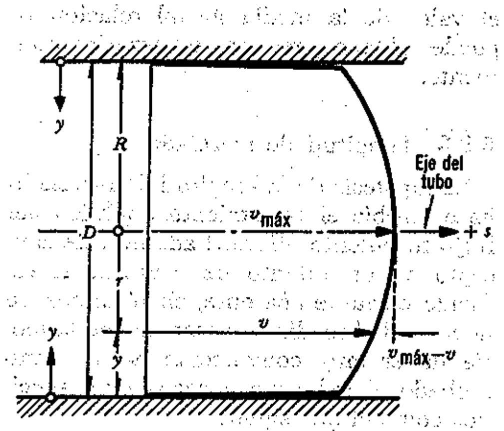


Figura B.9. Distribución de velocidades en un conducto cilíndrico.

De las condiciones de frontera $\tau = \tau_0$ para $y = 0$ y $\tau_0 = 0$ para $y = h$; se tiene que $C_1 = \tau_0$, $S_f = -\tau_0/\gamma h$, por lo que la ecuación anterior es:

$$\tau = \tau_0\left(1 - \frac{y}{h}\right) \qquad \text{(B.18)}$$

que es equivalente a la Ec. (B.14) para el tubo cilíndrico.

Ley de Prandtl. En los dos tipos de flujo mencionados se suponen tres hipótesis elaboradas por Prandtl que, aun cuando no son convincentes, han demostrado su efectividad al realizar la verificación experimental.

a) Se supone que el esfuerzo cortante en la zona turbulenta es constante e igual al de la pared (τ_0).

b) El esfuerzo cortante que predomina es el turbulento; esto es, de la Ec. (B.16) $\tau = \tau' = \rho\, l^2\, (dv/dy)^2$.

c) Hay una variación lineal de la longitud de mezclado con la distancia a la pared: $l = \kappa y$.

De la primera y segunda hipótesis resulta que

$$\rho\, l^2\, (dv/dy)^2 = \tau_0$$

y, con la tercera hipótesis, tenemos:

$$\frac{dv}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\, \frac{1}{\kappa y} \qquad \text{(B.19)}$$

Las dimensiones del término $\sqrt{\tau_0/\rho}$ corresponden a los de una velocidad llamada *de fricción* y se representa por v_*. De esta manera, integrando la Ec. (B.19) resulta:

$$\frac{v}{v_*} = \frac{1}{\kappa}\ln y + C \qquad \text{(B.20)}$$

que vale para los dos flujos aquí tratados. La constante C de integración se obtiene de la condición de frontera $v = v_{máx}$, para $y = h$, en el flujo bidimensional; y para $y = R$ en el flujo dentro del tubo cilíndrico. Para el segundo caso, resulta:

$$C = v_{máx}/v_* - \frac{1}{\kappa}\ln R,$$

y la Ec. (B.20) es entonces:

$$\frac{v_{máx} - v}{v_*} = \frac{1}{\kappa}\ln (R/y) \qquad \text{(B.21)}$$

En el caso del flujo bidimensional resulta la misma Ec. (B.21) si R se substituye por h; la diferencia $v_{máx} - v$ se conoce como *velocidad déficit*. Su interpretación se presenta en las Figs. B.8 y B.9.

Con base en los resultados experimentales de Nikuradse y Reichardt, en tubos lisos y rugosos, se observó una magnífica concordancia con la Ec. (B.21) cuando $\kappa = 0.4$ (Ref. 38). La Ec. (B.21) se escribe entonces:

$$\frac{v_{máx} - v}{v_*} = 2.5 \ln (R/y) \qquad \text{(B.22a)}$$

Con el mismo $\kappa = 0.4$, los mismos investigadores encontraron que la ecuación para el flujo bidimensional

$$\frac{v_{máx} - v}{v_*} = 2.5 \ln (h/y) \qquad \text{(B.22b)}$$

concordaba también con los resultados experimentales. Por esta razón, la ecuación (B.22a) se conoce como *ley de distribución universal de velocidades* y es válida para tubos lisos y rugosos.

La verificación experimental de la ecua-

ción (B.22a) hace pensar que las hipótesis propuestas por Prandtl son aparentemente correctas y que permiten, a través de un método sencillo, llegar rápidamente a la solución. Se aceptará, entonces, la ley de distribución de velocidades expresada por la Ec. (B.22a) para los tubos; o la (B.22b) para canales (siendo ambos lisos o rugosos).

Con $\kappa = 0.4$, la Ec. (B.20) es entonces:

$$\frac{v}{v_*} = 2.5 \ln y + C \qquad \text{(B.23)}$$

Esta última ecuación se puede también escribir de la manera siguiente:

$$\frac{v}{v_*} = 2.5 \ln \frac{y}{y_1}$$

Como v_* tiene las dimensiones de una velocidad, y/y_1 es adimensional; entonces y_1 debe tener las dimensiones de una longitud. Se observa que para $y = y_1$, $v = 0$, incongruencia que será explicada posteriormente. Asimismo, de la ecuación (B.23) resulta:

$$\frac{dv}{dy} = 2.5 \frac{v_*}{y}$$

Para el centro del tubo ($y = R$), dv/dy debiera ser cero, debido a que $v = v_{máx}$; sin embargo, esta última ecuación da un valor finito. De nuevo, cuando $y = 0$, $dv/dy = \infty$, lo que resulta evidentemente imposible. Estas anomalías constituyen el resultado de los defectos en la teoría que, a pesar de todo, no tienen mucha importancia en la práctica.

Por definición de velocidad media, de la Ec. (B.23) resulta:

$$V = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R v\, 2\pi (R-y)\, dy = \frac{2 v_*}{R^2} \int_0^R (2.5 \ln y + C)(R-y)\, dy$$

al integrar y tomar límites resulta la ecuación para la velocidad media en el tubo:

$$\frac{V}{v_*} = 2.5 \ln R + (C - 3.75) \qquad \text{(B.24)}$$

B.4 Leyes de resistencia al flujo turbulento

B.4.1 Introducción

Una de las aplicaciones prácticas más importantes para determinar la distribución de velocidades, en flujos laminar y turbulento, la constituye el cálculo de la resistencia al flujo en conducciones. Ésta se traduce en el cálculo de la pérdida de energía por fricción en las conducciones de líquidos a presión o a superficie libre; es de gran interés en la solución de problemas relacionados con el transporte de los líquidos.

Por lo que respecta al esfuerzo cortante τ_0 en la pared, en función de la velocidad media y del factor de fricción f, es posible medirlo substituyendo la ecuación (8.2b) en la (B.13), a saber:

$$\tau_0 = \rho \frac{f}{8} V^2$$

o bien,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \frac{V}{v_*} \qquad \text{(B.25)}$$

B.4.2 Tubos lisos

Varios investigadores han comprobado experimentalmente que, por lo común, en el perfil de velocidades del flujo turbulento —en un tubo liso— se distinguen tres zonas de comportamiento distinto, como se muestra en la Fig. B.10.

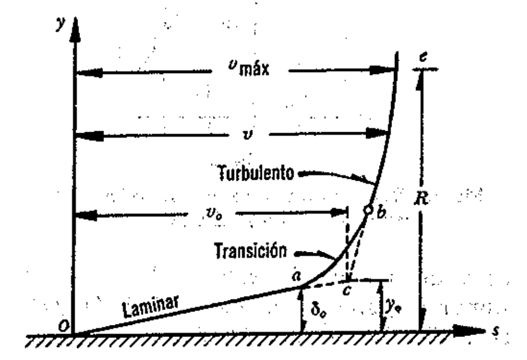


Figura B.10. Distinción de las tres diferentes zonas, dentro del perfil universal de velocidades, en un tubo liso.

La zona *o-a* es una capa muy delgada en la que el esfuerzo viscoso predomina y el turbulento es despreciable; corresponde a la subcapa laminar. La zona *a-b*, inmediatamente arriba, es de transición y en ella el esfuerzo viscoso y el turbulento son del mismo orden de magnitud. Lejos de la pared (zona *b-e*) se tiene un área turbulenta donde el esfuerzo viscoso puede ser totalmente despreciado, en comparación del turbulento.

Por facilidad, el flujo se considera formado por dos zonas: la capa viscosa *o-a-c*, en la que la distribución de velocidades es parabólica (Ec. B.3); y la zona turbulenta en la cual la distribución de velocidades sigue la ley de la Ec. (B.23). En el punto *c* se impone la condición de que el esfuerzo cortante sea el de la pared τ_0.

Puesto que el espesor y_0 debe ser delgado, es de suponerse que la distribución sea lineal en la zona viscosa; de este modo la condición anterior implica que

$$\tau_0 \approx \mu \frac{v_0}{y_0} = \rho v_*^2 \qquad \text{(B.26a)}$$

$$y_0 = \frac{\nu v_0}{v_*^2} \qquad \text{(B.26b)}$$

de la Ec. (B.23), para $y = y_0 = \nu v_0/v_*^2$ se obtiene:

$$C = \frac{v_0}{v_*} - 2.5 \ln \frac{\nu v_0}{v_*^2} = \frac{v_0}{v_*} - 2.5 \ln (v_0/v_*) + 2.5 \ln (v_*/\nu) \qquad \text{(B.27)}$$

por lo que la Ec. (B.23) resulta:

$$\frac{v}{v_*} = 2.5 \ln \frac{v_* y}{\nu} + \left[\frac{v_0}{v_*} - 2.5 \ln \frac{v_0}{v_*}\right] \qquad \text{(B.28a)}$$

$$\frac{v}{v_*} = 2.5 \ln \frac{v_* y}{\nu} + A \qquad \text{(B.28b)}$$

donde

$$A = C - 2.5 \ln \frac{v_*}{\nu} = \frac{v_0}{v_*} - 2.5 \ln \frac{v_0}{v_*} \qquad \text{(B.29)}$$

De los resultados experimentales de Nikuradse y Reichardt se obtuvo que $A = 5.5$, por lo que la Ec. (B.28b) se escribe, indistintamente, así:

$$\frac{v}{v_*} = 2.5 \ln \frac{v_* y}{\nu} + 5.5 \qquad \text{(B.30a)}$$

$$\frac{v}{v_*} = 5.75 \log \frac{v_* y}{\nu} + 5.5 \qquad \text{(B.30b)}$$

Se encontró excelente concordancia entre las mediciones y los resultados obtenidos de la Ec. (B.30b), dentro de la zona turbulenta (Ref. 39). También se obser-

varon marcadas discrepancias en la región próxima a la pared, para valores de $v_* \, y/\nu < 70$ que corresponden a la zona laminar y a la de transición. En la subcapa laminar, la distribución de velocidades sigue el desarrollo de la Ec. (B.26a), de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\frac{v}{v_*} = \frac{v_* \, y}{\nu} \qquad \text{(B.31)}$$

que es válida para $v_* \, y/\nu < 5$.

Con $A = 5.5$, en la Ec. (B.29), ésta se satisface para $v_0/v_* = 11.6$, por lo cual el espesor y_0 de la Ec. (B.26b) resulta ser:

$$y_0 = 11.6 \frac{y}{v_*} \qquad \text{(B.32)}$$

Von Kármán sugiere una ecuación logarítmica para la zona de transición dentro del intervalo $5 < v_* \, y/\nu < 70$, la cual se expresa a continuación:

$$\frac{v}{v_*} = 11.5 \log \frac{v_* \, y}{\nu} - 3.05 \qquad \text{(B.33)}$$

La Ec. (B.30) se conoce como *ley universal de distribución de velocidades en tubos lisos.*

Prandtl propuso una fórmula experimental de tipo exponencial, como la siguiente:

$$\frac{v}{v_{\text{máx}}} = (y/R)^{1/n} \qquad \text{(B.34)}$$

en la cual, de acuerdo con la experiencias de Nikuradse, n varía con el número de Reynolds (Fig. B.11). Blasius obtuvo experimentalmente que $n = 7$, para $Re \leqslant 10.5$, lo cual equivale a la ecuación:

$$v/v_* = 8.74 \, (v_* \, y/\nu)^{1/7} \qquad \text{(B.35)}$$

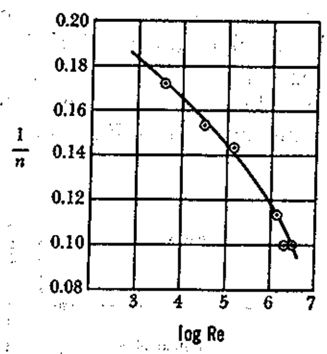


Figura B.11. Valores experimentales del exponente n en la Ec. (B.34).

Para determinar la velocidad media, al sumar y restar el término 2.5 ln (v_*/ν), en la Ec. (B.24), resulta que

$$\frac{V}{v_*} = 2.5 \ln \frac{v_* \, R}{\nu} + (C - 2.5 \ln v_*/\nu - 3.75)$$

y, en la Ec. (B.29), tenemos:

$$\frac{V}{v_*} = 2.5 \ln \frac{v_* \, R}{\nu} + A - 3.75$$

Siendo $A = 5.5$, finalmente resulta

$$\frac{V}{v_*} = 2.5 \ln \frac{v_* \, R}{\nu} + 1.75 \qquad \text{(B.36)}$$

lo que permite el cálculo de la velocidad media, en un tubo de pared lisa donde el flujo es turbulento.

Substituyendo la Ec. (B.36) en la (B.25) resulta entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.881 \ln \frac{v_* \, R}{\nu} + 0.618 \qquad \text{(B.37)}$$

Además, con el término dentro del logaritmo en la Ec. (B.37) se pueden hacer las siguientes transformaciones:

$$\frac{v_* \, R}{\nu} = \frac{2V}{2V} \frac{v_* \, R}{\nu} = \frac{VD}{\nu} \frac{v_*}{2V} = \frac{Re}{2} \sqrt{\frac{f}{8}}$$

y la Ec. (B.37) sería

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.881 \ln \left(Re \sqrt{f/8}/2\right) + 0.618 \qquad \text{(B.38)}$$

que, al transformarla por logaritmos de base 10 y hacer operaciones, resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.03 \log Re \sqrt{f} - 0.91 \qquad \text{(B.39)}$$

De acuerdo con esta ecuación, la ley de fricción para un tubo liso quedaría representada por una recta en un plano, $(1/\sqrt{f}$ contra log $(Re \sqrt{f})$, lo que concuerda bastante con los resultados experimentales de diversos autores (Ref. 38) si se hace un pequeño ajuste, a saber:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log Re \sqrt{f} - 0.8 \qquad \text{(B.40a)}$$

o bien,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{Re \sqrt{f}}{2.51} \qquad \text{(B.40b)}$$

En la Ec. (B.40) el factor f de fricción depende exclusivamente del número de Reynolds y es válida para $2 \times 10^4 \leqslant Re \leqslant 3.4 \times 10^6$. Se ha observado que la ley de resistencia de Blasius (Ec. 8.4) concuerda bastante con la Ec. (B.40), para $2 \times 10^4 \leqslant Re \leqslant 8 \times 10^4$.

Con el fin de dar una idea acerca del espesor de la subcapa laminar, a continuación se examinan dos casos típicos:

a) $V = 4.5$ m/seg; $D = 610$ mm; $\nu = 0.0114$ cm²/seg.

El valor de $Re = 2.41 \times 10^6$ y de la Ec. (B.40b), $f = 0.01$. Substituyendo estos valores en las Ecs. (B.25) y (B.32), $y_0 = 0.083$ mm.

b) $V = 0.3$ m/seg; $D = 51$ mm; $\nu = 0.0114$ cm²/seg.

Los valores de Re y f son 1.34×10^4 y 0.029, respectivamente. De las Ecs. (B.25) y (B.32), $y_0 = 0.719$ mm.

B.4.3 Tubos rugosos

Aunque las leyes de distribución de velocidades, obtenidas en el inciso anterior, también son aplicables en la región central de tubos rugosos, las condiciones del flujo en la vecindad de la pared dependen de la rugosidad de ésta y del espesor de la subcapa laminar (sección B.1). Dado que para tomar en cuenta el efecto de la rugosidad sería necesario considerar la variedad de formas geométricas de la misma, así como su distribución heterogénea que haría inabordable el problema, resulta preferible adoptar el concepto de rugosidad media ε, utilizado por Nikuradse en sus investigaciones.

La Ec. (B.26b) ofrece un criterio para determinar el espesor proporcional ν/v_*^2; sin embargo, en este caso dicho espesor es proporcional a la rugosidad media, como sigue:

$$y_0 = k \, \varepsilon \qquad \text{(B.41)}$$

donde k es una constante arbitraria.

En la Ec. (B.23), para $y = y_0 = k \, \varepsilon$, $v = v_0$, se obtiene así:

$$C = \frac{v_0}{v_*} - 2.5 \ln (k \, \varepsilon) \qquad \text{(B.42)}$$

Por tanto, si

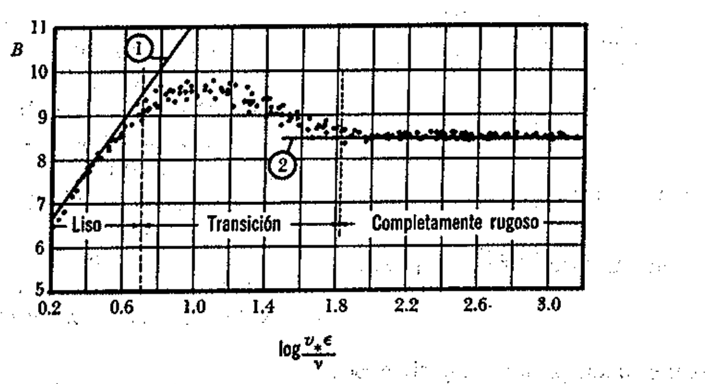


Figura B.12. Función de rugosidad B en términos de $v_* \varepsilon/\nu$ para rugosidad granular de Nikuradse. Curva 1: hidráulicamente liso; curva (2): completamente rugoso.

$$B = C + 2.5 \ln \varepsilon \qquad \text{(B.43)}$$

la Ec. (B.23) se escribe en cualquiera de los dos modos siguientes:

$$\frac{v}{v_*} = 2.5 \ln \frac{y}{\varepsilon} + B \qquad \text{(B.44a)}$$

$$\frac{v}{v_*} = 5.75 \log \frac{y}{\varepsilon} + B \qquad \text{(B.44b)}$$

Nikuradse, experimentalmente, encontró concordancia con la Ec. (B.44b) cuando $B = 8.5$ (Ref. 38).

Por lo que la Ec. (B.44b) se expresa entonces así:

$$\frac{v}{v_*} = 5.75 \log \frac{y}{\varepsilon} + 8.5 \qquad \text{(B.44c)}$$

o sea, la ley universal de distribución de velocidades, para el flujo turbulento en tubos rugosos.

Cuando la pared es relativamente rugosa, dentro del intervalo $4 < v_* \varepsilon/\nu < 100$, B no es constante, sino función del número $v_* \varepsilon/\nu$, como puede observarse en la Fig. B.12 (Ref. 39).

Con $B = 8.5$, de la Ec. (B.43), la constante $C = 8.5 - 2.5 \ln \varepsilon$, por lo cual la Ec. (B.24) resulta ser

$$\frac{V}{v_*} = 2.5 \ln \frac{R}{\varepsilon} + 4.75 \qquad \text{(B.45)}$$

lo que permite calcular la velocidad media. Esta ecuación, substituida en la (B.25), resulta entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0.881 \ln \frac{R}{\varepsilon} + 1.67$$

o bien, con logaritmos de base 10, nos da

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.03 \log \frac{R}{\varepsilon} + 1.67$$

Esta ecuación concuerda con los resultados experimentales de Nikuradse, si se hace un pequeño ajuste para dar la expresión:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{D}{2\varepsilon} + 1.74 \qquad \text{(B.46a)}$$

o bien,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \frac{3.71\, D}{\varepsilon} \qquad \text{(B.46b)}$$

Es decir, la *ley universal de resistencia para flujo turbulento en tubos rugosos.*

Los trabajos de Nikuradse culminaron en el diagrama de la Fig. 8.1, cuyos puntos más importantes ya se explicaron en la sección 8.3.

B.4.4 Coeficientes α y β de corrección

Conocida la distribución de velocidades en tubos lisos y rugosos es posible calcular los coeficientes α y β, que corrigen a las ecuaciones de energía y cantidad de movimiento, restando la Ec. (B.36) de la (B.30a) (ambas correspondientes a tubo liso).

$$\frac{v - V}{v_*} = 2.5 \ln \frac{y}{R} + 3.75 \qquad \text{(B.47)}$$

Si se resta la Ec. (B.45) de la (B.44c) (ambas correspondientes a tubos rugosos) se obtiene una ecuación idéntica a la (B.47), que es válida para los dos tipos de tubos.

De la substitución de v_*, obtenida de la Ec. (B.25) en la (B.47), resulta la relación deseada para v/V, a saber:

$$\frac{v}{V} = 1 + 3.75 \sqrt{\frac{f}{8}} + 2.5 \sqrt{\frac{f}{8}} \ln \frac{y}{R} \qquad \text{(B.48)}$$

Con dicha ecuación se puede calcular el coeficiente de Coriolis, como sigue:

$$\alpha = \frac{1}{A} \int_A (v/V)^3\, dA = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left(1 + 3.75 \times \sqrt{\frac{f}{8}} + 2.5 \sqrt{\frac{f}{8}} \ln \frac{y}{R}\right)^3 2\pi (R - y)\, dy$$

cuya integración resulta

$$\alpha = 1 + 2.93 f - 1.55 f^{3/2} \qquad \text{(B.49)}$$

De la Ec. (4.36) resulta el coeficiente de Bousinesq:

$$\beta = 1 + 0.98 f \qquad \text{(B.50)}$$

Aceptando que f varía normalmente, entre 0.01 y 0.05, de las Ecs. (B.49) y (B.50) α y β varían de 1.03 a 1.13 y de 1.01 a 1.05, respectivamente. Por tanto, se puede aceptar que para el flujo turbulento ambos valores valgan 1, ya que se cometen errores más serios en la apreciación de f.

PROBLEMAS

1. El esfuerzo cortante en la pared (y de aquí el gradiente de presión) se puede estimar para un flujo turbulento plenamente desarrollado a partir de mediciones de velocidad. El agua fluye a $V = 0.86\, v_{máx} = 2.135$ metros/seg, en un tubo de 150 mm.
   a) Determinar el esfuerzo cortante en la pared;
   b) determinar la caída de presión en 100 m de longitud;
   c) si el tubo es liso, estimar la temperatura del agua.

2. Las mediciones del flujo turbulento de un líquido en un tubo, indican que la velocidad en puntos, a la mitad entre el centro del tubo y la pared, es 0.9 veces la velocidad máxima al centro del tubo.
   a) Determinar la velocidad media del flujo en términos de la máxima;
   b) determinar la rugosidad relativa del tubo.

3. Explicar cualitativamente por qué la fuerza total resultante de la caída de presión en la región a la entrada de un tubo horizontal es mayor que la fuerza total debida al esfuerzo cortante a lo largo de la pared del tubo. Suponer flujo incompresible.

4. Mediciones directas indican que para flujo turbulento, plenamente desarrollado en un tubo circular de rugosidad relativa 0.0018 y en un tubo liso a $R_e = 82\,000$, la velocidad media corresponde a aquella para $y/R=0.25$. ¿Para qué valor de y/R es la velocidad igual a la media para: *a)* la ley de velocidad de Blasius; *b)* la ley universal de velocidades de Prandtl?

5. El esfuerzo cortante en un líquido que fluye por una tubería circular:

a) es constante en toda la sección transversal;
b) es nulo en la pared y se incrementa linealmente hasta el centro;
c) varía parabólicamente en la sección transversal;
d) es nulo en el centro y varía linealmente con el radio;
e) ninguna de las respuestas anteriores.

6. La longitud de mezclado de Prandtl es:

a) independiente de la distancia radial, desde el eje de la tubería;
b) independiente del esfuerzo cortante;
c) nula en la pared del tubo;
d) una constante universal;
e) útil para cálculos en los problemas del flujo laminar.

7. En el flujo turbulento, una tubería rugosa tiene el mismo factor de fricción que una tubería lisa:

a) en la zona de plena turbulencia, tuberías rugosas;
b) cuando el factor de fricción es independiente del número de Reynolds;
c) cuando la altura de las rugosidades es mucho menor que el espesor de la capa límite;
d) en la zona de transición;
e) cuando el factor de fricción es constante.

8. En la zona de turbulencia completa y tuberías rugosas:

a) las tuberías lisas y rugosas tienen el mismo factor de fricción;
b) la película laminar cubre las rugosidades;
c) el factor de fricción depende únicamente del número de Reynolds;
d) la pérdida de energía varía con el cuadrado de la velocidad;
e) el factor de fricción es independiente de la rugosidad relativa.

Referencias

1. H. Press y R. Schröder: *Hydromechanik im Wasserbau*; Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlín, Munich (1966).
2. O. Tietjens: *Strömungslehre*; Springer Verlag, Berlín (1960).
3. G. Hutarew: *Einführung in die Technische Hydraulik*; Springer Verlag, Berlín (1965).
4. S. W. Yuan: *Foundations of Fluid Mechanics*; Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1967).
5. V. L. Streeter: *Fluid Mechanics*; 4ª ed., Mc Graw-Hill-Kogakusha, Tokio (1966).
6. P. G. Kisieliev: *Manual de Cálculos Hidráulicos*; GEIL, Moscú (1961).
7. M. A. Mostkow: *Handbuch der Hydraulik*; VEB Verlag Technik, Berlín (1956).
8. K. Federhofer: *Aufgaben aus der Hydromechanik*; Springer Verlag, Viena (1954).
9. J. Kozeny: *Hydraulik*; Springer Verlag, Viena (1953).
10. I. Szabó: *Einführung in die Technische Mechanik*; Springer Verlag, Berlín (1959).
11. D. A. Gilbrech: *Fluid Mechanics*; Wadsworth Publishing Co. Inc., Belmont, Cal. (1965).
12. W. M. Swanson: *Fluid Mechanics*; Holt, Rinehart and Winston, Nueva York (1970).
13. R. B. McQuistan: *Scalar and Vector Fields*; John Wiley & Sons, Inc., Nueva York (1965).
14. R. M. Olsen: *Essentials of Engineering Fluid Mechanics*; International Textbook Company, Scranton, Penn (1967).

15. H. Rouse: *Elementary Mechanics of Fluids*; John Wiley & Sons, Inc., Nueva York (1962).
16. N. W. Arshanikow y W. N. Malzew: *Aerodynamik*; VEB Verlag Technik, Berlín (1960).
17. J. W. Daily y D. R. F. Harleman: *Fluid Dynamic*; Addison-Wesley Publishing Co. Inc., Reading, Mass (1966).
18 E. Levi: *Mecánica de los fluidos*; Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D. F. (1965).
19. E. Levi: *Teorías y métodos de las matemáticas aplicadas*; Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D. F. (1965).
20. H. Rouse: *Engineering Hydraulics*; John Wiley & Sons, Inc., Nueva York (1950).
21. E. Z. Rabinobich: *Cálculo de problemas de hidráulica*; GILT, Moscú (1962).
22. A. Schlag: *Hidraulique Générale*; Dunod París (1957).
23. F. H. Knapp: *Ausfluss Überfall und Durchfluss im Wasserbau*; Verlag G. Braun, Karlsruhe (1960).
24. F. J. Domínguez: *Hidráulica*, Editorial Universitaria, S. A.; Santiago de Chile (1959).
25. U. Puppini: *Hydraulique*; Nicola Zanichelli, Boloña (1947).
26. Ven Te Chow: *Open Channel Hydraulics*; McGraw-Hill Book, Co., Nueva York (1959).
27. F. M. Henderson: *Open Channel Flow*; The MacMillan Company, Nueva York (1966).
28. M. Schmidt: *Gerinnehydaulik*; Bauverlag GMBH, Wiesbaden (1957).
29. A. Toch: *Discharge Characteristics of Tainter Gates*; Trans, ASCE, Vol. 120 (1955).
30. J. Smetana: *Hydraulika*, Ceskoslovenska Akademie, VED; Praga (1957).
31. A. Lencastre: *Manuel d'hydraulique générale*; Eyrolles, París (1961).
32. C. Cruickshank: *Flujo fuente en pozos*; III Congreso Latinoamericano de Hidráulica, Buenos Aires (1968).
33. O. W. Israelsen y V. E. Hansen: *Principios y aplicaciones del riego*; Reverté, S. A., Barcelona (1965).
34. W. H. H. Banks, C. R. Burch y T. L. Schaw: *The Design of Proportional and Logarithmic Thin-plate Weirs*; Journal of Hydraulic Research IAHR, Vol. 6, Nº 2, Delft (1968).
35. O. Haszpra: *The problem of the Quadratic Weir*; Acta Tech. Hung 51, Budapest (1965).
36. N. S. Govinda Rao y K. Keshave Murthy: *On the Design of Logarithmic Weirs*; Journal of the Hydraulics Research IAHR, Vol 4, Nº I, Delft (1966).
37. *Design of Small Dams*; U. S. Department of Interior; *Bureau of Reclamation*, Denver (1963).
38. J. Nikuradse: *Strömungsgesetze in rauhen Rohren*; VDI-Forschungsheft, Vol. 361, Berlín (1933).
39. H. Schlichting: *Grenzschittheorie*; G. Braun Karlsruhe (1951).
40. E. Scimemi: *Compendio di Idraulica*; Editorial Cedam, Padua (1959).
41. J. Malaika: *Flow in Noncircular Conduits*; Journal of the Hydraulics Division, ASCE (nov. 1962).
42. Ch. Jaeger: *Engineering Fluid Mechanics*; Blackie & Sons, Limited, Londres (1956).
43. H. Richter: *Rohrhydraulik*; 4ª ed., Springer Verlag, Berlín (1962).
44. L. Nogueira G.: *Elementos de mecánica de los fluidos; Hidráulica general*; Vol. 1, Ed. gard Blücher, São Paulo (1960).
45. A. Wechmann: *Hydraulik*; Verlag Technik, Berlín (1958).
46. E. Mosonyi: *Water Power Development*; Vol. 1, Academia de Ciencias de Hungría, Budapest (1957).

47. *Pipe Friction Manual*; Hydraulic Institute; 3ª ed., Nueva York (1961).

48. C. Mataix: *Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas*; Harper & Row Publishers, Inc. Madrid (1970).

49. W. Holzmüller: *Technische Physik*; Vol. 1, VEB Verlag Technik, Berlín (1959).

50. *Manual de Diseño de Obras Civiles*, Vol. 2, Comisión Federal de Electricidad; México, D. F. (1969).

51. NACA; *Technical Memorandum 952.*

52. J. Brix, H. Heyd y E. Gerlach: *Die Wasserversorgung*; R. Oldenbourg, Munich-Viena (1963).

53. U. Shamir y Ch. D. D. Howard: *Water Distribution Systems Analysis*; Journal of the Hydraulics Division; ASCE, Nº 5758 (enero de 1968).

54. F. González, A. Capella: *Análisis de la red interna de la C. de México*; Publicación del Instituto de Ingeniería, UNAM, (1972).

55. H. Wenzel: *Verteilung des Wassers*; VEB Verlag für Bauwesen, Berlín (1960).

56. A. Thom, C. J. Apelt y C. J. J. Temple: *Field Computations in Engineering and physics*; D. Van Nostrand Company, Ltd., Londres (1961).

57. D. N. de G. Allen: *Relaxation Methods in Engineering and Sciences*; Mc Graw-Hill Book, Co., Inc., Nueva York (1954).

58. O. C. Zienkiewics: *The Finite Element Method in Structures and Continuum Mechanics*; Mc Graw-Hill Book, Co., Inc., Nueva York (1971).

59. J. L. Sánchez B.: *Mecánica del medio continuo*; Textos Universitarios, UNAM, D9; México, D. F. (1972).

60. J. M. Robertson: *Hydrodynamics in Theory and Application*; Prentice Hall International Inc.; Englewood Cliff, N. Y. (1965).

61. I. H. Schames: *La mecánica de los fluidos*; McGraw Hill Book Co., México, D. F. (1967).

62. H. R. Vallentine: *Applied Hydrodynamics*; Butterworths, Londres (1967).

63. N. B. Webber: *Fluid Mechanics for Civil Engineers*; S. I. Edition Chapman and Hall Londres (1971).

64. A. Roshko: *Experiments on the Flow Past a Circular Cilynder at Very High Reynolds Number*; Journal of Fluid Mechanics, volumen 10; Londres (1961).

65. N. Curle y S. W. Skan: *Approximate Method for Predicting Separation Properties of Laminar Boundary Layers*; Aeroquart Vol. 9, Nº 257 (agosto de 1957).

66. W. Albring: *Angewandte Strömungslehre*; Verlag Theodor Steinkopf Dresden, 2ª ed. Leipzig (1962).

67. W. Kaufmann: *Technische Hydro-und Aeromechanik*; Springer Verlag, Berlín (1968).

68. H. L. Leutheusser y W. Douglas: *Similitude Problems in Building Aerodynamics*; Journal of the Hydraulics Division, Paper 5226 Nueva York (1967).

69. *Wind Forces on Structures*; Final Report of Task Committee on Wind Forces; Committee on Loads and Stresses, Trans, ASCE.

70. *Wind Effects on Buildings and Structures*, Procs.; International Research - Seminar, Vols. 1 y 2, University of Toronto Press, Toronto (1968).

71. C. J. Apelt y L. T. Isaacs: *Bridge Piers-Hydrodynamics Force Coefficients*; Journal of the Hydraulics Division, ASCE (enero de 1968).

72. G. Echávez A.: *Erosión en concreto, causada por flujo de alta velocidad*; Instituto de Ingeniería, UNAM; Informe 226, México, D. F. (1969).

73. L. I. Sedov: *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*; Academic Press, Inc. Nueva York (1959).

74. R. C. Reid y T. K. Sherwood: *The Properties of Gases and Liquids*; Mc Graw-Hill Book, Co., Nueva York (1958).

75. J. F. Douglas: *Solution of Problems in Fluid Mechanics*; Partes 1 y 2, Pitman Paperbacks, Londres (1967).

76. W. Kalide: *Einführung in die Technische Strömungslehre*; Carl Hanser Verlag, Munich (1968).

77. R. R. Long: *Mechanics of Solids and Fluids*; Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1961).

78. E. H. Lewitt: *Hydraulics and Fluid Mechanics*; Pitman, Londres (1959).

79. L. Prandtl: *Strömungslehre*; Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig (1965).

80. G. Nadeau: *Introduction to Elasticity*; Holt, Rinehart and Winston, Inc., Nueva York (1964).

81. R. H. Sabersky y A. J. Acosta: *Fluid Flow A First Course in Fluid Mechanics*; Mc-Collier-McMillan Student Editions, Nueva York (1964).

82. W. Volk; *Absperrorgane in Rohrleitungen*; Springer Verlag, Berlín (1959).

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS IMPARES

CAPITULO 1

1. Resolver según texto
3. Resolver según texto
5. $\tau = 0.48075$ kg/m²
7. $T = 5.004$ kg m
9. *a)* $\tau = \tau_f + \mu \frac{\partial v}{\partial y}$, donde τ_f esfuerzo de fluencia.

   b) $\tau = 0.244 + 0.000122 \frac{\partial v}{\partial y}$

   c) $\mu = 0.000366$ kg seg/m²
11. $W = 512.747$ ton
13. $\rho = 98.3388$ kg seg²/m⁴; $\delta = 0.964$

CAPITULO 2

1. *a)* $h = 9.94$ m
   b) $h = 9.79$ m
3. $v = 0.009$ m³
5. *a)* $T = 9583.3$ kg
   b) $M = 9.228$ ton m
   c) $R_A = 19170$ kg
7. *a)* $P = 1297$ ton
   b) $R_2 = 839.5$ ton
   c) $M = 89.8$ ton m
9. $P = 48$ ton
   $x_1 = 1.333$ m
   $x_2 = 2.438$ m
   $x_3 = 3.157$ m
   $x_4 = 3.738$ m
   $M = .9$ ton m
11. *a)* $P_1 = 2.448$ ton;
   $M_1 = 1.04$ ton m
   $P_7 = 31.824$ ton;
   $M_7 = 13.525$ ton m
   b) $\Delta h_1 = 0.20$ m
   $\Delta h_2 = 0.015$ m
13. *a)* $P_1 = 540$ ton
   $P_2 = 843.5$ ton
   b) $x = 3.60$ m
   c) $T = 292.8$ ton
15. *a)* $R_A = 17.771$ ton
   b) $T = 35.54$ ton
17. *a)* $P = 228.82$ kg
   b) $x = 0.3534$ m
   c) $p_v = 202.5$ kg/cm²
19. $T = -4.82$ ton (sentido contrario al indicado en la figura)
21. *a)* $P = 5.06$ ton
   $M = 0.32$ ton m
   b) $R_2 = 0.856$ m
23. *a)* $P = 14.65$ ton
   $\theta = 38°39'$
   b) $T_A = 12.57$ ton
   $T_B = 11.56$ ton
25. *a)* $P = 39.56$ ton
   $\theta = 45.84°$
   b) $N = 4.37$ ton
   c) $T = 2.09$ ton
27. $P = 3.58$ ton
   $\theta = 30° 12' 18''$

29. $P = 41.49$ ton
31. $P = 0.622$ ton
33. *a*) $P = \frac{1}{8}\gamma\pi R^2 h$

b) $P = \frac{1}{24}\gamma\pi R^2 h + W$

35. $V = 342.92\ m^3$
37. $W = 1.148$ kg
39. $a = 1.936$ m (desde el nivel del agua)
41. $h = 1.854$ m
43. $h = 1.29$ m, estable.

$M = 139.1$ ton m

45. $T = 9.8467$ ton
47. $H = 0.161$ m
49. $p_1 = 247.6\ kg/m^2$

$p_2 = 228.6\ kg/m^2$

51. *a*) $A = 0.1094\ m^2$

b) $\omega = 9.028$ rad/seg

$p_c = 1.21\ ton/m^2$

$p_B = 1.59\ ton/m^2$

53. *a*) $\omega = \frac{3}{2R}\sqrt{gh}$

Para puntos ubicados como en la figura del prob. 51:

$p_A = p_a + \frac{3}{8}\gamma h;$

$p_B = p_a + \frac{11}{8}\gamma h;\ p_C = p_a + \frac{\gamma h}{4}$

55. $\omega = \sqrt{2g/a}$
57. $\omega = \frac{1}{r}\sqrt{2g\left(h + \frac{pa - pv}{\gamma}\right)}$
59. $D = 6.6$ cm

CAPITULO 3

1. *a*) $\psi = -\frac{1}{2} a\,(x^2 + y^2) + C_1;$

$x^2 + y^2 = C_2$

b) el flujo es rotacional

3. *a*) $\mathbf{a} = 80\,\mathbf{j} - 80\,\mathbf{k};\ a = 113.14$

b) $\mathbf{a} = -58\,\mathbf{i} - 10\,\mathbf{j}$

5. *a*) permanente, uniforme
b) permanente, no uniforme
c) permanente, no uniforme
d) no permanente, no uniforme
e) no permanente, no uniforme
f) no permanente, uniforme
g - 1) no permanente, no uniforme
g - 2) permanente, uniforme

7. *a*) turbulento
b) turbulento
c) laminar
d) turbulento
e) laminar
f) turbulento

9. $x\sqrt{y} = \frac{5 - z}{x} = 2$
11. Substituyendo v_x y v_y en la ecuación, (3.9) e integrando
13. $Q = 0$
15. $v_1 = 0.06$ m/s

$v_2 = 0.1$ m/s

17.
a) Bidimensional, permanente, irrotacional, incompresible.
b) Bidimensional, permanente, irrotacional, incompresible.
c) Bidimensional, permanente, irrotacional, incompresible.
d) Bidimensional, permanente, rotacional, incompresible.

19. $\psi_0 = -2x + y^2$

CAPITULO 4

1. Resolverlo según el texto
3. *a*) $v_y = 2xy + f(x)$, flujo rotacional.

b) $v_y = -(6y + y^2) + f(x)$, flujo rotacional.

c) $v_y = -(2x + 1)\,y + f(x)$, rotacional.

d) $v_y = -\frac{(1 - 2x^2)}{x^2 + y^2}\,y + f(x)$, rotacional.

e) $v_y = -\frac{2xy^2}{x^2 + y^2} + f(x)$, rotacional

f) $v_y = -2y^3 + f(x)$, rotacional

5. $\rho = \rho_0\, e^{-3kt}$
7. $V = 0.2024$ m/s
9. $\beta = 1.33, \beta = 1.02$
11. *a*) $d_2 = 0.032$ m,

b) $p_m = 0.772\ kg/cm^2$

c) h máx $= 3.67$ m, $V = 8.49$ m/seg

13. $V_B = 8.40$ m/seg,

$Q = 0.2639\ m^3/seg,$

$p_B = -0.54\ kg/cm^2$

15. $Q = 0.031\ m^3/s$
17. $p_B = 3.22\ kg/cm^2$
19. *a*) El flujo es de *B* a *A*;

b) $h_r = 1.872$ m

21. $H = 86.2$ m
23. $P = 2.33$ C. V.
25. $P = 13.65$ C. V.
27. $P = 22.57$ C. V.
29. $F = 1029$ kg
31. $F_x = 787.92$ kg, $F_y = W = 115$ kg
33. $P = 52.4$ C. V.
35. $F_x = 37.32$ kg, $F_y = 52.13$ kg
37 $F_x = 1969.75$ ton; $F_y = 1506.30$ ton
39. *a*) $Q_2/Q_1 = \tan^2(\theta/2);$

b) $F = \frac{25\gamma\, Vo^2 B_1^{\,2}}{g}$

41. $F = 39204.971$ kg
43. $F = 3721.97$ kg
45. *a*) $F_x = 80625$ kg, $F_y = 202659$ kg

b) $F_x = 113071$ kg, $F_y = 282915$ kg

47. $F_A = F_B = 71.78$ kg,

$M_A = M_B = 753.98$ kg m

49. $\alpha = 1.266,\ \beta = 1.088,$

$D = 47.428$ kg/m

CAPITULO 5

1. Resolverlo según el texto
3. *a*) Froude
b) Reynolds y Froude
c) Reynolds
d) Reynolds y Froude
e) Mach
f) Froude

5. $F = 457$ kg
7. *a*) 1.875 m/seg
b) 4050 kg
c) 115 HP.

9. $F = 620$ ton/m
11. $Q = 228.5$ l/seg.
13. $T_m = 1.38$ horas
15. *a*) $D_p = 13.1$ kg/m

b) $D_m = 45$ kg/m

$v_m = 18.1$ m/seg

c) Resolver según texto

17. *a*) $v_m = 53.8$ m/seg

b) $D_p = 9.6$ kg

19. $v_m = 11.1$ m/seg

$F_m = 0.118$ kg

21. $v_e = \frac{p_e\, l_e}{\mu_e}$

$h_e = \frac{\mu_e\, v_e}{l_e\, \gamma_e}$

23. $Q_e = 0.92$
25. *a*) $Q_p = 84.1\ m^3/s$

b) $P = 99.992$ ton

27. *a*) $d_m = 27.52$ mm

b) $\frac{h_p}{h_m} = 2.726$

c) $\frac{Q_p}{Q_m} = 12.269$

29. a) $h_m = 0.15$ m

b) $Q_p = 339.9\ m^3/s$

c) $p/\gamma = 4$ m de columna de agua

31. $\rho_e = \dfrac{\mu_e}{v_e\, l_e}$

$\mu_e = \dfrac{\sigma_e\ V_e}{l_e}$

$V_e = \dfrac{l_e\ \mu_e}{\sigma_e}$

$Q_e = \dfrac{l_e^3\ \mu_e}{\sigma_e}$

33. Para la demostración se utiliza la ley de similitud de Mach.

CAPITULO 6

1. *a*) $y = 1.17$ m
   b) $\Delta h_r = 0.10$ m
3. $Q = 0.0276$ m³/s
5. $H_{\text{máx}} = 0.90$ m
7. *a*) $Q = 21.48$ m³/s
   b) $a = 0.714$ m
9. *a*) $Q = 3514.3$ m³/s
   $Q = 6613.1$ m³/s
   b) $a = 2.78$ m
11. *a*) Sí se vierte y debe aumentarse el número o diámetro de los tubos.
13. *a*) $D = 0.505$ m
    b) $h = 2.75$ m
15. *a*) $D = 0.02$ m (estrangulamiento)
    $D_t = 0.033$ m (salida)

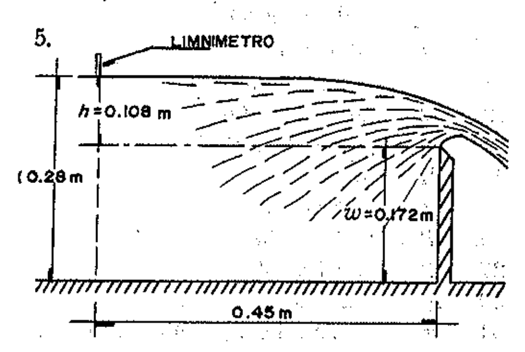
    b) Se demuestra aplicando la ecuación de Bernoulli, entre el tanque y la sección estrangulada, que h es función lineal de la presión.
17. Los resultados numéricos de cada punto son:
    $A/a = 1$; $Q = 0.0324$ m³/s
    $A/a = 2$; $Q = 0.0398$ m³/s
    $A/a = 3$; $Q = 0.0387$ m³/s
    $A/a = 4$; $Q = 0.0375$ m³/s
19. a) $Q = 0.0031$ m³/s
    b) $p_2 = 0.4428$ kg/cm²

21.

Nivel agua (m)	Tiempo de vaciado (s)
1.8	0
1.6	203.93
1.4	439.77
1.2	729.92
1.0	1151.34
0.8	1820.25
0.6	1989.36
0.4	2132.16
0.2	2242.44
0.0	2302.75

CAPITULO 7

1. *a*) $w = 1.729$ m
   b) $h = 0.5025$ m
3. *a*) $w = 0.915$ m
5.



Vertedor rectangular sin contracciones laterales. (b = lm)

7. a) $Q = 0.1277$ m³/s; $Q_o = 0.0854$ m³/s
   b) $Q = 0.0841$ m³/s
9. $Q = 0.1798$ m³/s
11. $Q = 8.495$ lt/s
13.

Carga (m)	Gasto (m³/s)
0.10	0.1574
0.20	0.4463
0.40	1.2725
0.60	2.360
0.80	3.67
1.0	5.179

15. $Q = 4.536$ m³/s
17. $Q_o = 0.4506$ m³/s
    $Q_v = 0.2995$ m³/s
19.

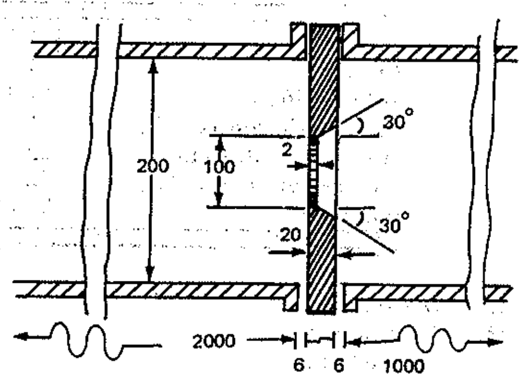
t(seg)	Nivel A (m)	Nivel B (m)
0	2.7	2.0
30	2.6	2.058
60	2.511	2.067
90	2.429	2.041
130	2.329	2.038
170	2.242	2.037
210	2.17	2.035
250	2.112	2.032
290	2.068	2.029
330	2.039	2.025
370	2.022	2.020
∞	2.0	2.0

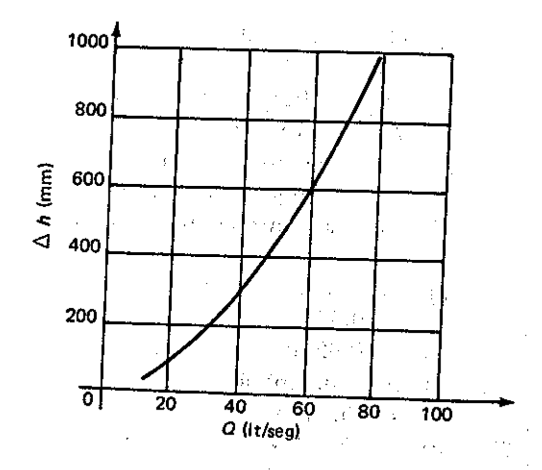
CAPITULO 8

1. $v_c = 0.234$ m/s
3. $v = 42.2$ cm/s
   $Q = 0.212$ cm³/s
   $R_e = 253.5$
5. $P = 536.22$ HP
7. *a*) $R_e = 2400$
   b) Suposición correcta
9. *a*) $P = 40.38$ HP
   b) $P = 24.38$ HP
11. $d = 0.236$ cm
13. $f = 0.035$
15. *a*) $f = 0.0157$
    b) $\epsilon/D = 0.00026$
    c) Concreto presforzado Freyssinet ó acero laminado nuevo.
17. $f = 0.035$
19. $D = 75$ cm
21. $\epsilon = 13.3$ mm
23. $f = 0.013$
25. $D = 0.63$ m
27. $\theta = 13°30'$
29. *a*) Turbulento
    b) tubo liso; $f = 0.018$
    $\epsilon/D = 0.0001$; $f = 0.0185$
    $\epsilon/D = 0.001$; $f = 0.022$
    c) $R_e > 6.8 \times 10^5$
    d) Para ninguno de los dos, por tratarse de flujo turbulento.
    e) Laminar; turbulento para tubos lisos
    f) Zona de transición
    g) $f = 0.06$
    h) $f = 0.0208$
31. *a*) $\Delta h = 0.0268$ m
    b) $L = 5.29$ m
33. *a*) $F = 23.12$ kg
    b) $M_x = 40.12$ kg m
    $M_y = 0$
    $M_z = 299.72$ kg m
35. $P = 4.42 \times 10^{-4}\ \gamma$, en CV.
37. Resolver según texto
39. Las magnitudes d)

CAPITULO 9

1. $Q = 0.1196$ m³/seg
3.





5. $h_f = 8160\,Q^{1.78}$

7. $Q = 0.188$ m³/seg
$p_B = 0.837$ kg/cm²

9. *a*) $Q = 0.0212$ m³/seg

11. *a*) Entrada: $K_e = 0.5$; $h_e = 0.0414$ m
Válvula: $K_v = 0$; $h_v = 0$
Codo: $K_c = 0.16$; $h_c = 0.0132$ m
Contracción: $K_c = 0.44$;
$h_c = 1.422$ m
Chiflón: $K_c = 0.063$;
$h_c = 0.845$ m
Fricción tubo 1: $h_{f1} = 0.13$ m
Fricción tubo 2: $h_{f2} = 6.911$ m
Suma de pérdidas: 9.363 m

b) Elev. vaso = 22.8195 m

c)

	El. L.E. (m)	El. L.P. (m)
Chiflón	13.457	0
Antes chiflón	14.302	11.071
Después de contracción	21.213	17.982
Antes de contracción	22.635	22.552
Después de la entrada	22.778	22.695
Vaso	22.820	

13. $D = 0.214$ m

15. $D_1 = 76$ mm
$D_2 = 64$ mm
$D_3 = 51$ mm
$D_4 = 89$ mm

17. *a*) $Q = 0.422$ m³/seg
b) $P = 705$ CV
c) N.P.O. = 199.7 m

19. $D = 0.16$ m

21. *a*) Alturas piezométricas en m

Tanque inferior	0
Antes de la salida	0.13
Después de la válvula	0.33
Antes de la válvula	0.79
Después de la ampliación	0.84
Antes de la ampliación	1.20
A la entrada del tubo	4.15
Tanque superior	7.20

b) $Kv = 35.7$

23. $Q = 9.42$ m³/seg
$p_B = -1.731$ kg/cm²
Esta presión negativa es imposible; debe profundizarse la tubería, después de la presa, por lo menos diez metros.

25. $Q_1 = Q_5 = 0.26$ m³/seg
$Q_2 = Q_4 = 0.194$ m³/seg
$Q_3 = 0.592$ m³/seg
$H = 3.353$ m

27. *a*) $H = 11$ m
b) En D; $p_D = 0.273$ kg/cm²

29. *a*) $Q = 0.059$ m³/seg
b) $Kv = 0.08$

31. $Q_1 = 0.0005$ m³/seg
$Q_2 = 0.025$ m³/seg
$\Delta h = 0.1$ m

33. $D_1 = 0.09$ m
$Kv = 6.68$

35. $H = 65.57$ m
$Q_1 = 0.296$ m³/seg
$Q_2 = 0.104$ m³/seg

37. $Q_2 = 0.068$ m³/seg
$Q_3 = 0.062$ m³/seg

39. *a*) $L_1 = 409.8$ m
b) $Q = 70.8$ lt/seg

41. $Q_2 = 0.00324$ m³/seg
$Q_3 = 0.0205$ m³/seg

43. $p_M = 2.54$ kg/cm²

45. $P = 15.79$ C.V.

47. $D_{1\text{-}2} = 406$ mm
$D_{2\text{-}3} = 203$ mm
$D_{3\text{-}4} = 152$ mm
$D_{2\text{-}5} = D_{5\text{-}6} = 305$ mm

49. $D_{A\text{-}C} = 152$ mm
$D_{B\text{-}C} = 76$ mm
$D_{C\text{-}D} = 203$ mm

51. *a*) $Q_D = 365.4$ lt/s y
$Q_E = 60.65$ lt/s
hacia el depósito
$Q_C = 426.05$ lt/s
sale del depósito
$E_C = 94.866$ m.
b) $E_B = 108.55$ m
$E_A = 79.35$ m
$E_F = 82.768$ m
c) 81.3 %

53. $P = 1.53$ C. V.

55. *a*) $Q_A = 3.43$ lt/s
$Q_B = 0.76$ lt/s
$Q_C = 2.67$ lt/s
$z = 0.192$ m
b) $Q_A = Q_B = 2.28$ lt/s
$z = 1.724$ m

57. $Q = Q_1 = 9.46$ lt/s
$Q_2 = 5.02$ lt/s
$Q_3 = Q_6 = 2.78$ lt/s
$Q_4 = 4.44$ lt/s
$Q_5 = 2.24$ lt/s

59. $Q = 74.78$ lt/s
$Q_1 = 26.55$ lt/s
$Q_2 = 24.39$ lt/s
$Q_3 = 23.84$ lt/s

61. $Q_{C2} = 402.3$ lt/s
$Q_{2D} = 247.5$ lt/s
$Q_{21} = 154.8$ lt/s
$Q_{B1} = 72.9$ lt/s
$Q_{1A} = 227.7$ lt/s
El orden de los subíndices señala el sentido del escurrimiento.

63. $z_D = 5.888$ m
$h = 6.75$ m

65. $Q_{1\text{-}2} = 42.55$ lt/seg
$Q_{2\text{-}3} = 22.85$ lt/seg
$Q_{1\text{-}6} = 47.45$ lt/seg
$Q_{2\text{-}5} = 19.70$ lt/seg
$Q_{3\text{-}4} = 22.85$ lt/seg
$Q_{6\text{-}5} = 17.45$ lt/seg
$Q_{5\text{-}4} = 37.15$ lt/seg
El orden de los subíndices señala el sentido del escurrimiento.

67. $Q_{A\text{-}1} = 120$ lt/seg
$Q_{1\text{-}2} = 60$ lt/seg — $h_1 = 99.7$ m
$Q_{2\text{-}3} = 30$ lt/seg — $h_2 = 91.9$ m
$Q_{1\text{-}4} = 45$ lt/seg — $h_3 = 89.7$ m
$Q_{4\text{-}3} = 30$ lt/seg — $h_4 = 95.2$ m
El orden de los subíndices señala el sentido del escurrimiento.

69. *a*) $Q_{2\text{-}3} = 14.5$ lt/seg
$Q_{2\text{-}5} = 75.8$ lt/seg
$Q_{5\text{-}3} = 7.3$ lt/seg
$Q_{5\text{-}4} = 38.2$ lt/seg
$Q_{4\text{-}3} = 8.2$ lt/seg
El orden de los subíndices señala el sentido del escurrimiento.
b) Nudo 2 36.03 m
Nudo 3 32.59 m
Nudo 4 33.72 m
Nudo 5 34.36 m

71. $D_{1\text{-}3} = 15.2$ mm
$D_{3\text{-}5} = 7.6$ mm
$D_{2\text{-}4} = 15.2$ mm
$D_{4\text{-}5} = 7.6$ mm
$Q_{1\text{-}3} = 22.87$ lt/seg
$Q_{3\text{-}5} = 7.87$ lt/seg
$Q_{2\text{-}4} = 22.13$ lt/seg
$Q_{4\text{-}5} = 7.13$ lt/seg
El orden de los subíndices señala el sentido del escurrimiento.

73. *a*) $Q_{1\text{-}2} = 53.6$ lt/seg
$Q_{1\text{-}4} = 41.2$ lt/seg
$Q_{2\text{-}3} = 27.0$ lt/seg
$Q_{2\text{-}5} = 21.5$ lt/seg
$Q_{3\text{-}6} = 27.0$ lt/seg

$Q_{4\text{-}5}$ = 34.9 lt/seg
$Q_{5\text{-}6}$ = 50.1 lt/seg
El orden de los subíndices señala el sentido del escurrimiento.
b) $h = 7.573$ m

75. $Q_{1\text{-}2}$ = 73.05 lt/seg
$Q_{2\text{-}3}$ = 24.25 lt/seg
$Q_{1\text{-}4}$ = 73.62 lt/seg
$Q_{2\text{-}5}$ = 23.60 lt/seg
$Q_{3\text{-}6}$ = 14.78 lt/seg
$Q_{4\text{-}5}$ = 30.66 lt/seg
$Q_{5\text{-}6}$ = 25.48 lt/seg
$Q_{4\text{-}7}$ = 33.45 lt/seg
$Q_{5\text{-}8}$ = 16.22 lt/seg
$Q_{6\text{-}9}$ = 21.33 lt/seg
$Q_{7\text{-}8}$ = 22.45 lt/seg
$Q_{8\text{-}9}$ = 16.57 lt/seg
El orden de los subíndices señala el sentido del escurrimiento.

CAPITULO 10

1. *a*) $\mathbf{v} = -\dfrac{4x}{x^2+y^2}\,\mathbf{i} - \dfrac{4y}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$

div v = 0
rot v = 0

b) $\mathbf{v} = U\,\mathbf{i} + V\,\mathbf{j}$

div v = 0
rot v = 0

c) $\mathbf{v} = 2y\,\mathbf{i} + 2x\,\mathbf{j}$

div v = 0
rot v = 0

3. $\psi = 2xy - x + C$

5. $\phi = 3.5(x^2 - y^2) - 4x - 6y + C$

9. *a*) $\psi = C\,r^{\pi/\alpha}\,\text{sen}\,\dfrac{\pi\theta}{\alpha}$

d) $|\mathbf{v}| = 0;\ |\mathbf{v}| = \infty$

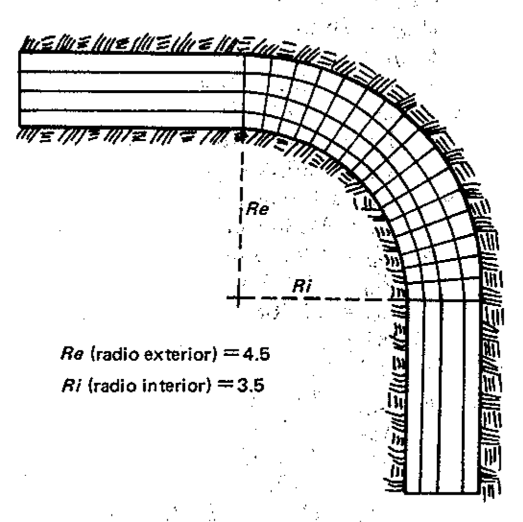
11. *a*) $\mathbf{v} = (-ax)\,\mathbf{i} - a\,\mathbf{j} + az\,\mathbf{k}$

b) $\psi = -axz + C$

13. *a*)

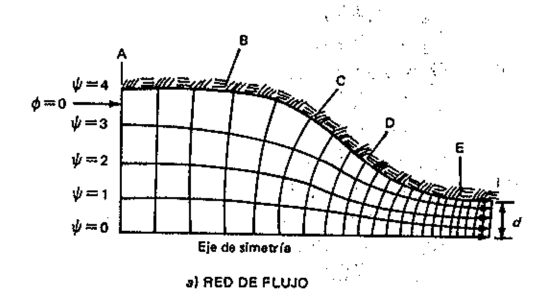
r (m)	v/v_o	C_p
2.4	1.233	– 0.521
2.749	1.077	– 0.159
3.06	0.967	– 0.065
3.342	0.886	0.216
3.60	0.822	0.324

b) $p_e - p_i = 946.45$ kg/m² (gráfica)
$p_e - p_i = 945.51$ kg/m² (Ec. prob. 10.1)

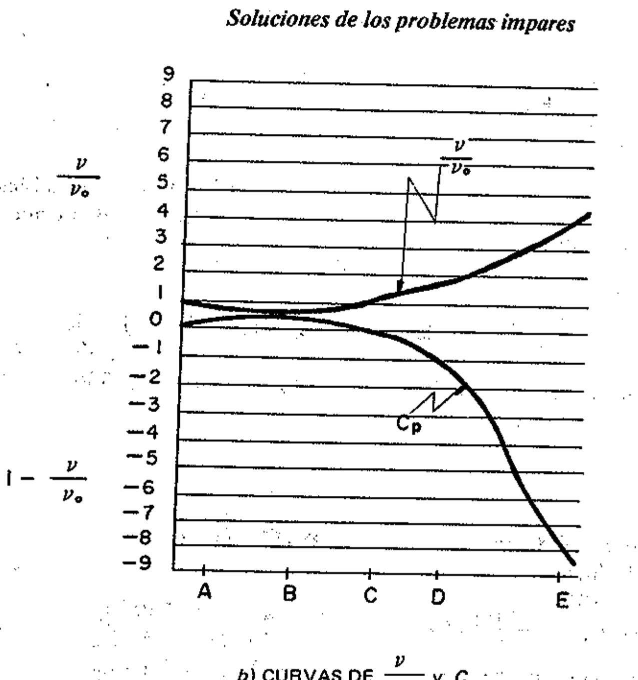


Re (radio exterior) = 4.5
Ri (radio interior) = 3.5

15.

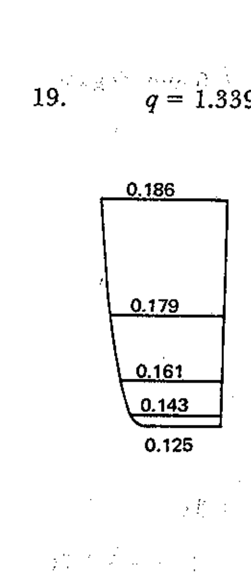


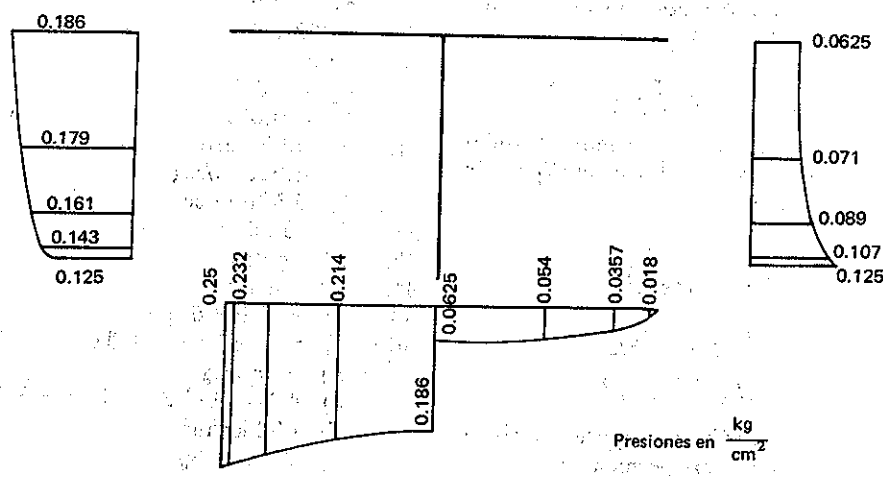
a) RED DE FLUJO



b) CURVAS DE $\dfrac{v}{v_o}$ y C_p

19. $q = 1.339 \times 10^{-5}$ lt/seg/m





21. $$q_o = \frac{k}{2L}\left[\left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1\right)^2 - \left(\frac{p_o}{\gamma} + z_o\right)^2\right]$$

27. *a*) (2.4, 0)

b) v = −0.1 i + 0.575 j

$$y^2 - 2kxy - x^2 = a^2$$

$$p = p_o - \frac{\rho}{2}\left(\frac{m}{2\pi a}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\phi$$

Eje x coincidiendo con la pared y positivo hacia la derecha y el eje y sobre el punto y positivo hacia arriba.

31. *b*) $v = 0$

c) $b = 6.29$ m; $c = 0.84$ m

$\Delta p = 9.69$ kg/m²

33. *b*) $\theta = 30°$; $\theta = 330°$

c) $\psi = 2.5 \operatorname{sen}\theta \left(r - \frac{0.0225}{r}\right)$

35. $r = C_1 e^{-\phi}$ línea de corriente

$r = C_2 e^{+\phi}$ línea equipotencial

37. a) Ambos lados de la tablestaca son líneas de corriente. La frontera entre agua y suelo a ambos lados de la tablestaca es línea equipotencial.

b) Las líneas equipotenciales forman un sistema confocal de hipérbolas de ecuación:

$$\frac{x^2}{l^2\cos^2\psi} - \frac{y^2}{l^2\operatorname{sen}^2\psi} = 1$$

Las líneas de corriente forman un sistema confocal de elipses de ecuación:

$$\frac{x^2}{l^2\cos^2\phi} + \frac{y^2}{l^2\operatorname{sen}^2\phi} = 1$$

c) $$v_x = \frac{k(h_o - h_u)}{\pi l\sqrt{1 + x^2/l^2}}$$

para la frontera superior horizontal de la capa permeable, y:

$$v_x = \frac{k(h_o - h_u)}{\pi l\sqrt{1 - x^2/l^2}}$$

a lo largo de la tablestaca; k es el coeficiente de permeabilidad.

39. *a*) y *b*)

$l = 10$ m; $q = 0.198$ k; O–$s = 0.099$

$l = 20$ m; $q = 0.0998$ k; O–$s = 0.0499$

$l = 30$ m; $q = 0.0666$ k; O–$s = 0.0333$

CAPITULO 11

1. *a*) $D = 799$ kg
   b) $D = 4.57$ kg
   c) $D = 4.13$ kg
3. $P = 34735$ HP
5. Disminuirá al aumentar la fuerza de resistencia.
7. $F_f = 58.18$ kg
9. $C_D = 0.40$
11. Primer cilindro $\epsilon = 0.6$ mm. Segundo cilindro es liso.
13. *a*) $\alpha = 13°$
    b) 672 HP
15. 0.093 HP
17. 75 kg
19. $C_L = 0.82$
    $C_D = 0.037$
21. *a*) 0.055 m/seg
    b) 4.022 m/seg
    c) 5.586 m/seg
23. $D = 0.60$ m
25. 21.9 horas
31. 10.7 m/seg
33. *a*) $n = 263.6$ rpm
36. *a*) $v_\theta = 60 \operatorname{sen}\theta + 31$
    b) 91 m/seg
    c) $\theta_1 = 211°\ 20'$ y $\theta_2 = -31°\ 20'$
    d) 692 kg/m²
    e) 219.13 kg/m

Índice alfabético

—o0o—

Impreso en Programas Educativos, S.A. de C.V. • 115252 000 02 97 522

Obras afines:

RECURSOS HIDRÁULICOS
Helweg

La obra es una presentación de los conceptos básicos, la estructura y la teoría de los recursos hidráulicos. Se explica, también, la administración de datos, así como aquellos datos físicos y socioeconómicos que se manejan en este tipo de proyectos.
Se describe cada una de las etapas del proceso de planeación con vistas a establecer metas y objetivos, para formular y evaluar alternativas y para comunicar el estudio de planeación, la ejecución del plan, a fin de elaborar un análisis posterior . Se incluyen programas de computadora con el objeto de resolver problemas relacionados con el aprovechamiento, control y administración de los recursos hidráulicos.

HIDRÁULICA PRÁCTICA
Simon

Se estudian - desde el punto de vista práctico- los fundamentos de las diversas fases de la hidráulica y el diseño de obras hidráulicas. Se han incluido estudios de modelos así como gráficas , tablas y monogramas a fin de comprender los conceptos y resolver las preguntas que se presentan a final de cada capítulo.
Aborda temas que van desde las propiedades físicas del agua y las leyes de mecánica de fluidos, hasta los dispositivos hidráulicos de medición.

HIDRÁULICA BÁSICA
Simon

Con una exposición clara y apoyándose en numerosas ilustraciones y ejemplos totalmente resueltos, la obra presenta un estudio detallado de hidráulica.
Después de mostrar los conceptos fundamentales de hidrología, examina las propiedades del agua y examina los conceptos fundamentales de la hidrostática, hidrodinámica, el flujo en tuberías y las bombas.
Posteriormente analiza los problemas de flujo en los canales abiertos y en las estructuras hidráulicas, asimismo, analiza los fenómenos de filtración.
Por su contenido temático, esta obra puede utilizarse como libro de texto en los cursos introductorios de hidráulica.

MANUAL DE HIDRÁULICA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
King

Sus 130 tablas, ideadas para el profesor King, permiten a los ingenieros hacer colados rutinarios con gran exactitud logrando un importante ahorro de tiempo, sin que esto signifique el sacrificio de la exactitud.